数理解析研究所講究録
第747巻 1991年 1-12

同時に複数の割当が可能な Sequential Stochastic Assignment Problem について

神戸大学教養部　中井　達
姫路工業大学理学部　寺岡　義伸

§1. Introduction

sequential stochastic assignment problem と言われる多段決定問題は1972年に Derman, Lieberman and Ross らによって提示されて以来いろいろな条件のもとでの問題が解決されて来ている。この問題は、具体的に述べれば次のように表す事が出来る。すなわち n 期の決定問題で、逐次に job が n 個 decision-maker の所へ出現する。一方 decision-maker は n 人の人間を雇用し、各 job に n 人の内の1人のみを割り当てる事が出来る。また、これらの n 人の能力は、それぞれ異なりあらかじめ既知であると考える。最初に考えられた問題では、各 job が独立かつ同一の確率分布に従うあらかじめ既知の確率変数の実現値として考えられ、逐次に job が出現する度にその実現値を観測し、その観測値をもとに決定を行うものであった。また decision-maker の持つ n 人の雇用者の能力はそれぞれ数値化されており正定数 $p_1,\dots,p_m$ であるとし、$p_1,\dots,p_m$ はあらかじめ与えられ、$p_1 \geqq \dots \geqq p_m$ ($p_i \geqq 0, i = 1,\dots,m$) と一般性を失う事なく仮定する。このとき decision-maker は ability a の人間が大きさ x の job に assign されたとき reward $u(a,x) = a \cdot x$ を得られるとき total expected reward を最大にするにはどの様にすれば良いかという事が問題となる。

この問題に対する基本的な解の構造は decision-maker が n 人の人間を assign しなければならないとき、$n-1$ 個の threshold value (しきい値) $a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots\ldots, a_{n,n-1}$ が存在して、観測値の大きさ x が $a_{n,i-1} \leqq x < a_{n,i}$ であれば、i 番目の大きさの ability p_i を持つ人間を割り当てる事が最適である事が知られている。(Derman, Lieberman and Ross (1972)) このような sequential stochastic assignment problem については、いろいろな場合についての研究がなされてきている。(Albright (1974)、Nakai (1980)、(1982)、(1985)、(1986)、etc)

一方この問題は、次のような良く知られている不等式 (Hardy, Littlewood and Pólya (1934)) の確率的な一般化とも考える事が出来る。すなわち

$$max_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i$$

という不等式である。(但し、上式で S_n は $\{1, \ldots, n\}$ の上の n 次の対称群である。) ここでもし n 個の job が一度に出現すれば、そのときの最適解はこの不等式によって求める事が出来る。

ここでは、さきに述べた Derman, Lieberman and Ross (1972) をはじめとする一連の sequential stochastic assignment problem において一度に1個ずつ job が出現する場合ではなく、一度に複数個の job が出現する場合に、同様の sequential stochastic assignment problem を考察し、その最適政策及び最適政策のもとで最適に振る舞ったときの総期待利得を求めることを目的として解析を進めて行く。まずその前に、Nakai (1986) において考察を行った同時に複数の値を観測することが出来る場合の optimal stopping problem について、いくつかの性質を第 2 節にお

いて説明する。次に同時に複数の値を観測することが出来る場合の sequential stochastic assignment problem については、第3節で解析を行う。

§2. 同時に複数の値を観測することが出来る場合の Optimal Stopping Problem

まず始めに sequential stochastic assignment problem を考える前に、期待値を最大にするような optimal stopping problem で stop できる回数が複数回許されている問題について考える。

この問題は N 期間の問題であり、この N 期間の間に m 個の job が逐次に出現するものとする。この m 個の job は N 期間のどの期に出現しても良く、各 job は互いに独立でかつ一様に出現するものとする。すなわち i 番目の job が k 番目の期に出現する確率は $1/N$ であると考える。$(1 \leqq k \leqq N)$ 一方 decision-maker はこの N 期間の間に出現する m 個の job の内から k 個を選択し、その総期待利得を最大にする事を目的とする。このとき、各期に出現する job の値を観測して後全ての job を選択する事も許され、また全く選択しない事も許されるものとする。また、各 job の大きさは各々独立かつ同一の確率分布 $F(x)$ に従う確率変数 X の実現値として表せるものとする。またここで、各 job がどの期に出現するかは一様であると仮定したが、一般にそのような仮定を設けなくとも同様の解析を行う事が出来る。

現在残りの決定期間が N で、残り合計 m 個の job が出現するとき m 個のうち k 個を選択できるという状態を (N, k, m) で表し、この問題を $P_N(k\,; m)$ とする。またこの問題における最適政策のもとでの総期待利得をこの問題の値といい $v_N(k\,; m)$ で表す。このとき以下の事が成立する。

まず始めに状態 (N, k, m) において n 個の job $(0 \leqq n \leqq m)$ が最初の期に出現する確率 $p_{N,m}(n)$ は

$$p_{N,m}(n) = {}_mC_n \frac{(N-1)^{m-n}}{N^m} \quad (0 \leqq n \leqq m,\ p_{1,m}(m) = 1)$$

である。

次に、$P_N(k;m)$ に於て最初の期に出現するjobの数が n であるとき、それら n 個のjobの大きさが $X_1,\ldots\ldots,X_n$ であるものが出現したとき $X_1,\ldots\ldots,X_n$ を大きさの順に並べ替えたものこれらの確率変数の順序統計量を $X_{(1)},\ldots\ldots,X_{(n)}$ で表し、簡単化するため、それらを $Y_1,\ldots\ldots,Y_n$ と表す。このとき、これら Y_i の密度関数 $g_{n,i}(y_i)$ は次のように表される。(但し、ここでは、確率変数の分布は密度関数 $f(y)$ を持つものと考える。またその分布関数を $F(y)$ とする。)

$$g_{n,i}(y_i) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}(F(y_i))^{n-i}(1-F(y_i))^{i-1}f(y_i)$$

このときproblem $P_N(k;m)$ において最適に振る舞ったときに得られる総期待利得 $v_N(k;m)$ は、次のDP方程式を満足する。

$$v_N(k;m) = \sum_{n=0}^{m} v_N(k;m \mid n) p_{N,m}(n)$$

$$v_N(k;m|n) = E[\, v_N(k;m|X_{(1)},\ldots,X_{(n)};n)\,]$$

$$v_N(k;m|x_{(1)},\ldots,x_{(n)};n) = max\{\sum_{j=1}^{i} x_{(j)} + v_{N-1}(k-i;m-n)\}$$

ただし $v_0(k,m)=0$ とし $y_0=0$ と仮定する。

まず始めに、減少する数の列 $\{a_i\}(i=0,1,\ldots\ldots,a_0=\infty)$ に対して $U_m(a_i,a_{i-1}|j,y)$ を次のような関数とする。

$$U_m(a_i, a_{i-1} | k, y) = \int_0^{a_i \wedge y} a_i h_{m,k}(y_k) f(y_k) dy_k$$

$$+ \int_{a_i y}^{a_{i-1} \wedge y} y_k h_{m,k}(y_k) f(y_k) dy_k + \int_{a_{i-1} \wedge y}^{y} U_m(a_{i-1}, a_{i-2} | k+1, y_k) f(y_k) dy_k$$

ただし

$$h_{m,k}(y_k) = \frac{n!}{(n-k)!}(F(y_k))^{n-k}$$

次に、この notation を用いて次のような非負な数の列 $\{a_{N,m}(i)\}$ を構成する。

$$a_{N,m}(i) = \sum_{n=0}^{m} a_{N,m}(i | n) p_{N,m}(n)$$

$$a_{N,m}(i|n) = U_n(a_{N-1,m-n}(i), a_{N-1,m-n}(i-1) | 1, \infty)$$

$$a_{N,m}(i|0) = a_{N-1,m}(i),$$

但し、$a_{N,m}(0) = a_{N,m}(0|n) = \infty, a_{0,0}(i) = 0 \,(i \geqq 1)$ である。$(N, m \geqq 0)$ この時次の性質が成り立つ。

このときこれら二つの non-negative number の列 $\{a_{N,m}(i)\}_{i=0,1,2,\dots}$ 及び $\{a_{N,m}(i|n)\}_{i=0,1,2,\dots}$ で次の性質を持つ。すなわち、全ての N, m 及び n に対して $a_{N,m}(i)$ は i に関して減少する関数である。また、$a_{N,m}(i|n)$ についても同様となる。(これらの二つの列の求め方及びその詳しい性質については Nakai (1986) を参照)

この二つの正数列を用いて、問題 $P_N(k; m)$ の最適政策及びその政策のもとでの総期待利得は次のように表す事が出来る。

Theorem 1.

複数の値を同時に観測することの出来る最適停止問題 $P_N(k;m)$ において最適政策は、次のように表される。即ち、n 個の job が出現しそれらの実現値の ordered value が $y_1,\ldots,y_n$ であるとき、次のような job を選択することである。いま j を不等式 $y_j \geqq a_{N-1,m-n}(k-j+1)$ を満足するもっとも大きい数 j とするとき、n 個の job のうち大きい値を持つ j 個の job を選ぶことである。

Theorem 2.

最適選択問題 $P_N(k;m)$ の最適政策のもとでの値 $v_N(k;m)$ および $v_N(k;m|n)$ は次のように表される。

$$v_N(k;m)=\sum_{i=1}^{k} a_{N,m}(i)$$

$$v_N(k;m\mid n)=\sum_{i=1}^{k} a_{N,m}(i\mid n)$$

また、さきに与えた二つの non-negative number の列 $\{a_{N,m}(i)\}_{i=0,1,2,\ldots}$ 及び $\{a_{N,m}(i|n)\}_{i=0,1,2,\ldots}$ は次のようにして求める事が出来る。

Proposition 1.

数列 $\{a_{N,m}(i)\}_{n=1,2,\ldots}$ $(i, m \geqq 0)$ の値は次のように帰納的に求めることが出来る。

$$a_{N,m}(i\mid n)=\sum_{j=1}^{m\wedge i}\int_{a_{n-1,m-n}(i-j+1)}^{a_{n-1,m-n}(i-j)} y_j\, g_{M,j}(y_j)\,dy_j$$

$$+\sum_{j=0}^{n\wedge(i-1)} a_{n-1,m-n}(i-j)\,{}_nC_j(1-F(a_{n-1,m-n}(i-j)))^j(F(a_{n-1,m-n}(i-j)))^{m-j}$$

$$a_{N,m}(i)=\sum_{m=0}^{m} a_{N,m}(i\mid n)\,p_{N,m}(n)$$

§3 Sequemtial Stochastic Assignment Problem

第2節において考えた複数個のjobが一度に出現することを許すようなoptimal stopping problemにおいて考えたものと同様のsituationを考える。すなわちここでは、残りの期間がNであり、その期間の間にm個のjobが出現するが、各jobがそのうちのどの期に出現するかは各々独立に出現し、その出現する確率は一様であるものとする。一方decision-makerはm人の人間を雇っており、それぞれのabilityは$p_1,\dots,p_m$であると考える。($p_i \geqq 0, i=1,\dots,m, p_1 \geqq \dots \geqq p_m$)このとき各期において出現するjobの実現値を観測し、それぞれのjobを誰にassignするかを考える。このとき、一度に複数のjobが出現する場合には、その出現したjobの数に合わせてassignするものとする。また、いったんassignされた人は、二度とassignされる事はないものとする。ここでは、出現するjobの数mと、assignされる人数kがともに等しいと考えるが、一般にこのような条件とは異なった場合においても同様の解析を行う事が出来る。すなわち、$k<m$であるならば、不足分の$m-k$個のpに対して$p_{k+1}=\dots=p_m=0$と考えれば一般性を失うことなく議論することが出来る。また$k>m$であるならば、値の小さい方から$k-m$個のpを除けばよい。

今、この問題の状態を$(N;p_1,\dots,p_m)$と表し、この状態におけるsequential stochasic assignment problemにおいて最適に振る舞ったときに得られる総期待利

得を $V_N(p_1,\dots,p_m)$ とする。次に、第一期において n 個の job が出現したときのこの問題の状態を $(N;p_1,\dots,p_m:n)$ と表し、この状態において最適に振る舞ったときに得られる総期待利得を $V_N(p_1,\dots,p_m;n)$ とする。次に、n 個の job が出現し、それらの観測値が $x_1,\dots,x_n$ であるとき、これら観測値を大きさの順に並べ替えたものを $y_1,\dots,y_n$ とする。このときこの問題の状態を $(N;p_1,\dots,p_m:n\mid y_1,\dots,y_n)$ と表し、この状態において最適に振る舞ったときに得られる総期待利得を $V_N(p_1,\dots,p_m;n\mid y_1,\dots,y_n)$ とする。このとき、状態 $(N;p_1,\dots,p_m)$ における同時に複数の値を観測することの出来る sequential stochastic assignment problem の最適方程式は次のように表すことが出来る。

$$V_N(p_1,\dots,p_m)=\sum_{i=1}^{m} p_{N,m}(n)V_N(p_1,\dots,p_m;n)$$

$$V_N(p_1,\dots,p_m;n)=\int_D V_N(p_1,\dots,p_m;n\mid y_1,\dots,y_n)\,dG_n(y_1,\dots,y_n)$$

$$V_N(p_1,\dots,p_m;n\mid y_1,\dots,y_n)$$

$$=max_{1\le k\le n}\,max_{\{(p'_1,\dots,p'_k)\mid\{p'_1,\dots,p'_k\}\subseteq\{p_1,\dots,p_m\},p'_1\ge\dots\ge p'_k\}}$$

$$\{p'_1y_1+\cdots+p'_ky_n+V_{N-1}(p^*_1,\dots,p^*_k)\}$$

$$V_1(p_1,\dots,p_m)=E[p_1Y_1+\cdots+p_mY_m]$$

但し$(p_1^*, ..., p_k^*) = (p_1, ..., p_m) - (p'_1, ..., p'_k)$である。

またここで、$G_n(y_1, ..., y_n)$は$Y_1, ..., Y_n$の同時分布の分布関数である。また、この最適方程式において、出現したn個のjobのうちk個のjobを選択する場合には出現したn個のjobのうち、値の大きいものから大きさの順にk個のjobを選択する、すなわち$y_1, ..., y_k$の値を持つjobを選択することが最適であることは、第1節において述べたHardyのLemmaより明らかである。従って上記のような最適方程式を求めることが出来る。この最適方程式より、同時に複数の値を観測することの出来るsequemtial stochastic assignment problemの最適政策及び、その最適政策のもとで最適に振る舞ったときの総期待利得は、次に述べる二つ定理に述べられている様に表せる。

以下に述べる同時に複数の値を観測することの出来るsequemtial stochastic assignment problemの最適政策及び、その最適政策のもとで最適に振る舞ったときの総期待利得に関する性質を求めるために、第2節で求めた二つのnon-negative numberのsequence $\{a_{N,m}(i)\}_{i=0,1,2,...}$ 及び $\{a_{N,m}(i|n)\}_{i=0,1,2,....}$ を用いる。

Theorem 3.

同時に複数の値を観測することの出来るsequential stochastic assignment problemの状態が$(N; p_1, ..., p_m)$であるときn個のjobが出現し、それぞれのjobの実現値を大きさの順に並べたものを$y_1, ..., y_n (y_1 \geqq .... \geqq y_n)$とする。このとき、最適政策は次のように表す事が出来る。

'$\{y_1, ..., y_n\}$ 及び $\{a_{N,m}(1|n), a_{N,m}(2|n), ..., a_{N,m}(m-n|n)\}$ を併せて、改めて大きさの順に並べ替えたものを$\{c_1, ..., c_m\}$とする。このとき、各$i (1 \leqq i \leqq n)$に対して、$c_i = y_j (1 \leqq j \leqq n)$であれば$i$-th p_iをy_jにassign

し、$c_j = a_{N,m}(k|n)(1 \leqq k \leqq m-n)$であれば$i$-th p_iはこの期においてassignしない'

Theorem 4.

同時に複数の値を観測することの出来るsequential stochastic assignment problemの状態が$(N; p_1, \ldots, p_m)$であるとき、Theorem 3において述べた最適政策を用いたときの総期待利得を$V_N(p_1, \ldots, p_m)$とするとき、この値は次のようにして求める事が出来る。

$$V_N(p_1, \ldots, p_m) = \sum_{i=1}^{m} a_{N,m}(i) p_i$$

これらの二つの定理は、第1節において述べたHardyのLemmaを用いて、残りの計画期間の長さNに関する帰納法により同時に証明することが出来る。$N=1$の場合は複数個の値を観測した場合は、HardyのLemmaを用いることの出来、明らかに成立する。また、一般のNの場合には、最適方程式において、出現したn個のjobのうちk個のjobを選択する場合には出現したn個のjobのうち値の大きいものから大きさの順にk個のjobを選択することが最適であるから、帰納法の仮定により$N-1$の場合にTheorem 2を用いて

$$V_{N-1}(p_1^*, \ldots, p_k^*)$$

を展開すれば、HardyのLemmaを用いることが出来る。その結果、求める最適政策及び、その最適政策のもとで最適に振る舞ったときの総期待利得に関する性質が得られる。

また、これらの二つの定理の証明を見ればわかるように、$a_{N,m}(i)$は、問題の状態が$(N;p_1,\dots,p_m)$と表されているとき、大きい方からi番目の大きさのability p_iを持つものによって得ることの出来る値の期待値を表している。即ち、Proposition 1において表されたように、n個のjobが出現し、それら出現したn個のjobの値を観測したとき、出現したjobの中でj番目$(1 \leqq j \leqq n)$に大きいjobの値が$a_{N-1,m-n}(i-j)$より小さくかつ$a_{N-1,m-n}(i-j+1)$より大きいときのみ、この出現したjobに大きい方からi番目の大きさのp_iをassignし、それ以外のときは、それぞれの大きさに対応するpの値を持つものをassignするか、または、そのjobを見過ごすことになる。それぞれの場合に対応して、次の期におけるp_iの相対的な位置が変化し、個々の場合に応じて得ることの出来る値の期待値をもとにして、p_iによって得ることの出来る値の期待値を帰納的に計算することが出来る。従って、Proposition 1において求めた$a_{N,m}(i)$を用いて、複数個のjobが一度に出現することを許すようなsequential stochastic assignment problemの最適政策および、その最適政策の下で得られる期待利得はTheorem 3およびTheorem 4において述べたように表すことが出来る。

References

1. S. C. Albright, ' A Bayesian Approach to a Generalized House Selling Problem ', *Management Science*, vol. 24, 1977, pp. 432 - 440.
2. S. C. Albright, 'Optimal Sequential Assignments with Random Arriving Time ', *Management Science*, vol. 21, 1974, pp. 60 - 67.
3. C. Derman, G. J. Lieberman and S. M. Ross, ' A Sequential Stochastic Assignment Problem ', *Management Science*, vol. 18, 1972, pp.349 - 355.

4. G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, ' *Inequality* ', 1934, Cambridge University Press.

5. T. Nakai, ' Optimal Assignmnent for a Random Sequence with an Unknown Parameter ', *Journal of Information & Optimization Sciecnces*, vol. 1, 1980, pp. 214 - 228.

6. T. Nakai, ' A Time Sequential Game Related to the Sequential Assignmnet Problem ', *Journal of the Operations Research Society of Japan*, vol. 25, 1982, pp. 129 - 138.

7. T. Nakai, ' Optimal Assignment for a Random Sequence with an unknown Number of Jobs ', *Journal of the Operations Research Society of Japan*, vol. 28, 1985,pp. 179 - 194.

8. T. Nakai, ' A Sequential Stochastic Assignment Problem in a Partially Observable Markov Chain ', *Mathematics of Operations Research*, vol. 11, 1986,pp. 230 - 240.

9. T. Nakai, ' An Optmal Selection Problem with a Random Number of Applicants per Period ', *Operations Research*, vol. 34, 1986, pp. 478 - 485.