数理解析研究所講究録
747巻 1991年 52-61

ファジィ・スケジューリング

龍谷大学 経営学部 多田 実 (Minoru Tada)
岡山大学 工学部 石井 博昭 (Hiroaki Ishii)

1. はじめに

これまで，我々はスケジューリング問題にファジィ理論の帰属度関数を導入することによって，いくつかのスケジューリング問題の一般化を行ってきた.

最初に我々は，納期をファジィとした問題を考えた[5]. 即ち，各仕事毎にその仕事の完了時間に対する意思決定者(=DM)の満足度を表す帰属度関数を導入し定式化を行った. これは，仕事の納期はその完了が少しなら遅れてもよいものや，絶対に遅れてはならないものなど様々な状況を考えられるので，より柔軟性のある納期の問題といえる.

次に我々は，処理時間をファジィとして取り扱った[2]. これは仕事を処理する機械がその調子や環境によって処理時間が変わってくることを考慮したものである.

今回，我々は先行関係をファジィとし，一機械最大納期ず

れ最小化問題において，あいまいな先行関係の制約条件を考慮した場合のスケジューリング問題を考える．

2．通常先行関係問題

まず準備として，ファジィでない通常の先行制約をもつ一機械最大納期ずれ最小化問題を考えるが，簡単のため各仕事 J_j（$j=1, \cdots, n$）の処理時間 p_j を単位時間（$p_j=1$）とする．即ち＜Problem 1｜prec, $p_j=1$｜L_{max}＞を考える．ここで最大納期ずれ L_{max} は各仕事の完了時間 c_j とその納期 d_j との差の最大値として定義される．

$$L_{max}=\max_j \{c_j-d_j\} \qquad (1)$$

また，先行制約（precedence constraints）$J_i < J_j$ は，’仕事 J_j の処理は J_i の処理が完了するまで開始できない’ことを表す．通常，この関係は図1に示すような先行関係グラフ（precedence graph）によって表現される．これはノードが仕事を，アークが先行制約を表す有効グラフで，各仕事 J_j の右側に書かれた数字はその仕事の納期を表す．

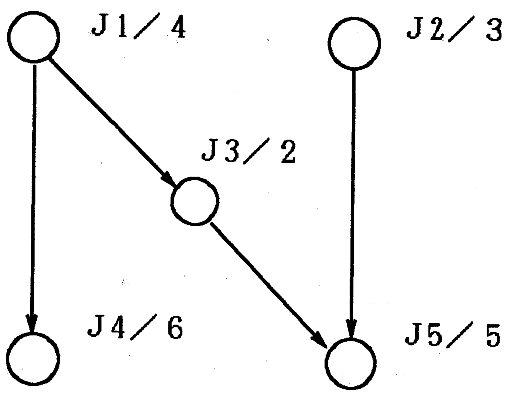

図1．　先行関係グラフの例

この問題 <Problem $1 \mid prec, p_j = 1 \mid L_{max}$> は，LawlerとMoore の方法［3］によって解けることが知られている．

－アルゴリズムⅠ（LawlerとMoore の方法）－

ステップ1．以下の（2）式で与えられる修正納期 d_j^* を計算する．

$$d_j^* = \min\{d_j,\ \min\{d_i : J_j < J_i\}\},\quad j=1,\cdots,n \tag{2}$$

ステップ2．与えられた先行関係を考慮しながら，修正納期の非減少順に仕事を並べる．

3．ファジィ先行関係をもつスケジューリング問題

3.1 ”あいまいな先行関係”とは

ここで取り扱う”ファジィ先行関係”（fuzzy precedence constraints）とは，2つの仕事間に先行関係がある（＝1），ない（＝0）の2種類のみの関係をもたせるのではなく，’先行制約の強さ（先行制約度）の違い’を考慮することである．即ち，先行関係として，必ずその処理順序を守らなければならない強い先行制約度をもつ関係のみを考えるのではなく，逆にその先行制約を必ずしも守らなくてよい（破ってもよい）弱い先行制約度をもつ関係をも考慮することによって，柔軟性のある先行関係をもつスケジューリング問題が定式化できる．

3.2 ファジィ先行関係の定式化

通常の先行関係では，対応する先行関係グラフが接続行列（ node-to-node incidence matrix）によって表現できる．接続行列とは，ノードJ_iとJ_j（$i \neq j$）との関係によって次のように第（i,j）成分γ_{ij}を定めるn行 n列の行列（γij）のことである［1］．

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 1 & ; \text{ J i から J j へのアークが存在するとき} \\ 0 & ; \text{ その他} \end{cases} \qquad (3)$$

例えば図1のグラフの接続行列は

$$(\gamma_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4)$$

となる．

[定義1] ”ファジィ先行関係 $J_i \lesssim J_j$” とは対応する接続行列 $(\gamma_{ij})'$ の第 (i, j) 成分が $\gamma_{ij}' = 1$，第 (j, i) 成分が $\gamma_{ji}' = \alpha$ $(0 \leqq \alpha < 1)$ となるような先行関係のことで，α は先行制約を破った（$J_j \rightarrow J_i$ の順に処理した）ときのDMの満足度を表す．//

図2は図1の先行関係グラフをもとにして作ったファジィ先行関係を示す接続行列 $(\gamma_{ij})'$ の例である．

$$(\gamma_{ij})' = \begin{pmatrix} - & - & 1 & 1 & - \\ - & - & - & - & 1 \\ 0.9 & - & - & - & 1 \\ 0 & - & - & - & - \\ - & 0.5 & 0.1 & - & - \end{pmatrix} \qquad (5)$$

図2．ファジィ先行関係の例

この例ならば，$J_1 \to J_3$ は弱い先行制約，$J_1 \to J_4$ や $J_3 \to J_5$ は強い先行制約になる．

3.3 ファジィ先行関係問題の定式化

通常の先行関係問題<Problem 1 | prec, $p_j = 1$ | $L\max$>での最適スケジュール（即ち，アルゴリズムⅠで得られたスケジュール）を π_{prec} と呼ぶことにする．また同じ問題で，先行制約がないときの最適スケジュールは，納期を非減少順に並べたものであることが知られており（EDDルール[4]），このスケジュールを π_{EDD} とする．

ファジィ先行関係問題<Problem 1 | fuzzy prec, $p_j = 1$ | $L\max$>では，弱い先行制約なら，むしろその制約を破ることによって，目的関数の値（$L\max$）を良く（小さく）することを考える．そこで次のような二目的スケジューリング問題を考える．

$$P: \quad L\max \to \min, \qquad \mu\min \to \max \tag{6}$$

ただし，$\mu\min$ は先行関係に関する満足度を表し，簡単のために納期 d_j は整数値を仮定する．

この問題を解くために，各スケジュール π における目的関数の値 $L\max^{\pi}$，$\mu\min^{\pi}$ をそれぞれ成分としてもつベクト

ル $\mathbb{v}=(L\max^{\pi},\ \mu\min^{\pi})$ を導入し，非劣スケジュールを定義する．

［定義2］ 2つのベクトル $\mathbb{v}^1=(v_1{}^1,\ v_2{}^1)$， $\mathbb{v}^2=(v_1{}^2,\ v_2{}^2)$ に対して記号 $\leq$ を

$$\mathbb{v}^1\leq\mathbb{v}^2 \quad \leftrightarrow \quad v_1{}^1\leqq v_1{}^2,\ v_2{}^1\geqq v_2{}^2,\ \mathbb{v}^1\neq\mathbb{v}^2 \tag{7}$$

と定義する。そして2つのスケジュール π_1，π_2 に対して $\mathbb{v}_{\pi 1}\leq\mathbb{v}_{\pi 2}$ であるとき，π_1 は π_2 に対して”優越する”と呼び，優越するスケジュールが他に存在しないとき，そのスケジュール π_1 を”非劣スケジュール”と呼ぶ．

［補題1］ 非劣スケジュールを求めるにはその成分として，

$$L\max^{\pi}{}_{EDD}\leqq L\max^{\pi}\leqq L\max^{\pi}{}_{prec},$$

$$\mu\min^{\pi}{}_{EDD}\leqq\mu\min^{\pi}\leqq\mu\min^{\pi}{}_{prec}$$

を満たす整数値のみを考えればよい。 //

3.4 問題Pの解法

上の補題で示した各成分の上限値と下限値を求めるためにアルゴリズムIとEDDルールを用いて π_{prec} と π_{EDD} を求

める．π_{prec}では先行制約条件は完全に満たされているので，先行制約を破ることによって，Lmaxの値を小さくすることを考える．従って，$L = Lmax^{\pi}prec$とおくと，非劣スケジュールの候補として$Lmax^{\pi}$の値が

$$L \rightarrow L-1 \rightarrow \cdot\cdot\cdot \rightarrow Lmax^{\pi}EDD$$

になるようなスケジュールを順に捜していけばよい．よって次のような仕事の入れ替え操作を行い，非劣スケジュールを求める．

－仕事の入れ替え－

現在の非劣スケジュールπにおいて$Lmax^{\pi}$を導く仕事がこのスケジュールでk番目に処理されているとすると，k番目と（k－1）番目の仕事の入れ替えを行い，入れ替え後のLmaxの値Lmax'を調べる．もし$Lmax' = Lmax^{\pi}-1$にならないときは，その入れ替えは行わずにk番目と（k－2）番目の仕事の入れ替えを行い，

$$Lmax' \leqq Lmax^{\pi}-1 \qquad (8)$$

になるかを調べる．もし（8）式が不成立なら，その入れ換えは行わずに（8）式が成立するまでk番目と（k－3），（k－4），・・・番目とで同様の操作を行う．

［定理１］仕事の入れ替え操作後の新たなスケジュールπ'は非劣スケジュールになる．

従って，$q = L\max^{\pi}\mathrm{prec} - L\max^{\pi}\mathrm{EDD}$とおくと高々$q+1$個の非劣スケジュールが求まる．

４．おわりに

ファジィ先行関係に関しては，上の解法を基に効率のよいアルゴリズムを作ることを現在検討している．また，一機械最大納期ずれ問題以外のスケジューリング問題での解析も残されている．

ファジィ処理時間問題では，その目的関数として Agreement Index（［２］参照）を用いているが，少しその取り扱いが複雑であるので，A.Index 以外の目的関数（例えば，ファジィ理論の可能性の概念など）による定式化を現在検討している．

最後に，これまで行ってきたスケジューリング問題におけるいくつかのファジィ化は，そのほとんどが従来の問題の一般化になるが，近似解法的なファジィの利用，即ち，ファジィを導入することによって，難しい（計算手間のかかる）問題が割と簡単に解けるようにすることも今後の課題である．

― 参考文献 ―

[1] 伊理, 古林, "ネットワーク理論", 日科技連

[2] 石井,益田, "ﾌｧｼﾞｨ処理時間をもつ ｽｹｼﾞｭｰﾘﾝｸﾞ問題", 日本OR学会秋季ｱﾌﾞｽﾄﾗｸﾄ集 (1988),74-75

[3] E.L.Lawler, J.M.Moore,"A functional equation and its application to resource allocation and scheduling problems", Manage.Sci.16(1969), 77-84

[4] W.E.Smith, "Various optimisers for single stage production", Nav.Res.Logist.Quart., 3, (1956), 59-66

[5] M.Tada, H.Ishii and T.Nishida, "Weighted Fuzzy Due Date Scheduling Problem", APORS '88 proceedings.