数理解析研究所講究録
第 748 巻 1991 年 90-95

代数方程式に対する同時反復解法と多重度評価

都田　艶子　(Tsuyako Miyakoda)
大阪大学　工学部

1　はじめに

n 次代数方程式

$$p(z)=\prod_{i=1}^{\nu}(z-\alpha_i)_i^m=z^n+c_1z^{n-1}+\ldots+c_n=0$$

$$\sum_{i=1}^{\nu}m_i=n,$$

を数値的にとく場合、重度の高い根は精度よくもとまらないこと、収束の速度も遅いことがよく知られる。我々は

$$\underbrace{\alpha_1,\cdots,}_{m_1}\underbrace{\alpha_2,\cdots,}_{m_2}\cdots,\underbrace{\alpha_\nu,\cdots,\alpha_\nu}_{m_\nu}$$

を改めて

$$\zeta_1,\cdots,\zeta_n$$

としたとき 各ζ_i に収束する n 個の近似根 z_iと、それが属するグループの指標 m_i を求めることを目的とする。　p 次反復の n 個の近似値

$$\mathbf{z}^{(p)}=(z_1^{(p)},z_2^{(p)},\cdots,z_n^{(p)}) \tag{1}$$

から、$p+1$ 次反復の近似値は次のようにして求める。

$$\mathbf{z}^{(p+1)}=\mathbf{f}(\mathbf{z}^{(p)}),\qquad \mathbf{z}^{(p+1)}=(z_1^{(p+1)},z_2^{(p+1)},\ldots,z_n^{(p+1)}) \tag{2}$$

ここで、 $\mathbf{f}$ は反復法を $Durand-Kerner$法とすると

$$\mathbf{f}(\mathbf{z})=(f_1(\mathbf{z}),f_2(\mathbf{z}),\cdots,f_n(\mathbf{z})) \tag{3}$$

$$f_i(\mathbf{z})=z_i-\frac{P(z_i)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(z_i-z_j)} \tag{4}$$

である。

目標を達成するために我々がよってたつところのことを述べておく。多重根のまわりでの近似根の収束状況を考えるために, n個の近似根 $z_1,\ldots,z_n$にたいして α_lに収束する近似根を $z_j^{(l)},j=1,\cdots,m_l$と書くことにする. ある近似根 z_kがα_lに収束するとしてその update を考えるとき

$$\left|\frac{z_k-\alpha_l}{z_i^{(j)}-\alpha_l}\right|<<\varepsilon,\quad for\quad j\neq l$$

が成り立っていると仮定する．このとき m重根の近傍では，その近似値は $z_m = 0$ に対する $Durand-Kerner$ 反復となってることがわかる．

さらに次のような新しい変数、写像を導入する。

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n), \quad \gamma_k = \frac{z_k}{z_1}, \quad \gamma \in C^n \tag{5}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) = (F_1(\mathbf{y}), \cdots, F_n(\mathbf{y})) \tag{6}$$

$$F_k(\mathbf{y}) = \frac{f_k(\mathbf{y})}{f_1(\mathbf{y})}, \quad \mathbf{y} \in \mathbf{C}^n \tag{7}$$

そして、$\mathbf{E} = \{\mathbf{z} \in \mathbf{C}^n \mid z_i = z_j, i \neq j\}$ としたとき、近似根が収束するまでは、必ず $\mathbf{f}(\mathbf{z}) \in \mathbf{C}^n \backslash \mathbf{E}$ が成り立つような出発値から反復は開始するものとする。　このとき次のことがいえる。

Theorem 1 $p(z) = z^m = 0$ に対して、*Durand-Kerner* 法により近似根の列 $\{\mathbf{z}^{(p)}\}$ を生成するとき、写像 $\mathbf{F}$ の不動点は$\gamma = (1, \omega, \omega^2, \cdots, \omega^{m-1}), \omega = exp(\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1})$ である

Theorem 2 *Th.1* と同様にして近似列 $\{\mathbf{z}^{(p)}\}$ を生成するとき、真の解に十分に近い近傍から反復を始めれば、写像 $\mathbf{F}$ は縮少写像である

2 多重度の評価

Th.1 と Th.2 により、我々は、もとの $\mathbf{f}$の写像のほうで考えた時，近似根の収束先が明確になってきた段階では、重根に対する近似根は重根を中心とした円の上で、互いに等間隔の位置を保ちながら収束していくことが分かる。　この性質を利用して我々は、各近似根がもつ多重度を評価することにする。ある段階の近似根からの update を $z_k^* = z_k + \Psi_k$ と書くことにすると、評価に利用する情報としては $z_k, \Psi_k, |\Psi_k|$ そして次の結果を用いる。

Lemma 1 重根を中心とする円の周上等間隔に位置する近似根は、円の中心に向かって次の縮尺をもって進む

$$|\zeta_k - z_k^{(p+1)}| = (1 - \frac{1}{m})|\zeta_k - z_k^{(p)}|$$

近似根 z_lと z_kが同じ多重度 m を持つ近似根であることを判定するのには，最初にすべての近似根を残差の大きい順に並べ換えた上で，次の２点をチェックする。

1.

$$1 - \alpha < |\frac{\Psi_l}{\Psi_k}| < 1 + \alpha$$

2.

$$d_1 = \cos\vartheta_{k,l}, \quad d_2 = \cos\vartheta_{l,k}$$

$$d_1 > 0, \quad d_2 > 0 \quad and \quad |d_1 - d_2| < \beta$$

この２つの条件を満たす z_lを数え上げて m を決めそれを m_lとする。$\vartheta_{k,l}$, $\vartheta_{l,k}$は z_k, Ψ_k, z_l, Ψ_lがなす角度である．このときこの m_lを採用するか否かをさらに次の条件をチェックすることにとって決める。

1.

$$\frac{|z_k + m\Psi_k - z_l - m\Psi_l|}{|z_k - z_l|} < \gamma$$

これらの評価基準の中で、我々は、α, β, γの３つの誤差の許容範囲を示す定数を指定する。これらの選び方で、多重度判定の評価が有効に働くか否かが、やはり左右される。中でも γの値が信頼性にひびく。

3 計算例

多重度の評価をアルゴリズムの中で行うときの定数を我々は$\alpha = 0.1, \beta = 0.1, \gamma = 0.05$と設定する。この時の結果について述べる。図1は$n = 4$の実軸上に4個の近接根を持ち他に1個の単純根と3重根を1個持つ場合の、収束するまでの近接根の軌跡、表1はアルゴリズムによる多重度の判定である。根は$(1.2, 0), (1.21, 0), (1.22, 0), (1.23, 0), (2.1, 1.5), (3.2, 2.3), (3.2, 2.3), (3.2, 2.3)$である。反復17回から反復19回までは4つの近接根に対する近似根は4重根の判定がなされ，それらは$(1.215, 0)$にむかって収束するように進む。反復20回からは条件(3)のチェックが有効に働いて判定はクリアされ、それぞれ単純根であるという評価がでる。最後にはそれぞれの根はきちんと分離される。

反復27、28で近似根の順序の入れ替えが起こり、単根がそろって並ぶ形になる。3重根の収束を見てみると

$it = 17$

$(3.16295074, 2.28821149)$	barycenter(重心)
$(3.22870043, 2.27418197)$	$(3.2000000019, 2.3000000013)$
$(3.20834884, 2.33760654)$	

そして収束した時の値は次のようになる.

$(3.20014695, 2.29986621)$	(it=30)
$(3.20004264, 2.30019435)$	
$(3.19981061, 2.29993967)$	

3つの近似根の重心の値はこのとき反復17回からほとんど変わらない.

判定条件（3）の効果を見るために，$\alpha = 0.1, \beta = 0.1, \gamma = 0.5$の場合の判定結果　（表2）

そして$\alpha = 0.2, \beta = 0.2, \gamma = 0.01$の場合の判定結果　（表3）を上げる.

我々はいま計算は倍精度演算で行った. 結果は演算と収束の判定基準，そしてα, β, γ等の値が関連しあって信頼性の高い評価を得ていることがわかる.

参考文献

[1] E. Durand, *Solutions Numerisques desEquations Algebriques Tom 1:Equation du Tupe F(x)=0*;Racines d'un Polnome Masson,Paris 1960.

[2] I.O. Kerner, *Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polnomen*, Numer.Math. 8 (1966) 290-294.

[3] T. Miakoda, *Iterative Methods for Multiple Zeros of a Polnomial b Clustering*, J.Comput.Appl.Math. 28 (1989) 315-326.

[4] T. Miakoda, *Balanced Convergence of Iterative Methods to a Multiple Zero of a Complex Polnomial*, (preprint).

表 1: $n=8$ に対する多重度判定

iteration	*multiplicity of approximation*							
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	3	3	3	1
16	1	1	1	1	3	3	3	1
17	4	4	4	4	3	3	3	1
18	4	4	4	4	3	3	3	1
19	4	4	4	4	3	3	3	1
20	1	1	1	1	3	3	3	1
21	1	1	1	1	3	3	3	1
22	1	1	1	1	3	3	3	1
23	1	1	1	1	3	3	3	1
24	1	1	1	1	3	3	3	1
25	1	1	1	1	3	3	3	1
26	1	1	1	1	3	3	3	1
$27^{(*)}$	1	1	3	3	3	1	1	1
$28^{(*)}$	3	3	3	1	1	1	1	1
29	3	3	3	1	1	1	1	1
30	3	3	3	1	1	1	1	1

表 2: $n = 8$ に対する多重度判定 $\alpha = 0.1, \beta = 0.1, \gamma = 0.5$

iteration	*multiplicity of approximation*							
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	6	6	6	6	6	6	1	1
3	6	6	6	6	6	6	1	1
4	4	4	4	4	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	2	2
14	3	3	3	1	2	2	1	1
15	3	3	3	1	3	3	3	1
16	3	3	3	1	3	3	3	1
17	4	4	4	4	3	3	3	1
18	4	4	4	4	3	3	3	1
19	4	4	4	4	3	3	3	1
20	4	4	4	4	3	3	3	1
21	4	4	4	4	3	3	3	1
22	2	2	1	1	3	3	3	1
23	2	2	1	1	3	3	3	1
24	2	2	1	1	3	3	3	1
25	1	1	1	1	3	3	3	1
26	1	1	1	1	3	3	3	1
27(*)	1	1	3	3	3	1	1	1
28(*)	3	3	3	1	1	1	1	1
29	3	3	3	1	1	1	1	1
30	3	3	3	1	1	1	1	1

表 3: $n = 8$ に対する多重度判定 $\alpha = 0.2, \beta = 0.2, \gamma = 0.01$

iteration	*multiplicity of approximation*							
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	1	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1	1	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1
14	1	1	1	1	1	1	1	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1
17	1	1	1	1	3	3	3	1
18	1	1	1	1	3	3	3	1
19	1	1	1	1	3	3	3	1
20	1	1	1	1	3	3	3	1
21	1	1	1	1	3	3	3	1
22	1	1	1	1	3	3	3	1
23	1	1	1	1	3	3	3	1
24	1	1	1	1	3	3	3	1
25	1	1	1	1	3	3	3	1
26	1	1	1	1	3	3	3	1
$27^{(*)}$	1	1	3	3	3	1	1	1
$28^{(*)}$	3	3	3	1	1	1	1	1
29	3	3	3	1	1	1	1	1
30	3	3	3	1	1	1	1	1