数理解析研究所講究録
745巻 1991年 129-143

On Darcy's law of flow of fluids through porous media

白田 平
Taira SHIROTA
(北大. O.B.)

1. 表題の flow of homogeneous fluids は Darcy's law

$$v = -k_0/\mu \cdot \nabla(\bar{P} + g\rho x_3)$$

に従って記述される. 即ち流速は圧力勾配に平行であると考えられている. こゝで $\bar{P}, \rho, \mu, g, k_0$ は夫々流体の pressure, density, viscousity, the gravity acceleration, the physical permeability depending only on the porous media である.

このとき,

(1) $$v = -k_0 g/\mu/\rho \cdot \nabla\left(\frac{\bar{P}}{g\rho} + x_3\right) \equiv -k\nabla(P + x_3),$$

$\phi \equiv P + x_3$: piezometric head (開いたピエゾ圧力管中の水面の高さ即ち porous media

中の水の持つポテンシャルを示す量），

k：permeability（透水係数），

$\nabla\phi$：動水勾配と呼ばれる無次元量．

こゝで流体は Incompressible liquids と考え[1]

次の自由境界値問題を設定する：

(2)
$$
\begin{aligned}
&g_t + v_1 g_{x_1} + v_2 g_{x_2} - v_3 = 0, \\
&\phi = g && \text{on } x_3 = g(t, x'), \\
&(v, n) = 0 && \text{on } x_3 = -b(x'), \\
&\Delta\phi = 0 && \text{in } \{-b(x') \leq x_3 \leq g(t, x')\}, \\
&-b(x') < g(t, x') < h_1, \\
&g(0, x') = g_0(x').
\end{aligned}
$$

こゝで，$x' = (x_1, x_2)$．初期値 $g_0(x')$，porous media の基底 $x_3 = -b(x')$，その上面 $x_3 = h_1$ は given．$x_3 = g(t, x')$ は自由水面，$x_3 = -b(x')$ は impermeable boundary である．(2.1) は，自由境界は流れに沿うこと，(2.2) はその上で P は定数（特にそこで $P = 0$ としても一般性を失なわない），(2.3) は an experimental law on the base of fluid，(2.4) は equation of continuity：$\operatorname{div} v = 0$，より従う（勿論 (1) は rotation free を意味する．）

結果的に(1)は非圧縮性 N. S. の運動方程式

$$\rho \frac{Dv}{Dt} - \mu \Delta v = -\nabla(\bar{p} + g\rho x_3)$$

で，左辺を $(\mu/k_0)v$ におきかへたことになっている．以上数学として(1),(2)を取り扱う事は Dam の自由境界値問題[2]以外には殆んど見当らないので一応の説明をした。一般に(1)は macroscopic statistical law で，∞に近い個々の porous media 中の gaps を通る流れの相対的に microscopic な N. S. 方程式より何等かの数学的手段により(1)を導くことは試み[3]がないわけではないが，極めて困難な様子である．又非定常のときは通常(2,4)の代りに，連続の方程式を，compressible liquids の場合の様に考へ，変型して

(3) $\quad s\dfrac{\partial\phi}{\partial t} = \Delta\phi \qquad$ (s : Yield coefficient)

とする様子だが，この導出には種々の近似を必要とし必らずしも分りよいものではない．こゝでは左辺を0と近似したものとも考えている．(2,4)より上式を用いた方が数学的には取り扱い易いであろうとも思われる．[2]

さて無次元化して(1),(2)を次の型におきかえる:

$$
(4)\quad
\begin{cases}
g_t - \partial_{x'}\phi\cdot\partial_{x'}g + \partial_{x_3}\phi = 0 & \\
\phi = g & \text{on } x_3 = g(t,x'), \\
\dfrac{\partial\phi}{\partial n} = 0 & \text{on } x_3 = -b(x'), \\
\Delta\phi = 0 & \text{in } \{-b(x') \le x_3 \le g(t,x')\}, \\
-b(x') < g(t,x') < h_1, & \\
g(0,x') = g_0(x'). &
\end{cases}
$$

以後応用上でも最重要な $b(x')=h>0$ なときを主に論じ,かつ空間次元は $n=2,3$ とするが $n=3$ の場合の記述とする. $b(x')$ が一般なときは §3 でふれる.

2. 記述の都合上, Beale の変換[4][5]を用って固定境界値問題に変型し,そこで定理を述べることにする. $g(t,x')$ は小な値を持つものと考へ又 $h=1$ とし,

$$\xi = (\xi_1, \xi_2) \in R^2,$$

$$\tilde{g}(t,x) = \mathcal{F}^{-1}(e^{|\xi|x_3}\hat{g}(t,\xi)),$$

$$\theta \quad = (x_1, x_2, \tilde{g} + x_3(1+\tilde{g})) = y \ (\text{初めの座標})$$

とすれば, $\theta_3(t,x',0) = g(t,x')$, $\theta_3(t,x',-1) = -1$.

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^{-1} = (\zeta_{\ell,i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}.$$

$$a_i = J^{-1}(-\hat{g}_{x_i}(1+x_3)) \quad (i=1,2), \quad a_3 = J^{-1},$$

$$J = \hat{g}_{x_3}(1+x_3) + \hat{g} + 1 \neq 0.$$

$$(\zeta_{\ell,i}\,\zeta_{k,i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_1^2+a_2^2+a_3^2 \end{pmatrix}.$$

このとき,

$$J\,\Delta_y \phi = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(J\,\zeta_{\ell,i}\,\zeta_{k,i}\,\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}\right) \equiv \Delta_x \phi - F_1,$$

$$g_t - g_{y'}\phi_{y'} + \phi_{y_3} = g_t + J^{-1}\{(1+|\nabla\hat{g}|^2)\phi_{x_3} - g_{x'}\phi_{x'}\}$$

$$\equiv g_t + \phi_{x_3} - F_2 \quad \text{on } \Gamma_0 = \{x_3 = 0\},$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n_y} = \frac{\partial\phi}{\partial n_x} + \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\{(J-1)J^{-1}\} = \frac{\partial\phi}{\partial x_3}(2 - J^{-1}) \quad \text{on } \Gamma_B = \{x_3 = -1\}.$$

依て (4) は次に帰着される: $\Omega \equiv \{-1 \le x_3 \le 0\}$ として

(5)
$$\begin{aligned} g_t + \phi_{x_3} &= F_2(\hat{g}, \phi), \quad g = \phi && \text{on } \Gamma_0, \\ \phi_{x_3} &= 0 && \text{on } \Gamma_B, \\ \Delta\phi &= F_1(\hat{g}, \phi) && \text{in } \Omega, \\ g(0, x') &= g_0(x'). \end{aligned}$$

以下 $D = (\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)$, $\partial = (\partial x_1, \partial x_2)$ とする.

このとき，$F_1(\xi,\phi)$ は $D\phi, D^2\phi$ について1次，$\xi, D\xi, D^2\xi, D\phi, D^2\phi$ について2次以上 但し $\xi\cdot D\phi$ は $\xi\partial_{x_3}\phi$ のみ又 $D\xi\cdot D^2\phi$ も含まない。 $F_2(\xi,\phi)$ も $D\phi$ について1次，$\xi, D\xi, D\phi$ について2次以上 但し $\xi\cdot D\phi$ は $\xi\cdot\partial_{x_3}\phi$ のみを含む．

さて $\{\xi,\phi\}$ を与えられたものとし，次の linearized problem を考える：

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
h_t + \psi_{x_3} &= F_2(\xi,\phi), \quad h=\psi && \text{on } \Gamma_0,\\
\psi_{x_3} &= 0 && \text{on } \Gamma_B,\\
\Delta\psi &= F_1(\xi,\phi) && \text{in } \Omega,\\
h(0,x') &= g_0(x').
\end{aligned}
$$

この解 $\{h,\psi\}$ は次の様に解ける：
先づ Dirichlet-Neumann 問題

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
\Delta\psi_2 &= F_1(\xi,\phi) && \text{in } \Omega,\\
\psi_2 &= 0 && \text{on } \Gamma_0,\\
\psi_{2,x_3} &= 0 && \text{on } \Gamma_B.
\end{aligned}
$$

の解 ψ_2 を見出し，$\psi-\psi_2=\psi_1$ とし

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
&\Delta\psi_1 = 0 && \text{in } \Omega,\\
&\psi_1 = h, \quad h_t + \psi_{1,x_3} = -\psi_{2,x_3} + F_2 \equiv F_3 && \text{on } \Gamma_0,\\
&\psi_{1,x_3} = 0 && \text{on } \Gamma_B,\\
&h(0,x') = g_0(x').
\end{aligned}
$$

さて(8)より

$$\widehat{\psi_{1,\ x_3}|_{\Gamma_0}}(t,\xi) = \frac{1-e^{-2|\xi|}}{1+e^{-2|\xi|}}|\xi|\,\hat{h}(t,\xi) \equiv \Lambda_1 \hat{h},$$

$$h_t + \Lambda_1(\partial)h = F_3$$

の解は

$$h(t,x') = \mathcal{F}^{-1}(e^{-t\Lambda_1(\xi)}\hat{g}_0(\xi)) + \mathcal{F}^{-1}\left(\int_0^t e^{-(t-s)\Lambda_1(\xi)}\hat{F}_3(s,\xi)\,ds\right)$$

で与えられる.

次に解空間を設定する: $m \geq 5$ とし

(9)
$$\begin{aligned} &g \in L^\infty([0,\infty),\ H^{m+\frac{1}{2}}(R^2)),\\ &g_t,\ g_{x'} \in L^2([0,\infty),\ H^{m+\frac{1}{2}}(R^2)),\\ &\phi \in L^\infty([0,\infty),\ H^{m+1}(\Omega)),\\ &\phi_t,\ \phi_x \in L^2([0,\infty),\ H^{m+1}(\Omega)), \end{aligned}$$

及び対応する norms $\leq E$,

$$\|g_0\|_{H^{m+1}(\Gamma_0)} + \|g_0\|_{L^1(\Gamma_0)} = E_0,$$

(10)
$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha g\|_{L^2(\Gamma_0)}(t) &\leq E(1+t)^{-\frac{1+|\alpha|}{2}} && \text{if } |\alpha| \leq \tfrac{3}{2},\\ &\leq E(1+t)^{-\frac{3}{2}} && \text{if } |\alpha| = 2\sim 3.5,\\ \|\partial_t g\|_{L^2(\Gamma_0)}(t) &\leq E(1+t)^{-1},\\ \|\phi\|_{L^2(\Omega)}(t) &\leq E(1+t)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

及び
$$\left.\begin{aligned} &\|D^\alpha \phi\|_{L^2(\Omega)}(t)\\ &\|\partial_t \phi\|_{L^2(\Omega)}(t) \end{aligned}\right\} \leq E(1+t)^{-1}. \qquad \text{if } |\alpha| = 1\sim 4.$$

このとき,

定理, 1. (6) の解 $\{h, \psi\}$ は, $E_0 \ll 1$ のとき $E \ll 1$ について同じ評価 (9), (10) を持つ, かつ Lower order space で $\{g, \phi\} \to \{h, \psi\}$ は contraction map. 従って (5) が解け, その解 $\{g, \phi\}$ も (9), (10) を持つ. 物理空間にもどせば, (4) の解が同様な評価を持つ様に得られる.

定理, 2. $n=2$ のときは, $m \geq 6$ とし (10) を

$$
(10')\quad
\begin{aligned}
\|\partial^\alpha g\|_{L^2(\Gamma_0)}(t) &\leq E(1+t)^{-(\frac{1}{4}+\frac{|\alpha|}{2})} && \text{if } |\alpha| \leq 2,\\
&\leq E(1+t)^{-\frac{3}{2}} && \text{if } |\alpha| = 2.5\sim 3,\\
&\leq E(1+t)^{-\frac{5}{4}} && \text{if } |\alpha| = 3.5,\\
\|\partial_t g\|_{L^2(\Gamma_0)}(t) &\leq E(1+t)^{-\frac{3}{4}}, &&\\
\|D^\alpha \phi\|_{L^2(\Omega)}(t) &\leq E(1+t)^{-\frac{1}{4}} && \text{if } |\alpha| = 0,\\
&\leq E(1+t)^{-\frac{3}{4}} && \text{if } |\alpha| = 1,\\
&\leq E(1+t)^{-\frac{5}{4}} && \text{if } |\alpha| = 2\sim 4,\\
\|\partial_t \phi\|_{L^2(\Omega)}(t) &\leq E(1+t)^{-\frac{3}{4}}. &&
\end{aligned}
$$

とかえて, 定理 1 と全く同様の命題が成立する.

定理, 3. $n = 2, 3$ について上の定理の仮定の下で, $x' g_0(x') \in L^1(\Gamma_0)$ ならば

$$g(t,x') = \int_{\Gamma_0} g_0(y)\,dy \cdot \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-t\lambda_1(\xi)}\chi(|\xi|<1)\right)(t,x') + o\left(t^{-\frac{n-1}{2}}\right)$$

が x' について一様に成立する.

従って例えば $\int_{\Gamma_0} g_0(x')\,dx' > 0$ のとき, 定理3の仮定の下で, $\forall k \quad \exists t_0$, $t>t_0$, $|x'|\le k$ で

$$g(t,x') \ge c(t) > 0$$

となり, porous media 中 初期に増水しており,かつ $g_0(x')$ が原点に対し左右対称な $n=2$ の場合 $g_0(0)<0$ ならば,

$$\exists t_0 \qquad g(t_0,0)\ge 0,\ (\partial_t g)(t_0,0)>0 \quad \text{従って}$$

$$-\phi_{x_3}(t_0,0,g(t_0,0))>0$$

となり得る. 初めてこの様になる t_0 をとり, porous media に原点の近くで平衡水面 ($x_3=0$) の近くまで井戸を掘れば, ある物理的仮定の下で quick sand に近い状況に接するであろう.

3. 以下 定理の証明の方針を示す. 定理3は(8)の下で述べた基本解を用いて直接示すことが出来るので定理1についてのみ考えることにし基本的な不等式を主に述べることとする.

$\{g,\ \phi\}$ は (9), (10) を充すとする。

補題 1. F_1 及び F_2 の函数型の extension $\widehat{F_2}$ 及び $D'\widehat{F_2}$ を F と記す。このとき

i) $F \in L^\infty([0,\infty),\ H^{m-1}(\Omega)) \cap L^2([0,\infty),\ H^m(\Omega))$,

$\frac{\partial F}{\partial t} \in L^2([0,\infty),\ H^{m-1}(\Omega))$

かつ対応する norms $\leq CE^2$.

ii) $\|D^\alpha F\|_{L^2(\Omega)}(t),\ \|D^\alpha F\|_{L^1(\Omega)}(t) \leq CE^2(1+t)^{-\frac{3}{2}}$

for $|\alpha| \leq 2$.

補題 2. (17) より

$$\widehat{\psi_{2,\,x_3}(\Gamma_0)}(t,\xi) = (1+e^{-2|\xi|})^{-1}\int_{-1}^{0}(e^{-|\xi|(2+y)} + e^{|\xi|y}) \times$$

$$\times\ \widehat{F_1}(t,\xi,y)\,dy$$

と表現され従って

$$\|\psi_{2,\,x_3}(t,\xi,0)\|_{L^\infty(|\xi|<1)} \leq C\|F_1\|_{L^1(\Omega)},$$

かつ $\widehat{F_3}(t,\xi) = 0$ if $\xi = 0$.

この補題は F_3 が初期 data と同様な性格を持っている事を示している。ここで C はすべて E や E_0 に無関係な定数である。この証明は (17) の Green 函数を, $F_1(t,\cdot) \in L^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, $\frac{\partial \psi_2}{\partial x_3}(t,\cdot) \in L^2(\Omega)$ に注意しながら, 求めればよい。

さて(8)の下の式より Beale-西田と同様，h の decay order，次にその Ω への拡張 $\tilde{h}$ のそれを求める．これらの評価式では(10)の E の代りに $C_1E_0+C_2E^2$ を用いねばならぬ．ψ の decay order を求めるために，主として，次の Dirichlet-Neumann problem の評価を用いる：

$$(11)\quad \begin{aligned} &\|\Delta\psi\|_{H^0(\Omega)}+\|\psi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}\geq C\|\psi\|_{H^1(\Omega)},\\ &\|\Delta\psi\|_{H^r(\Omega)}+\|\psi\|_{H^{r+1+\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}\geq C\|\psi\|_{H^{r+2}(\Omega)}\quad (r\geq 0)\\ &\qquad\qquad \text{if } \psi_{x_3}=0 \text{ on } \Gamma_B. \end{aligned}$$

同時に Neumann-Neumann problem の評価も有用である：$(r\geq 0)$

$$(12)\quad \|\Delta\psi\|_{H^r(\Omega)}+\|\psi_{x_3}\|_{H^{r+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}+\|\nabla\psi\|_{H^0(\Omega)}\geq C\|\nabla\psi\|_{H^{r+1}(\Omega)}.$$

$\{\tilde{h},\psi\}$ の decay order を用いて Energy 評価が得られる：

$$(13)\quad \|h\|^2_{H^0(\Gamma_0)}(t)+\int_0^t\|\nabla\psi\|^2_{H^0(\Omega)}d\tau \leq \int_0^t\{(F_2,h)_{\Gamma_0}-(F_1,\psi)_\Omega\}d\tau,$$

$$(14)\quad \int_0^t\|h_t\|^2_{H^0(\Gamma_0)}d\tau+\int_0^t\|\psi_{x_3}\|^2_{H^0(\Gamma_0)}d\tau+\|\nabla\psi\|^2_{H^0(\Omega)}(t) \leq \|\nabla\psi\|^2_{H^0(\Omega)}(0)+\int_0^t\{\|F_2\|^2_{H^0(\Gamma_0)}-(F_1,\psi_t)_\Omega\}d\tau$$

及び上式で h,ψ を $\partial^\alpha h,\partial^\alpha\psi$ におきかえて得られる式．

但し $|\alpha|\le m+\frac{1}{2}$ までとし，$|\alpha|=m+\frac{1}{2}$ では内積について $|\partial|^{\frac{1}{2}}$ を適当に振り替える必要がある．これより $\{h,\varphi\}$ についての $L^\infty([0,\infty),H)$ 及び $L^2([0,\infty),H)$ に関する評価 B_i を

$$B_i^2 \le c_j B_j (C_1E_0 + C_2E^2) + C_i(C_1E_0 + C_2E^2)^2$$

の型で得る．これから E_0, E を定めることが出来る．

注意 1．(13) より分る様に $\{h,\varphi\}$ の decay order の評価がないと，この式は使えない．Beale の様に Velocity $\nabla\varphi$ を主に考えたかったが，境界条件が不足している．これが decay 評価と Energy 評価を同時に考えねばならなかった理由である．

本稿の目的は一般化を計るのでなく最も単純で重要な場合出来るだけ詳しい結果を得て解の挙動を研究する基礎を得るにある．特に定理 3 の decay order と定理 1, 2 における ものとの差に注意したい．

注意 2．今迄より一般な底面 $x_3=-b(x)$ についても $n\ge 3$ のときは定理 1 の拡張として

次の命題を得る（特に $n=3$ とし），

$$m \geq 6, \quad |\alpha| \leq m+1,$$

$$b(x') = h + b_0(x') \qquad |\partial^\alpha b_0(x')| \longrightarrow 0 \quad \text{as } |x'| \to \infty,$$

かつ　$-b(x') < 0$ とする．このとき (10) の代りに

$$
\begin{aligned}
\|\partial^\alpha g\|_{L^2(R^2)}(t) &\leq E(1+t)^{-\frac{1}{2}}(\log(1+t))^{\frac{1}{2}} && \text{if } \alpha = 0, \\
&\leq E(1+t)^{-1}(\log(1+t))^{\frac{1}{2}}, && \text{if } |\alpha| = 1 \sim 3, \\
&\leq E(1+t)^{-\frac{3}{4}}(\log(1+t))^{\frac{1}{2}} && \text{if } |\alpha| = 3.5,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(10'') \qquad \|\partial_t g\|_{L^2(R^2)}(t) &\leq E(1+t)^{-1}(\log(1+t))^{\frac{1}{2}}, \\
\|D^\alpha \phi\|_{L^2(\Omega)}(t) &\leq E(1+t)^{-\frac{1}{2}}(\log(1+t))^{\frac{1}{2}} && \text{if } |\alpha| = 0, \\
&\leq E(1+t)^{-\frac{3}{4}}(\log(1+t))^{\frac{1}{2}} && \text{if } |\alpha| = 1 \sim 4, \\
\|\partial_t \phi\|_{L^2(\Omega)}(t) &\leq E(1+t)^{-\frac{3}{4}}(\log(1+t))^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

とすれば，定理1と全く同様の主張が成立する．

証明は $\Lambda_1(\lambda)$ の抽象化 Λ を Lax-Milgram の補題を用いて行い，それが解析的半群の生成作用素となる事を示し，補題2. の代りに

$$F_3 \in H^0_{(0)}(R^2)$$ [4]

となること及びその評価を考える．ここでは (10'') を見ても分る様に $\partial^\alpha g$ の decay order は $|\alpha| = 1 \sim 3$ で不変でありそれを $|\alpha|$ と共に大きくすることなしに済ませる必要がある．このため (7) の green 函数

を求めず, abstract に理論を進める. 但し方程式

$$(\lambda + A)g = h$$

において, g の λ に関係した評価を h の他の, λ に関係した評価で押える様に工夫する(尚その後信州大でのシンポジュームでは前述 $H^0_{(0)}$ を用いずに L^p-評価 $(1<p<2)$ を利用したが, ここでは $H^0_{(0)}$ を用いて分りよくした).

$n=2$ の場合にも[4)]初期 data g_0 を

$$\|g_0\|_{H^{m+1}_{(0)}(R^1)} = E_0 \ll 1 \quad (m \geq 6)$$

とおれば, 上述と殆んど同様な主張をすることが出来るが, 例へば g_0 が compact support を持つとすれば, $\int g_0(x')dx' = 0$ でなければならず, 初期に増減水があるときは除外されている. 依て $n=2$ のときには上の主張は定理2の充分な拡張とは云えない.

又 (2.4) の代りに (3) を考え $s \to 0$ とする事は以上の様な観点からも大変興味あることと思う.

(1990. 12. 27.)

References

1). M. Muskat : The flow of homogeneous fluids through porous media, McGraw-Hill, (1937).

2). E. Benedetto and A. Friedman : Dam problem and related free boundary problems, Comm. in P. D. E. (1986)

3). P. Marcati and A. Milani : The one-dimensional Darcy's law as the limit of compressible Euler flow, J. Differen. Equation 84, (1990)

4). J. T. Beale : Large-time regularity of viscous surface waves, Arch. Ratio. Mech. Anal 84, (1984)

5). J. T. Beale and T. Nishida : Large-time behavior of viscous surface waves, Math. Studies 128 (1985).

尚 地下水工学，土質工学，水理学関係の大学生用書物にDarcy's lawの初等的直観的記述は数多くなされている。

(本文中の註の番号はReferencesのそれを指す)