

境界要素法による水波の非線形解析

Nonlinear Analysis for Water Wave

by Boundary Element Method

日本大学 生産工学部 杉野 隆三郎 **Ryuzaburou SUGINO**

日本大学 生産工学部 登坂 宣好 **Nobuyoshi TOSAKA**

SUMMARY

In this investigation, a nonlinear water wave interaction with various types of boundary configurations is simulated numerically in a two-dimensional fluid region. This numerical solution procedure is based on the boundary element method with the so-called mixed Eulerian-Lagrangian approach. Our numerical solution procedure is developed by using constant boundary elements and the Euler time integration scheme in conjunction with smoothing, relocation and adapting mesh techniques. The results consist of the sloshing phenomena in circular and elliptic containers, wave deformation over a semicircular mound or trench.

2

1 はじめに

自由表面を有する水波の解析では、境界の移動を伴う流れの問題として取り扱われることが多い。移動境界問題はその境界の変形が小さい場合を除いて、非線形性が存在するため数値的に解かざるを得ない。その際にも種々の問題点が存在し、計算力学の分野においても重要な問題の一つとされている。この問題の解析では差分法や有限要素法による研究 [1] が古くからなされているが、取り扱う流体を完全流体に限定した場合には境界要素法を用いた研究が数多く報告されている [2]-[7]。自由表面を有する流れの問題は自由表面の形状に注目した解析を行うことが多いので、内部メッシュを生成する必要がない境界型解法である境界要素法を適用するのが効果的である。

非線形水波現象については種々の問題が考えられるが、典型的なものとして海岸付近で観察される水波の変形がある。これは、水面上を進行する波が海底の形状と相互作用することで様々な変形を引き起こす現象である。特に、緩斜面を波が遡上する際には波頭がジェット状になって飛び出す砕波 (breaking wave) と呼ばれる極めて非線形性の強い現象が現れる。加振加速度を受ける容器内流体の運動においても非線形水波現象が観察される。特に、多角形や円形そして楕円などの形状を有する容器では水面の振幅が成長すると水波が壁面を駆け上がり、遂には壁面から剥離 (free fall) して容器内での砕波現象が現れることが知られている。

著者らは現在までに境界要素法とオイラー・ラグランジェ混合解法を結合させた完全流体を対象とする自由表面流れ問題の近似解析手法を開発し、様々な問題の数値計算を通してその適用性について調べてきた [4]-[7]。容器内流体のスロッシング問題において、多角形容器における大振幅の液面揺動を計算した際に水波が容器の天板付近まで駆け上がり、容器壁上の圧力分布に負圧が生じることが判明した。そこで今回、圧力分布を調べて負圧が生じたところから順次、容器壁上の流体を剥離させる手法を導入することで容器内砕波現象の数値シミュレーションが可能であることを示す。さらに、矩形水槽内の孤立波の運動の解析をもとに、急斜面に水波が駆け上がる際の水面の変形や緩斜面を遡上する際の砕波現象の数値シミュレーションを報告してきた。これら水底形状と水波の相互作用において生じる水面変形の一環として、本論では矩形水槽の中央に置かれた障害物によって散乱を受ける孤立波の運動の数値シミュレーションについても合わせて報告する。

2 数理モデル

閉曲線 Γ で囲まれた2次元領域 Ω 内の流体の運動を考える。閉曲線による境界は壁境界部分 Γ_w 、自由表面境界部分 Γ_f とで構成されているものとする (図1)。ここで対象と

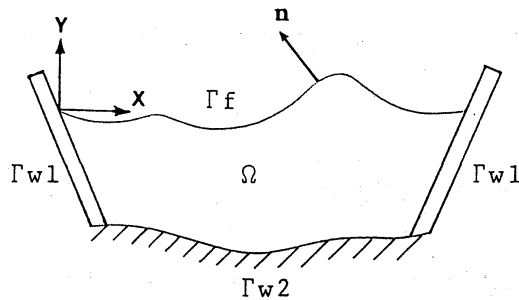


図1: Geometrical configuration

する流体は非圧縮性の完全流体とし、その運動を非回転とすると速度ベクトル $\mathbf{u}(x, y, t)$ は次の Laplace 方程式を満足する速度ポテンシャル $\phi(x, y, t)$ の勾配 $\nabla\phi$ によって次のように与えられる。

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \text{ in } \Omega \quad (1)$$

壁に対する境界条件は、外向き法線ベクトルを \mathbf{n} とすると

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla\phi \equiv q \quad \begin{cases} 0 & \text{on } \Gamma_{w1} \\ \hat{q} & \text{on } \Gamma_{w2} \end{cases} \quad (2)$$

で与えられる。ただし、 \hat{q} は Γ_w が静止した壁の時は0となるが、造波問題における造波機の内壁などに対しては、その移動速度 \hat{q} が与えられる。

次に、自由表面上の境界条件、すなわち自由表面条件をラグランジェ表現によって与える。第1は運動学的境界条件であり、自由表面のラグランジェ座標を (ξ, η) として

$$\frac{D}{Dt} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \nabla\phi \quad \text{on } \Gamma_f \quad (3)$$

で与えられる。ただし、 D/Dt は実質微分作用素を表す。第2は力学的境界条件であり、ベルヌーイの圧力方程式を実質微分表現して次のように与える。

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 \right\} - g\eta - a\xi \quad \text{on } \Gamma_f \quad (4)$$

ここに、 g は重力加速度、 a は水平加振加速度とする。

4

以上により、対象とする問題の微分方程式による数理モデルが構成された。このモデルにおいて、場の支配方程式であるラプラス方程式(1)は時間依存性は無く、ノイマン条件(2)のもとに境界値問題を構成する。一方、自由表面上の境界条件(3), (4)は自由表面上の流体粒子点のラグランジェ座標 (ξ, η) と速度ポテンシャル ϕ に対する1階の連立微分方程式によって与えられることになる。したがって、未知関数 ξ, η, ϕ の初期値を与えることで ξ, η, ϕ に関する初期値問題を構成する。このような問題の設定に対する境界要素法による近似解析手法を以下に述べる。

3 境界値問題の境界要素解析

ラプラス方程式(1)を境界条件(2)のもとで境界積分方程式によって解くことを考える。式(1)の境界積分方程式は次のように与えられる。

$$\frac{\alpha}{2}\phi(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathbf{x}) \omega^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma_w} \hat{q} \omega^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial \omega^*}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (5)$$

ここで、 ω^* はLaplacianの基本解として次式で与えられる。

$$\omega^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (6)$$

ここで、式(5)中の未知量は境界上の ϕ および $\partial\phi/\partial n$ である。これらの未知量を式(5)によって定めるには、ノイマン条件(2)のみならず、ディリクレ条件を与えなければならない。このディリクレ条件として自由表面上のポテンシャル ϕ を与えるものとする。

境界積分方程式(5)を近似的に解くために、境界上の未知量に対し最も簡単な一定要素スキームを導入する。その結果、式(5)は節点未知ベクトル $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]^T$ と $Q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$, ($q_i = \partial\phi_i/\partial n$)に関する次のような連立1次代数方程式となる。

$$H\Phi = GQ \quad (7)$$

ただし、上式の係数行列は第*i*番目の節点 x_i から第*j*番目の境界要素 e_j に対する基本解の積分によって次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} H &= [\hat{H}_{ij} + \frac{1}{2}\delta_{ij}] \\ \hat{H} &= [\hat{H}_{ij}] = \frac{1}{2\pi} \int_{e_j} \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|} \right) d\Gamma(\mathbf{x}) \\ G &= [G_{ij}] = \frac{1}{2\pi} \int_{e_j} \ln \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|} d\Gamma(\mathbf{x}) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

4 初期値問題の近似解析

第2章で与えられた自由表面条件(3)-(4)をまとめて示すと次のような発展型微分方程式表現となる。

$$\frac{D}{Dt} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \right\} - g\eta - a\xi \end{bmatrix} \quad (9)$$

この発展型微分方程式を近似的に解くことを考える。この式の時間積分を実行すると、あらかじめ与えられた ξ , η , ϕ の初期値に対しある時間経過後の ξ , η , ϕ の値を決定することができる。そのための時間積分スキームとしては種々のものが知られているが、本研究では、最も簡単なオイラー・スキームを採用する。このスキームを用いて、連立1階常微分方程式(9)は k 時間ステップにおける右辺の値を用いて $k+1$ 時間ステップにおける未知量を次のように与えることになる。

$$\left. \begin{aligned} \xi^{k+1} &= \xi^k + \Delta t \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^k \\ \eta^{k+1} &= \eta^k + \Delta t \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^k \\ \phi^{k+1} &= \phi^k + \Delta t \left(\frac{D\phi}{Dt} \right)^k \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ただし、上付き添え字 k , $k+1$ は時間ステップを表すものとする。

時間ステップ k での ϕ , $D\phi/Dt$, $\partial\phi/\partial x$, $\partial\phi/\partial y$ を式(10)に代入すると時間増分 Δt 後の自由表面上のラグランジェ座標と速度ポテンシャルを求めることができる。以上の手順を繰り返すことで任意の時刻までの自由表面形状の変化をシミュレートすることができる。ここで、 $D\phi/Dt$ は式(4)を用いて計算される。さらに、 $\partial\phi/\partial x$, $\partial\phi/\partial y$ は自由表面上で得られたフラックス値 $\partial\phi/\partial n$ と接線方向の微分値 $\partial\phi/\partial s$ との幾何学的関係から与えられる [5]。

6

5 数値計算技法

境界の移動を伴う流れの問題を数値計算で解析する際には、種々の数値的な不安定現象が生じることが知られている [2],[3]。砕波などの水面形状が大きく変形する場合にはこの種の数値不安定は深刻であり、数値解が発散して計算の実行が不可能になることがあるので、なんらかの計算技法を用いて対処する必要がある。そこで、本論では以下に述べる3つの数値計算技法を導入することにする。

第1は”smoothing”と呼ばれる解の平滑化技法であり、”saw-tooth”型の数値不安定に対して効果的である。この技法については様々な技法が提案されているが、本研究では文献 [1] に示された次の平滑化公式を用いた。

$$\bar{f}_i = \frac{1}{16}(-f_{i-2} + 4f_{i-1} + 10f_i + 4f_{i+1} - f_{i+2}) \quad (11)$$

この公式 (11) を自由境界上に想定したラグランジェ粒子の座標値とその速度ポテンシャルに対して 10 時間ステップ毎に適用する。

第2は”relocation”あるいは”remesh”と呼ばれる節点の再配置化技法であり、次の数値不安定に対して適用する。自由境界の形状をラグランジェ的に追跡すると境界が急峻な形状を呈する部分に節点が集まることになり、このことから解析領域中の境界要素の長さに大きなばらつきが生じることになる。この要素長のばらつきを放置すると、影響行列 (8) を構成しながら計算ステップを進めるにあたって数値計算誤差が蓄積されて行くことになる。そこで、計算ステップ毎に、自由境界上の全ての要素長を要素長の平均値と比較して、非常に小さな要素が発見された場合にはその要素両端に定義されるメッシュ・ポイントを移動させることで計算誤差を抑制する。

第3は”adaptive mesh generation”と呼ばれる適応型節点再配置技法であり、流体が占める領域の volume 値あるいは全境界上の flux 値をチェックして保存則を満足させるように節点の配置を補正するものである。

以上の数値計算技法を効果的に適用することで、非線形水波の運動を数値シミュレートする際に水面形状が大変形する場合においても安定な計算を進めることができる。

6 数値計算例

6.1 楕円容器内での水波の運動

6.1.1 横置き楕円容器

長径 $a=0.5(\text{m})$ および短径 $b=0.36(\text{m})$ の横置き型の楕円容器に充填率 40% で流体を満たして次式に示される水平外力を加えることにする。

$$a(t) = d\omega^2 \sin(\omega t) \quad \text{for } t \geq 0 \quad (12)$$

計算に用いるパラメータは、加振振幅 $d=0.05(\text{m})$ ，加振振動数 $\omega=5.0(\text{rad}/\text{sec})$ ，時刻 $\Delta t = 0.003(\text{sec})$ とした。そして、分割数は自由境界を 20 分割，壁境界を 20 分割の計 40 分割とした。図 2 に水面形状の変化と壁面上の動圧力分布を示す。図 2 をみると、静止水面から出発した水面は左右に”sloshing”を繰り返して、ついには壁面上部付近まで駆け上がるのがわかる。その時の圧力分布に注目すると、駆け上がり部分の圧力は負圧を示していることがわかる。

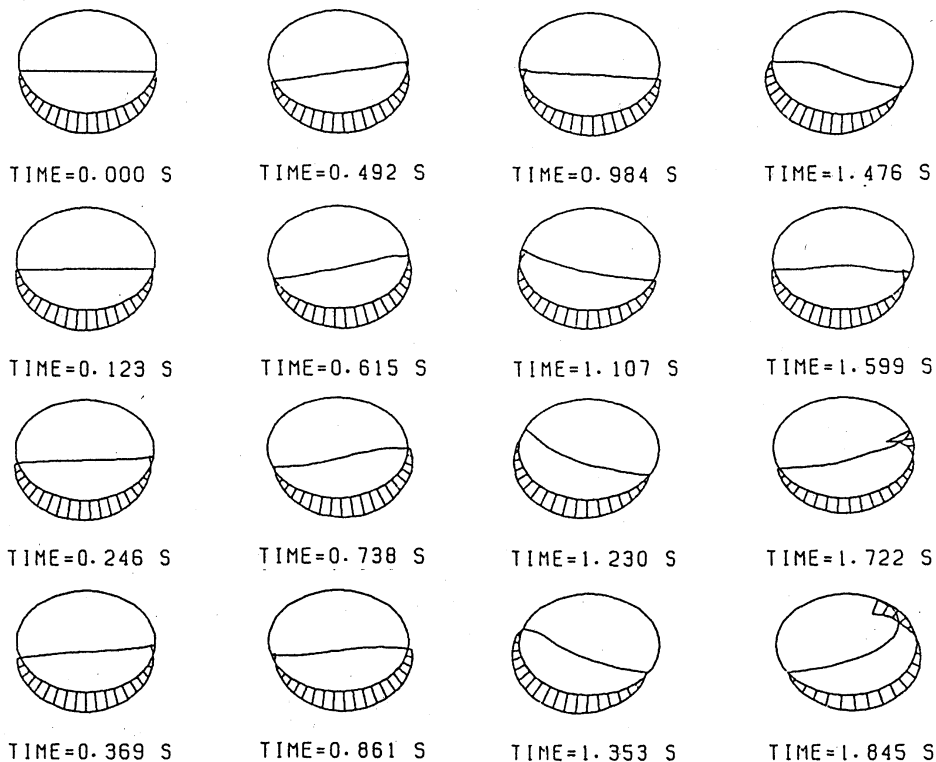


図 2: Elliptic container type (I)

8

6.1.2 縦置き楕円容器

長径 $a=0.7(\text{m})$ および短径 $b=0.5(\text{m})$ の縦置き型の楕円容器に充填率 50% で流体を満たして式 (12) によって与えられる水平外力を加えることにする。もちいるパラメータと分割数は先の横置き楕円容器と同じものとした。図 3 に水面形状の変化と壁面上の動圧力分布を示す。図 3 をみると、やはり静止水面から出発した水面は左右に "sloshing" を繰り返して、壁面上部付近まで駆け上がる場合には圧力が負圧となっていること示している。

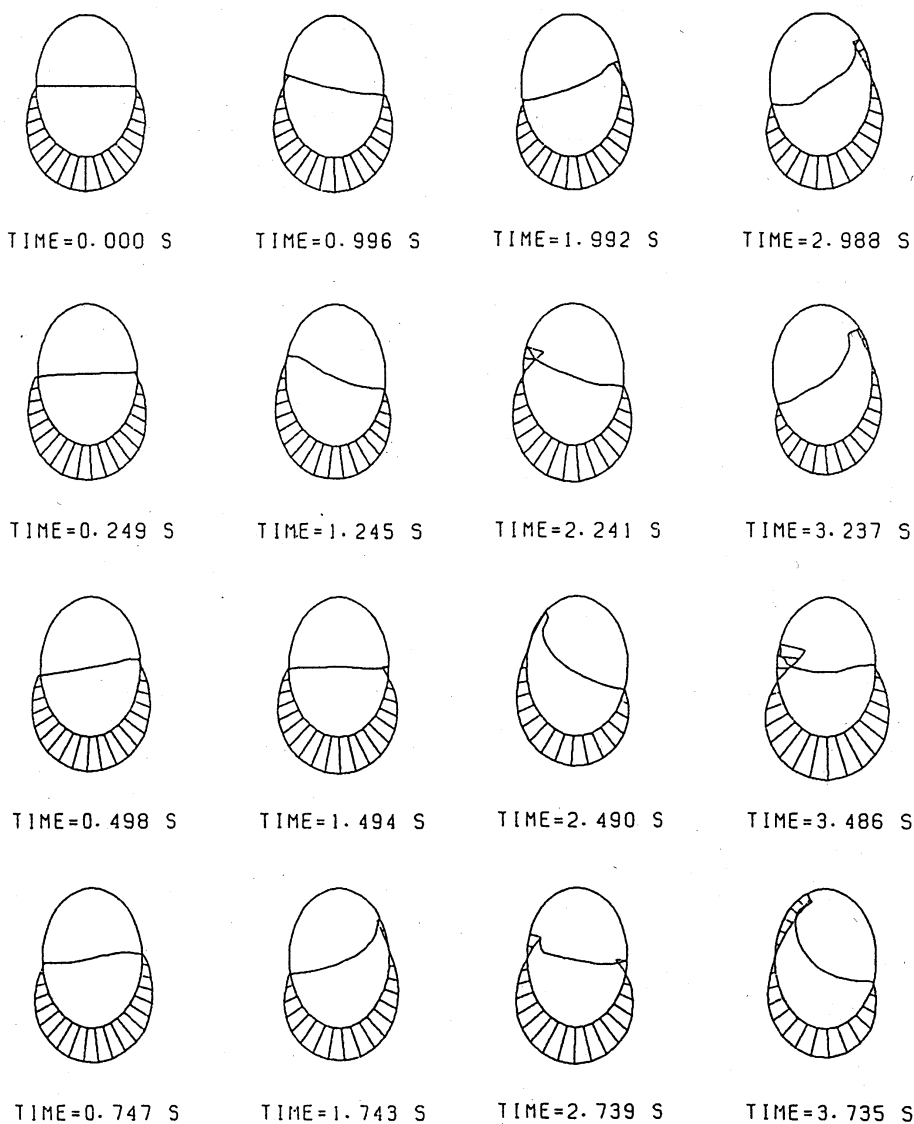


図 3: Elliptic container type (II)

6.2 円形容器内での碎波現象

半径 $r=0.5(\text{m})$ の円形容器に充填率 50% で流体を満たし、式 (12) によって与えられる水平外力を加えることにする。もちいるパラメータは加振振幅 $d=0.5(\text{m})$ ，加振振動数 $\omega=5.0(\text{rad}/\text{sec})$ ，時間刻み $\Delta t = 0.001(\text{sec})$ とした。なお、総分割数は先の楕円容器と同じ 40 分割とした。図 4 に水面形状の変化と壁面上の動圧力分布を示す。図 4 をみると、静止水面から出発した水面が壁面上部付近まで駆け上がっているのがわかる。さらに、駆け上がり部分の圧力は負圧を示していることがわかる。

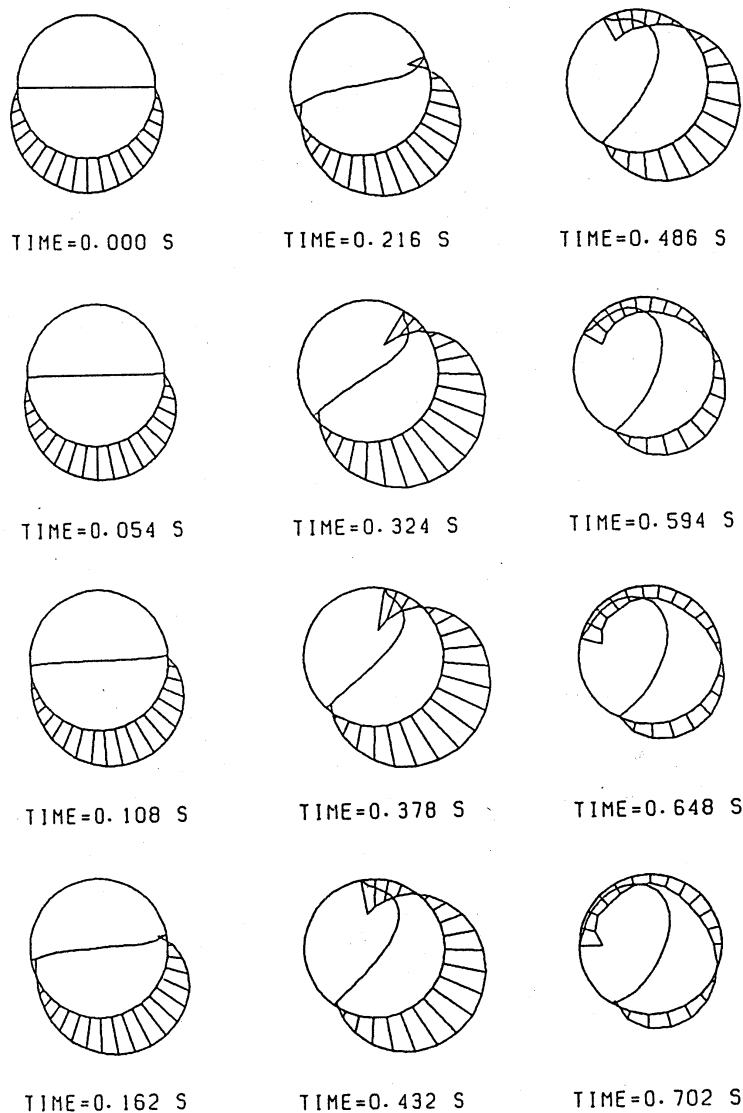


図 4: Circular container

負圧を示す部分は、本来、壁面上から剥離する。次に、このような現象をシミュレートすることを考える。採用したアルゴリズムについて簡単に述べると以下のようなになる。壁面上に配置された節点の圧力を計算ステップ毎に調べて正圧か負圧かを判定して、負圧を感じた場合は境界条件を切り替えることで壁面上の節点を自由表面上の節点として属性を変更する。これらの処理により、流体が壁面から剥離し、"free falling"する過程を調べることができる。図5に前図と全く同じ条件のモデルに流体の剥離条件を加えた場合の数値計算結果を示す。図5をみると図4で負圧が発生するあたりから流体が剥離し先端部分が巻き込んでいく、いわゆる容器内の砕波現象が生じているのがわかる。

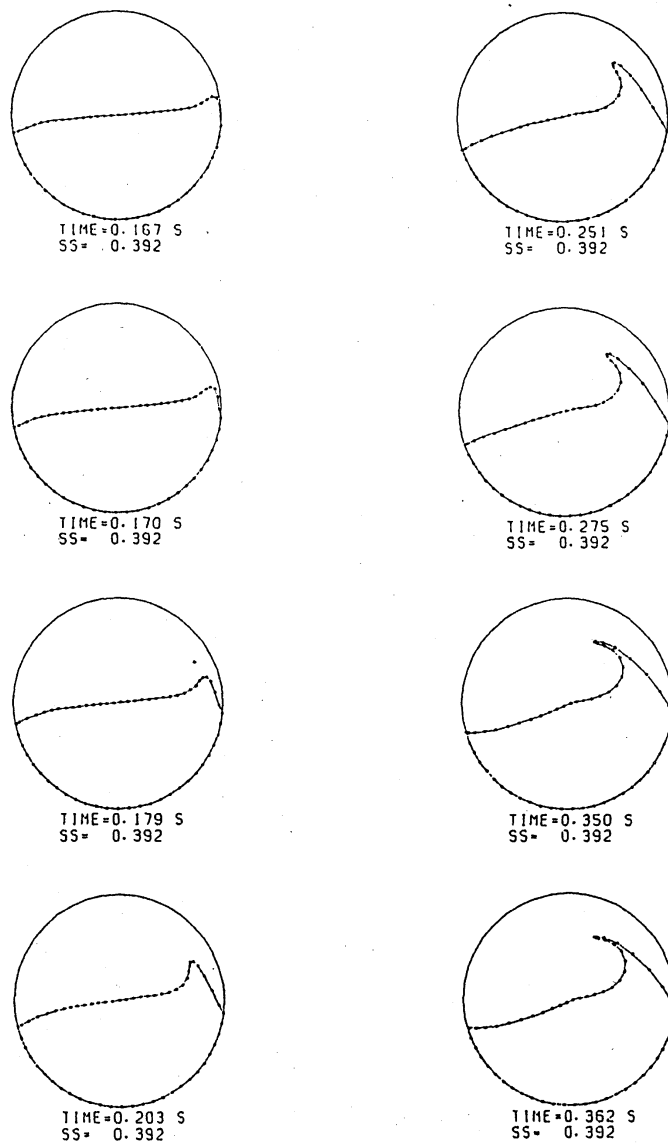


図5: Breaking of free surface in circular container

6.3 矩形水槽内での孤立波の運動

図6にあるような2次元矩形水槽の左端に造波機としてピストンを設定し、解析領域 Ω は自由表面 Γ_f 、ピストン内壁 Γ_{w1} 、底面と右側壁 Γ_{w2} で囲まれているものとする。そして、水槽の長さは無次元化長さ $L=18.0$ とし、底面から平衡水面までの高さは $h=1.0$ とする。

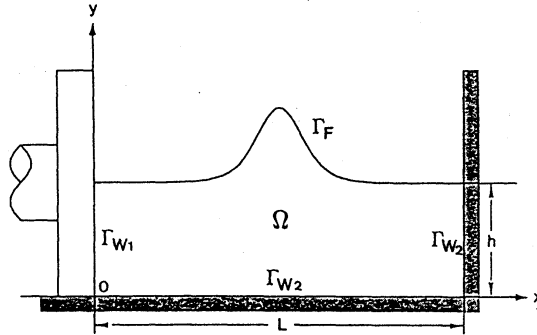


図6: Water tank and wave generator

発生させる孤立波は波高の違う2種類とし、孤立波の性質の違いで内部流速にどのような違いが生じるか比較することにする。壁境界 Γ_{w1} に対する境界条件を次のように与える。

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{dx_p(t)}{dt} \quad (\text{on } \Gamma_{w1}) \quad (13)$$

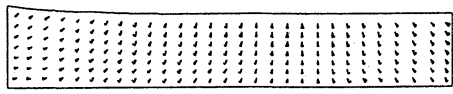
ここで、 $X_p(t)$ はピストンの変位を表す関数であり、ピストンは次の関数に従って移動するものとする。

$$X_p(t) = X_0 \tanh[\omega(t - t_c)] \quad \text{for } 0 \leq t \leq T \quad (14)$$

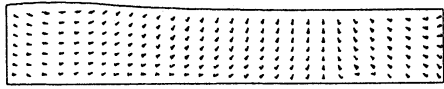
ただし、 X_0 はピストンの半行程を表し、 T はピストンが静止する時刻、 ω 、 t_c はピストンの動きを特徴づけるパラメータである。要素分割は全境界を一定要素を用いて70分割し、そのうち自由表面を30分割する。

$$\left. \begin{array}{l} \text{Type (A): } X_0 = 0.4, \omega = 0.3, t_c = 7.0, T = 16.0, \Delta t = 0.02 \\ \text{Type (B): } X_0 = 0.6, \omega = 0.5, t_c = 5.0, T = 12.0, \Delta t = 0.02 \end{array} \right\} \quad (15)$$

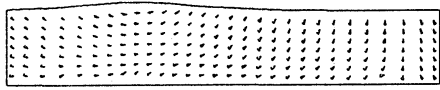
図7-(a),(b) はそれぞれ波高 $A/h=0.1$ および $A/h=0.3$ の孤立波が左端より発生し、矩形水槽を右へ伝播し、右側壁で反射して左へ進行していく過程について、自由表面形状および内部の流れの状況を把握するために、流速ベクトル場を示したものである。図7-(a),(b) をみるとどちらも孤立波が進行したあとには複雑な流れの循環が生じているのがわかる。



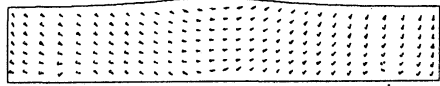
T = 6.00



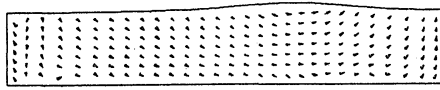
T = 9.00



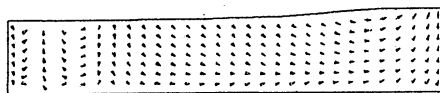
T = 12.00



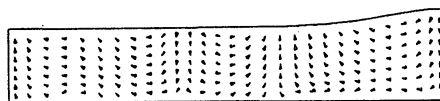
T = 15.00



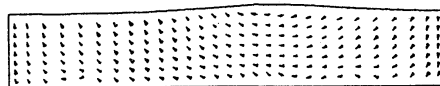
T = 18.00



T = 21.00

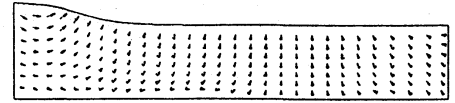


T = 24.00

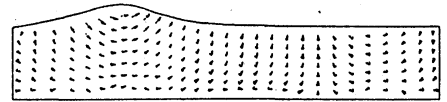


T = 30.00

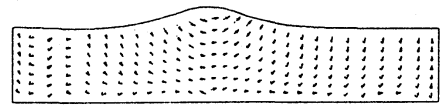
(a)



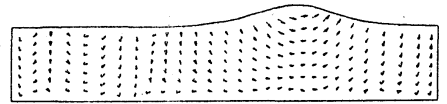
T = 6.00



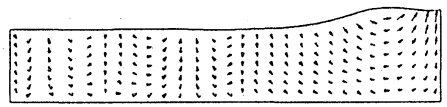
T = 9.00



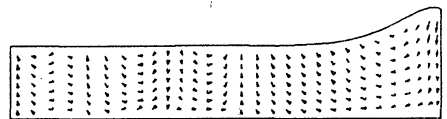
T = 12.00



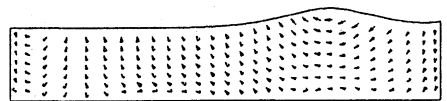
T = 15.00



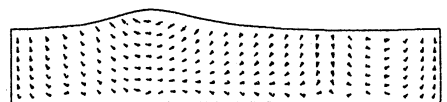
T = 18.00



T = 21.00



T = 24.00



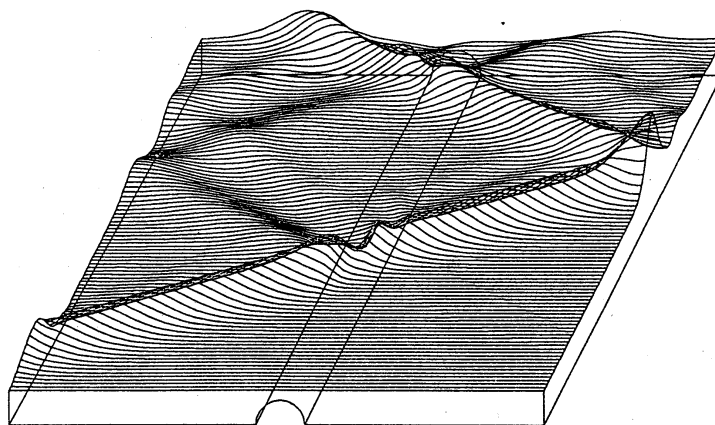
T = 30.00

(b)

☒ 7: Inner velocity vectors in solitary wave propagation

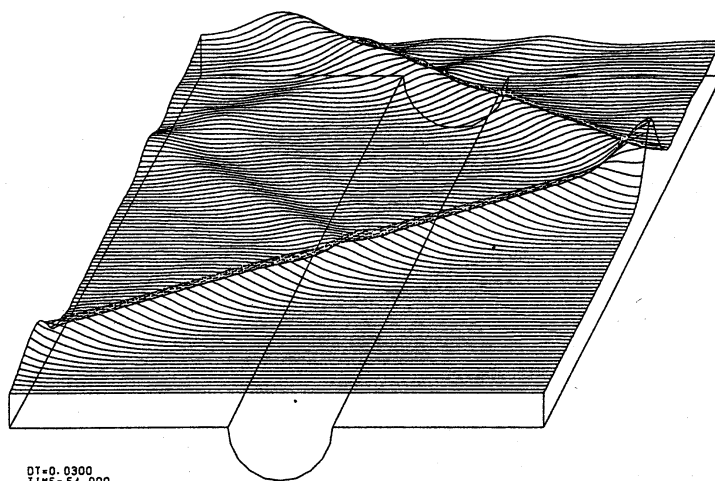
6.4 孤立波のマウンド越えおよびトレンチ越え

先に示したものと同様の矩形水槽の中心に半径 R のマウンドあるいはトレンチを設定し、その中での孤立波の運動を調べる。ここで、水槽の長さを無次元化長さ $L=30.0$ とし、要素分割は自由境界を 80 分割、壁境界を 40 分割の計 120 分割とする。そして、ピストン運動のパラメータは $X_0 = 0.5, \omega = 0.4, t_c = 6.0, T = 15.0, \Delta t = 0.03$ とした与える。図 8, 9 はそれぞれ半径 $R=0.7$ のマウンド, 半径 $R=1.5$ のトレンチの上を波高 $A/h=0.2$ の孤立波が乗り越えて進行していく過程を横軸と縦軸を無次元化座標そして奥行きを無次元化時間として自由表面の変化を示したものである。図 8, 9 からわかるように水底に設置された障害物によって進行する孤立波が散乱を受けて微小な進行波が発生し、水面が複雑な形状を呈するのがわかる。



DT=0.0300
TIME=54.000

☒ 8: Wave deformation over semicircular mound



DT=0.0300
TIME=54.000

☒ 9: Wave deformation over semicircular trench

7 おわりに

本研究においてオイラー・ラグランジェ混合解法と境界要素法とを結合した数値計算手法を用いて、非線形性の強い水波の変形現象を数値シミュレーションした。数値計算スキームとして、一定要素による離散化と単純オイラー時間積分スキームを採用し、また数値計算技法として解の平滑化技法、節点の再配置化技法そして volume のチェックによる適応型メッシュ生成法を適用して計算の安定化を実現した。本手法によって、楕円および円形の各容器内における水波の駆け上がり、と、種々の水底形状を有する水槽内での孤立波の運動を解析することができた。特に、水平加振を受ける円形容器流体のスロッシング問題において容器壁での圧力の正負を判定して節点の持つ境界条件を切り替える、いわゆる”free fall”条件を考慮することで、容器内水波の砕波現象を提示することができた。

自由表面を有する流れの問題は、この他にも興味深い問題がいろいろあるので、今後ともこれらの問題に対し境界要素法を用いた数値計算を続けていきたい。

参考文献

- [1] Okamoto, T. and Kawahara, M., *Large amplitude sloshing analysis in a multi-sloped wall boundary container by finite element method*, Proc.Int.Symp.CFD.Nagoya, (1989), pp.977-982
- [2] Longet-Higgins, M.S. and Cokelet, E.D., *The deformation of steep surface waves on water, I. A numerical method of computation*, Proc.R. Lond.A. Vol.350, (1976), pp.1-26
- [3] Dold, J.W and D.H.Peregrine, *Steep unsteady water waves - An efficient computational scheme*, Proc.19th.Coastal.Engng.Conf,Houston,Texas, Vol.1, (1984), pp.955-967
- [4] Sugino, R and N.Tosaka, *Solution procedure for nonlinear free surface problems by boundary element approach*, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.38, University of Tokyo Press, (1989), pp.53-59
- [5] 登坂宣好, 杉野隆三郎, 川端久善, 完全流体における自由表面問題の境界要素解析, 数理解析研究所講究録 724, 京都大学数理解析研究所, (1990), pp.58-86
- [6] R.Sugino and N.Tosaka, *Large amplitude sloshing analysis in a container with multi-sloped wall by the boundary element method*, Advances in Boundary Elements Methods in Japan and USA (Eds.M.Tanaka, C.A.Brebbia and R.Shaw) .Computational Mechanics Publications.Topics in Engineering, Vol.7, (1990), pp.307-316
- [7] Sugino, R and N.Tosaka, *Boundary element analysis of nonlinear water wave problems*, Proceedings of the FORTH PACIFIC CONGRESS ON MARINE SCIENCE AND TECHNOLOGY, Vol.II, (1990), pp.309-316