数理解析研究所講究録
747巻 1991年 13-24

探索ゲームについて

富山大学経済学部
菊田健作(Kensaku Kikuta)

1. はじめに

探索(Search)の理論は，第2次大戦中に対潜水艦索敵あるいは避敵の効果的方法の研究から始まった．その後，これが発展してORにおいて有用なモデルの一つとなっている．

Bellman[2]とSmith[12]は探索状況の一つのモデルとして，n個の箱の一つに入っている静止目標物を見つけるに至るまでの期待総費用を最小化する問題を扱った．箱には1からnと番号が付けられている．目標物はどの箱に入っているかわからないから，すべての箱を調査の対象とせねばならない．彼らは見逃し確率をも考慮にいれたのであるが，後に出てくるモデルとの比較のために，ここでは見逃し確率を考えずに述べよう．

t_i, $i = 1, . . . , n$：箱iを調べるのに要する費用，

p_i, $i = 1, . . . , n$：目標物が箱iにある事前確率，

とする．調べる順序は数1, . . . ,nの順列で表され，これが探索者の一つの政策である．期待総費用を最小にするような政策を求めよ．

この問題の答えは次のとおりである：$p_1/t_1, . . . ,p_n/t_n$の

うち最大なものの一つをp_r/t_rとせよ．まず，箱rを調べよ．もしなかったならば，事後確率を計算し，再びp_iで表せ．p_i/t_iを計算し直し，同じ操作を繰り返せ．

p_i/t_iは箱iを調べるときの，単位費用あたりの存在確率である．これの最大の箱を最初に調べよ，というのは，我々の常識的判断とも一致している．

2. Switching Cost を考慮したModel

Gluss[5]は上述のModelにSwitching Costを導入した．Modelを詳しく述べる．

0	1	2	・　・　・	n-1	n

図1

(i) 箱1,...,nのどれか一つに静止目標物が入っている．

(ii) $p_i, i=1,...,n$,は目標物が箱iにある事前確率である．

(iii) 探索者は箱0から出発する．

(iv) 見逃し確率は，どの箱についても0である．

(v) 探索費用はどの箱についてもc (≥ 0)である．

(vi) 箱iから箱jへのSwitching Costは $d|i-j|$ $(d>0)$である．

以上の条件のもとで，発見するまでの期待総費用を最小にするには，どのような順序で調べればよいか．

以後，$N=\{1,...,n\}$,MをN上の順列全体の集合とする．$\sigma \in M$とするとき，$\sigma=[\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(n)]$とも表すことにする．即ち，$\sigma(1),\sigma(2),...,\sigma(n)$の順に調べること

を表す．期待総費用を最小にするような政策（i.e.，調べる順序）を最適政策という．

Glussは二つの場合：(1) $p_1 \geqq p_2 \geqq \cdots \geqq p_n$と(2) $p_1 \leqq p_2 \leqq \cdots \leqq p_n$とを検討した．(1)の場合はtrivialであって，[1，. . . ，n]が最適政策である．(2)の場合，Glussは仮定

$$p_i = p_i\# = 2i/[n(n+1)],\ 1, \ldots, n,$$

をおいて，政策を二つの型に限定した．

$$r^*(i) = r+i-1\ (1 \leqq i \leqq n-r+1),\ = n+1-i\ (n-r+2 \leqq i \leqq n).$$

0	1		r-1	r	r+1		n-1	n

図2

$$u\#(i) = i\ \ (1 \leqq i \leqq u),\ = n-i+u+1\ \ (u+1 \leqq i \leqq n).$$

0	1		u-1	u	u+1		n-1	n

図3

ここに，r=1,...,n,またu=0,...,n-1である．最適政策は

$1^* = [1, \ldots, n]$ if $c/d \leqq 4/n$,

r^* if $4/n \leqq c/d \leqq 2(n-1)$, $r=[c(n+1)/(c+4d)+1]$,

([ ]はGaussの記号),

n^* if $c/d \geqq 2(n-1)$.

探索費用がSwitching Costに比して相対的に小さいならば，移動が少ない政策を選ぶべきであり，大きいならば，事前確率を重視すべきである．政策を限定せずに考えた場合

にもこれらが最適であるかどうかについては未解決である．Glussは厳密に最適な政策を見つけたとはいえない．

3. Hide and Seek Game with Traveling Cost

GlussによるModelのゲームヴァージョン(Kikuta [6])を考える．静止目標物に関する事前確率の代わりに，物を隠す人，あるいは隠れる人（以後，Player I）の存在を仮定して，彼の（純粋）戦略はNの元で表される．一方，探索者（以後，Player II）の（純粋）戦略は，Mの元である．戦略の組，(i, σ) $(i \varepsilon N, \sigma \varepsilon M)$に対し，$k = \sigma^{-1}(i)$として，Player Iを見つけるための費用は

$$f(i,\sigma)=d\{\sigma(1)+|\sigma(2)-\sigma(1)|+\cdots+|\sigma(k)-\sigma(k-1)|\}+kc.$$

(i,σ)に対し，Players I,IIへの利得をそれぞれ$f(i,\sigma)$，$-f(i,\sigma)$と定義すれば，二人ゼロ和ゲームを得る．これを$(f;N,M)$と表す．

$n=2$の場合，このゲームは行列

	[1,2]	[2,1]
1	c+d	3d+2c
2	2d+2c	2d+c

で表される．これは$c>0$ならば，saddle pointをもたない．$n\geqq 3$の場合も同様の状況を見ることができる．そこで，ゲー

ム(f;N,M)の混合拡大を考えて，それを記号(f;P,Q)で表す．P,Qの元を再び戦略という．一般性を失うことなく，d=1を仮定する．このとき，c=(調査費用)/(移動費用)である．

4. 最適戦略

b=c/(2+c)とおく．次のように，帰納的に確率ベクトルを定義する．

$$p^k = (1/[k-1+b])(b,(k-1)p^{k-1}),\ k = 2, \ldots, n, \text{ and } p^1 = (1).$$

c>0 ならば，p^nの成分はすべて正である．

$$vn = n + (n+1)c/2 = (n+b)/(1-b)$$

とおく．

命題1. (i) $\Sigma_{i=1}^{n}\ ip_i^n = vn/(1+c)$.

(ii) $p_1^n < p_2^n < \cdots < p_n^n$.

(iii) $(n-i)\ p_i^n = (n-i+1)\ p_{i+1}^n + bp_{i+1}^n$ for $i = 1, \ldots, n$.

任意の$\sigma \varepsilon$ Mに対し，$r\sigma \varepsilon$ Mを，$r\sigma(i)=\sigma(n+1-i)$, $i = 1, \ldots, n$,で定義する．$r\sigma = [\sigma(n), \sigma(n-1), \ldots, \sigma(1)]$である．一般に，$\sigma$は次のようであると仮定できる．

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(i1),$$
$$\sigma(i1) > \sigma(i1+1) > \cdots > \sigma(i2),$$
$$\sigma(i2) < \sigma(i2+1) < \cdots < \sigma(i3),$$

$$\sigma(i2h\text{-}1) > \sigma(i2h\text{-}1+1) > \cdots > \sigma(n).$$

このとき，戦略σはh-peakedであるという．$\sigma(n+1)=\sigma(0)=0$としておく．戦略σが1-peakedであるとき，戦略$q(\sigma)$を，確率1/2でσと$r\sigma$とを選ぶような戦略であると定義する．

定理2． ゲーム$(f;P,Q)$の値はvnである．p^nはPlayer Iの唯一の最適戦略である．$\{q(\sigma):\sigma$が1-peaked$\}$はPlayer IIの最適戦略の集合である．

次の図は$n=5$の場合の1-peakedな戦略σの例である．$\sigma=[2,3,5,4,1]$.

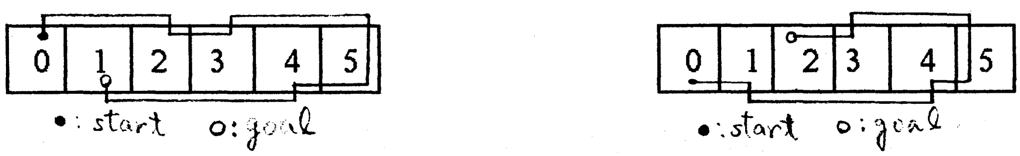

図4　σ（左）と$r\sigma$

下の表からわかるように，$f(i,\sigma)+f(i,r\sigma)=2(5+3c)$, $i=1,2,3,4,5,$である．また，$f(p^5,\sigma)=5+3c$である．ゲームの値は$5+3c$である．

i	f(i, σ)	f(i, rσ)
1	9+5c	1+c
2	2+c	8+5c
3	3+2c	7+4c
4	6+4c	4+2c
5	5+3c	5+3c

次の図は$n = 5$の場合の2-peakedな戦略σの例である.

$\sigma = [3, 4, 2, 1, 5]$.

図5　σ（左）とrσ

i	f(i, σ)	f(i, rσ)
1	7+4c	9+2c
2	6+3c	10+3c
3	3+c	13+5c
4	4+2c	12+4c
5	11+5c	5+c

$f(i, \sigma) + f(i, r\sigma) = 2(8+3c)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$,であることがわかる. また, $f(p^5, \sigma) > 5+3c$である.

補題3. σをPlayer Iの1-peakedな戦略とする. Player I

の任意の戦略$p \in P$に対し，

$$f(p, q(\sigma)) = vn.$$

補題4. Player I の任意の1-peakedな戦略σに対し，

$$f(p^n, \sigma) = vn.$$

補題5.

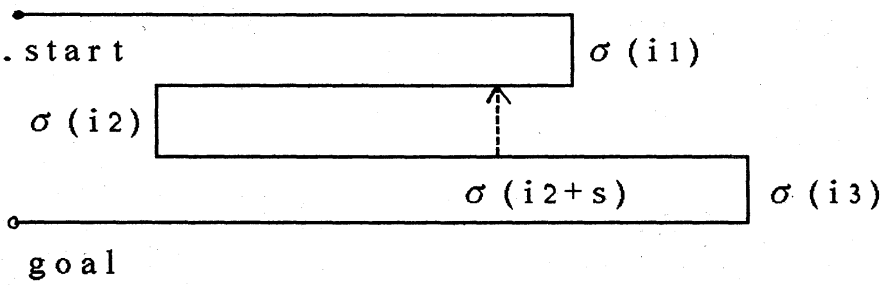

図6.

系1.

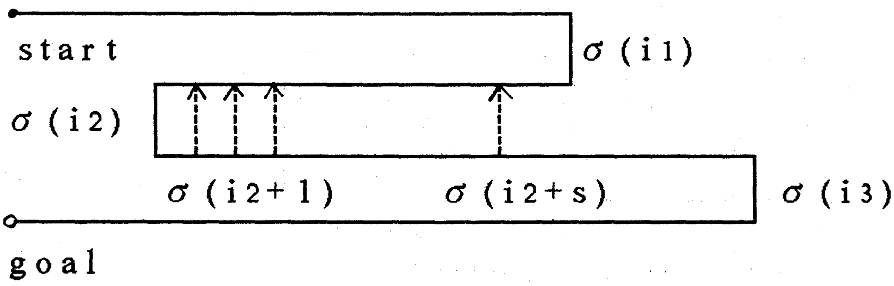

図7.

補題6.

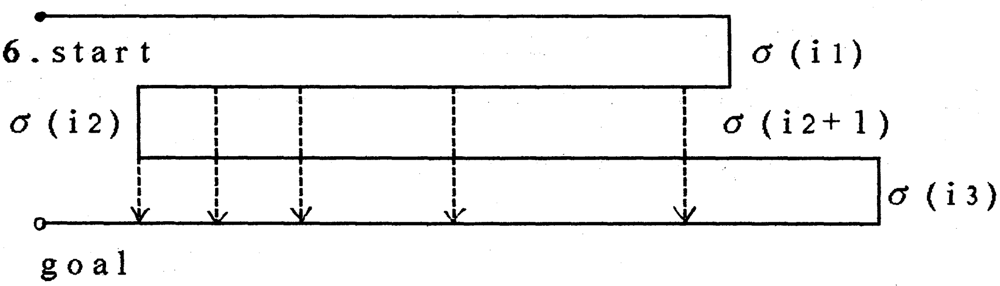

図8.

補題7. Anを$n \times n$行列で第(i,j)成分が$f(j,(n-i)\#)$, $i = 1,...,n-1$; $j = 1,...,n$, さらに第(n,j)成分が$1+c$, $j = 1,...,n$, であるとする. Anの階数はnである.

補題3から補題6までが, P^nと$q(\sigma)$がそれぞれPlayer IとPlayer IIの最適戦略であることを示す. ここに, σは1-peaked戦略である. さらに, 補題7はP^nがPlayer Iの唯一の最適戦略であることを示す.

5. 一般化について

第3節で扱ったモデルの一般化の方向として,

(i)箱iと箱i+1の間の距離を$d(i,i+1)$とする場合,

(ii)調査費用を箱の番号に依存させてc_iとする場合

等, 考えることができる. 例えば, 距離$d(\cdot,\cdot)$が条件

$$d(i,j) + d(j,k) = d(i,k) \text{ for all } i, j, k : 1 \leqq i < j < k \leqq n,$$

$$d(i,j) = d(j,i) \text{ for all } i, j \text{ such that } 1 \leqq i,j \leqq n, i \neq j,$$

$$d(i,j) > 0 \text{ for all } i, j \text{ such that } 1 \leqq i,j \leqq n, i \neq j,$$

$$d(i,i) = 0 \text{ for all } i = 1, . . . ,n.$$

をみたし, かつ調査費用が$c_1,...,c_n$で与えられたとすると, 定理2と同様の結論が得られることが予想される(Kikuta [7]). 実際, 命題1(ii)は$p_1{}^n/c_1 < \cdots < p_n{}^n/c_n$と一般化される. また, Player Iの最適戦略は

$$p^k = (1/[1+b^{k-1}])(b^{k-1}, p^{k-1}), k = 2, \ldots, n, \text{and} p^1 = (1),$$

と一般化される．ここに$b^k = cn\text{-}k/[2d(n-k,n)]+s^k, s^k= c(n-k+1)+ \ldots +c(n)$である．$p^k$の帰納的な定義に着目してゲームを箱の個数に関して帰納的に定義することが考えられる．すなわちPlayer IIが箱n-kにおり，以後箱n-k+1,...,nを調べるような部分ゲームを考える．このゲームの値をv^kとする．次のような関係式が成立する．

$$v^n = d(0,1) + c1 + v^{k-1}/[1+b^{k-1}].$$

条件$d(i,j) + d(j,k) = d(i,k)$を三角不等式$d(i,j) + d(j,k) \geqq d(i,k)$にすると，かなり複雑になり，$n = 3$のときでさえ場合分けが必要で結構大変である．

ゲームでない場合（探索者の費用最小化問題）はLossner/Wegener[8]において，見逃し確率をも考慮した，より一般的なモデルが分析されている．

6. Remarks

(i) Player Iの唯一の最適戦略p^nを，Glussの与えた事前確率p#とを比較してみよう．ともに次の条件をみたす

(a) $p_i > 0$ for all i (p^nについてはc > 0のときのみ)

(b) $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$.

さらに，任意の$q \varepsilon Q$および任意の1-peaked戦略σに対し，$f(p^n,q) \geqq f(p^n,q(\sigma)) = vn = f(p\#,q(\sigma))$．Glussが考えた政策（2節，(2)の場合）は，1-peakedであることを注意しておく．

(ii) $n \to \infty$の場合，np_i^nの挙動を調べることは興味がある．

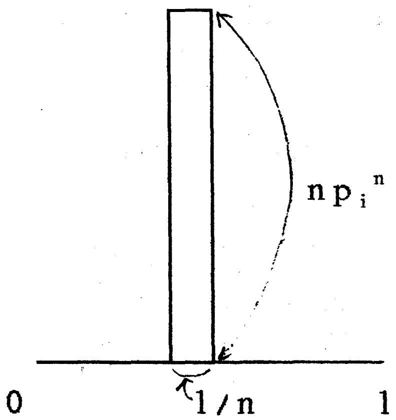

図9．

$b(1-t)^{b-1}$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ に収束する可能性がある．

(iii) Ruckle [10]にはグラフ上におけるゲーム等が多数紹介されている．ただし，調査費用が考慮されていない．また，Nakai[9], Sakaguchi[11] は日本語による探索理論全般のサーヴェイである．

7． 参考文献

[1]Ahlswede,R.andWegener,I.:*Search Problems.*John Wiley & Sons,1987.

[2] Bellman,R.:*Dynamic Programming.*Princeton Univ.

Press,1957.

[3] Fristedt,B.:Hide and Seek in a Subset of the Real Line. *International J. Game Theory* **6** (1977),135-165.

[4] Gal, S.:*Search Games.* Math. in Sci. and Eng.,**149**, Academic Press, 1980

[5] Gluss, B.: Approximately Optimal One- Dimensional Search Policies in Which Search Costs Vary through Time. *Nav. Res. Log. Quart.,***8** (1961), 277-283.

[6] Kikuta, K.: A Hide and Seek Game with Traveling Cost. *JORSJ* **33**(1990), 168-187.

[7] ----- : An Example of a One-Dimensional Search Game. WP.120,Toyama Univ.,Fac.of Econ.,June 1990.

[8] Lossner, U. and Wegener, I.: Discrete Sequential Search with Positive Switch Cost. *Math. Oper. Res.* **7** (1982), 426-440.

[9] Nakai, T.:*Tansaku Riron Tenbo*(In Japanese) mimeo. 1986.

[10] Ruckle, W.:*Geometric Games and Their Applications.* Pitman. 1983.

[11] Sakaguchi, M.: Tansaku Riron.(In Japanese) BASIC Sugaku **14** (1981), 61-67.

[12] Smith,W.:Various Optimizers for Single-Stage Production. *Nav. Res. Log. Quart.* **3** (1956), 62-63.