

エラスチカ問題の  
経路追跡方法と  
経路切りかえ方法

Path-tracing and -switching of an elastica frame

岐阜大学

藤井文夫 (Fumio Fujii)

本州四国連絡橋公団

北川竜三 (Tatsumi Kitagawa)

1. ま え が き 機械・建築・航空機・造船・橋

梁などの構造部材の有限変位理論においては、その構造部材の挙動を把握するために、荷重変数 ( $X_{N+1}$ ) と変位変数 ( $X_1 \sim X_N$ ) との間の関係を表すつり合い経路を追跡することが重要な課題である。これは数学的には ( $N+1$ ) 個の変数に対して、 $N$ 本の支配方程式で定義される解曲線の追跡問題に帰着される。数値計算上は解曲線上に微小弧長幅の間隔で点在する離散点をひとつひとつ増分反復法によって逐次求め、これらの点を結んだ曲線が求めるつり合い経路となる。このつり合い経路の追跡に伴い克服しなければならない問題点はつぎの4点である。①効率的にそして安定につり合い経路上の収束点を計算すること②経路上に出現する変数の折り返し点や分岐点などの特異点の位置を的確に捉えること③分

岐点より枝分かれする分岐経路（単枝・多枝）を探索すること④他のどの経路とも接続しておらず、全くどこからも直接アクセスのできないような経路（遊離経路）があるとしたら、これを効率的に見つけること。以上の4点である。

本報で扱う課題は①③④であり、①を経路追跡法、③④をまとめて経路切りかえ法と呼ぶことにする。②については現在のところいわゆる extended system と呼ばれる手法〔5〕が最も優れており、多少計算労力はかかるが実用的である。構造系として非線形性の高いエラスチカ問題のうち、極めて「病的な」つり合い経路を示すL-フレームをベンチマークテストとして選んだ。紙面の関係から以下では計算手法の概要しか紹介できないが、詳細は著者の文献〔1, 2, 3, 4〕を参照されたい。

2. 基礎方程式 解析に必要な基礎式を以下にまとめておく。

●N本の全体方程式

$$\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \text{式(1)}$$

●N本の線型化増分方程式

$$[\mathbf{f}] d\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad \text{式(2)}$$

ここに、

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, \dots, F_N)^T \quad \text{式(3)}$$

は、 $(N + 1)$  個の変数

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N, X_{N+1})^T \quad \text{式 (4)}$$

の関数である。 $[f]$  は  $N$  行  $(N + 1)$  列の長方形行列で、その行列要素は、

$$f_{jk} = \partial F_j / \partial X_k \quad \text{式 (5)}$$

で与えられる。また  $d\mathbf{X}$  は  $\mathbf{X}$  の増分量で、解曲線の接線ベクトルに相当する。

$$d\mathbf{X} = (dX_1, dX_2, \dots, dX_N, dX_{N+1})^T \quad \text{式 (6)}$$

ここで注意すべきことは、経路上の収束点の座標を逐次計算する際に、以上の  $N$  本の全体・増分方程式以外にも、もう一本条件式を付加できることで、この付加的条件式の与え方の巧みさで、①のアルゴリズムの品質が決まる。実際の数値計算では、式 (1) が必ずしも定式化できるとは限らず、式 (2) のみの場合もある。また解析微分が可能であるのは極めて稀で、できたとしてもせいぜい増分方程式までである。有限要素法などの汎用プログラムを用いた実用計算では、それ以上の高次の微分項をとるなどまず不可能に近い。

**3 . 経路追跡法** 増分反復過程  $\langle in \rangle$  ではそれぞれつぎのような連立方程式を解く。下添字  $\langle in, it \rangle$  ( $it \geq 0$ ) は  $\langle in \rangle$  のなかでの個々の計算ステップを表し、 $\langle in, 0 \rangle$  が増分ステップ、それ以外 ( $it \geq 1$ ) が反復ステップとなる。

増分ステップ  $\langle in, 0 \rangle$ では,

$$\left[ \begin{array}{l} [f]_{\langle in-1 \rangle} dX_{\langle in, 0 \rangle} = 0 \\ dX_{\max \langle in, 0 \rangle} = \overline{dX_{\max \langle in, 0 \rangle}} \end{array} \right. \quad \text{式 (7)}$$

ここに  $\overline{dX_{\max \langle in, 0 \rangle}}$  は増分規定量である。

解の更新 ;

$$X_{\langle in, 0 \rangle} = X_{\langle in-1 \rangle} + dX_{\langle in, 0 \rangle} \quad \text{式 (9)}$$

反復ステップ  $\langle in, it \rangle (it \geq 1)$  では,

$$\left[ \begin{array}{l} [f]_{\langle in, it-1 \rangle} \delta X_{\langle in, it \rangle} = -F_{\langle in, it-1 \rangle} \\ \delta X_{\max \langle in, it \rangle} = 0 \end{array} \right. \quad \text{式 (10), 式 (11)}$$

解の更新 ;

$$X_{\langle in, it \rangle} = X_{\langle in, it-1 \rangle} + \delta X_{\langle in, it \rangle} \quad \text{式 (12)}$$

ここで下添字  $\max$  は,  $X_{\max}$  が  $\max$  番目の変数であることを示し, 解ベクトル  $dX_{\langle in, 0 \rangle}$  と  $\delta X_{\langle in, it \rangle}$  のなかでこの変数を制御する。この変数制御法は構造解析学における『変位制御法』の部類に属するものと解釈できるが, 特徴的なのはこの下添字  $\max$  の選び方である。著者らの研究では, 解曲線の接線ベクトルのなかで最大絶対値を有する成分を逐次検出して, この成分に対応する変数を  $X_{\max}$  としている。最大増分変化を示す変数を制御することが, 解曲線上に出現する折り返し点を乗り切る意味で最適制御変数である。反復ステップでは, 接線ベクトルに最も垂直に近い状態にある

変数一定平面が， $X_{max} = \text{一定}$ の平面であり，解曲線に収束するために必要な補正量  $\delta X_{(in, it)}$  をこの平面内に探し求めていることになる。

4. 経路切りかえ方法 これまで追跡してきた経路から別の経路への切りかえは，③分岐経路の探査，および④遊離経路の探査において必要となる。経路切りかえ方法の概要はつぎのようである（図1）。まず付加的条件としてある変数一定平面を，

$$F_{N+1} = 0 \quad \text{式(13)}$$

で定義する。弾性構造系の場合には，荷重変数一定の平面を

$$F_{N+1} = X_{N+1} - \overline{X_{N+1}} \quad \text{式(14)}$$

で特定するのが有利である。この平面方程式と式(1)のなかのどれか一本の全体方程式

$$F_D = 0 \quad \text{式(15)}$$

とを交換すると，これまでの  $(N+1)$  次元空間における解曲線  $\xi$  とは全く異なる曲線  $\eta$  が，

$$G = 0 \quad \text{式(16)}$$

によって，この平面  $(N)$  次元空間内で定義される。

ここに，

$$G = (F_1, F_2, \dots, F_{D-1}, F_{N+1}, F_{D+1}, \dots, F_N)^T$$

$$\text{式(17)}$$

であり，線型化増分方程式は

$$[\mathbf{g}] d\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad \text{式 (18)}$$

である。[ $\mathbf{g}$ ] は [ $\mathbf{f}$ ] と同様にして求められる。

式 (14) の荷重平面を分岐点近傍に定義するなら，この平面は，これまで追跡してきた主経路や分岐経路との間でそれぞれ交点 A，及び C を有する。あるいはもっと遠方で同じく解曲線  $\xi$  との交点 D がある可能性がある。これらの交点はすべて式 (16) で定義される解曲線  $\eta$  上にあることは明らかである。したがって既知の点 A を出発点として，式 (15) の左辺の符号変化をモニターしながら，解曲線  $\eta$  を増分反復法で追跡すれば，基本的には点 C (分岐経路) や点 D (遊離経路) にたどりつけるはずである。実際には点 A より交点 C，D に至るのに計算労力に応じてつぎのような計算戦略が考えられる。I) 点 A で解曲線  $\eta$  の接線ベクトル  $\mathbf{t}_A$  を計算し，このベクトルの指す方向に，ポテンシャルの停留点 C' を直線探査する。ポテンシャルの停留点 C' は，点 C の近傍で検出される。点 C' からは曲線  $\xi$  に関する反復計算で容易に点 C に収束できる。これは弧長 AC が短い場合に有利であり，分岐方向の探査に使える [1, 4]。II) 解曲線  $\eta$  の曲率が点 A 付近で大きく，点 A での接線ベクトル  $\mathbf{t}_A$  が分岐経路の方向から大きくかけ離れている場合には，点 A より解

曲線  $\eta$  にそって多少進み（数値積分），そこでの収束点での接線ベクトルをあらたなる探査方向として採用して，ポテンシャルの停留点  $C'$  を直線探査する。Ⅲ）解曲線  $\eta$  を増分反復法で式（15）の左辺の符号変化が認められるまで追跡して点  $C$ （分岐経路）や点  $D$ （遊離経路）を見つける。これはかなりの計算労力がかかるが，目指す経路の手がかりを見つけるためには仕方あるまい。

ここで解曲線  $\eta$  の形状は，式（15）での  $F_D$  の選び方に依存し，場合によっては点  $A$  より  $C$ ， $D$  に至るまでに，解曲線  $\eta$  上に分岐点が出る可能性もあり，また点  $A$ ， $C$ ， $D$  は必ずしも  $\eta$  の連続した枝上にはないかも知れないので，工学的な視察（変形モードの予測など）により  $F_D$  を選ぶことが懸命である。

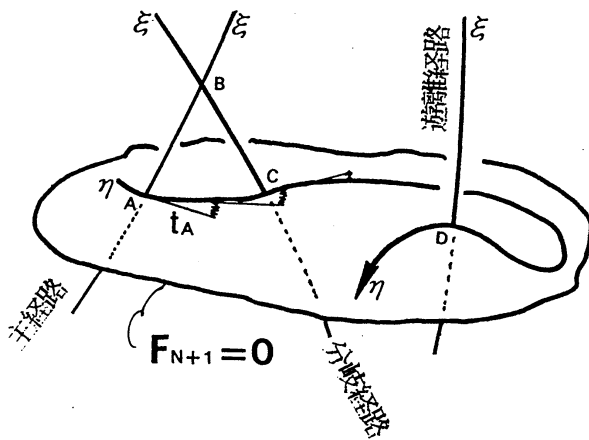


図1 経路の切りかえ方法

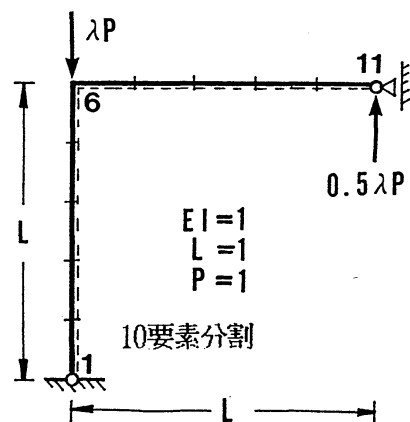
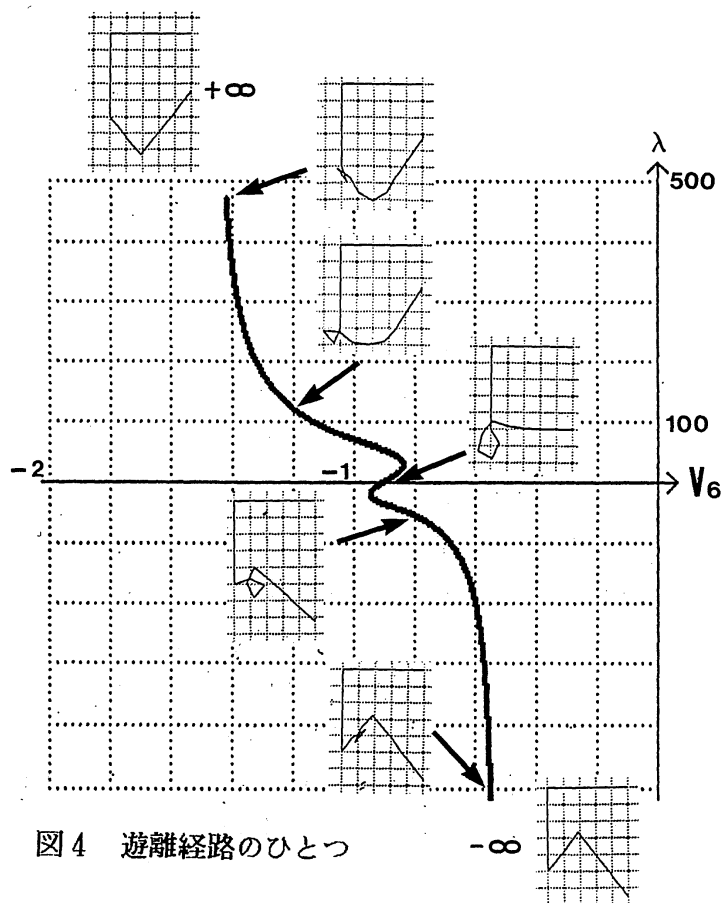
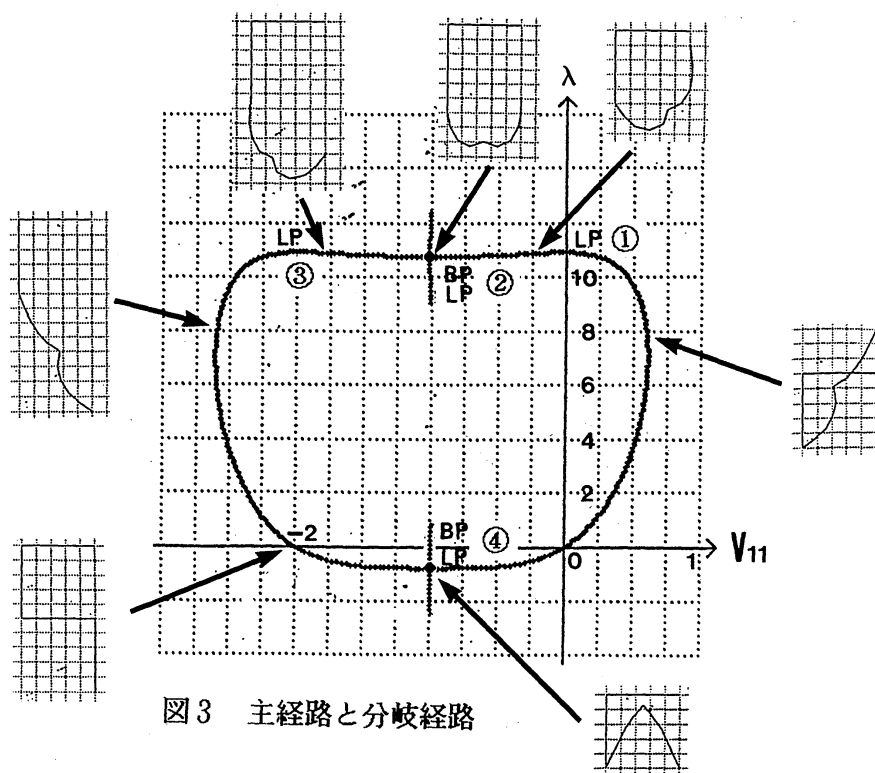


図2 エラスチカフレーム

5 . 数 値 計 算 図 2 にある L - フレームの有限変位問題を計算してみた。部材の軸線方向の伸びを無視したエラスチカ問題としての支配方程式の定式化は文献〔2〕にある。系全体を十本の直線部材に分割し、追跡した解曲線を図 3 と図 4 に示す。このうち図 3 は原点（無載荷・無変形）を初期値として解曲線を追跡した結果であり、節点 1 1 の鉛直変位（上向きを正）に対して荷重変数をプロットした。構造系のつり合い経路としては珍しく、出発した原点に再び戻ってくる閉曲線となる。途中いくつもの荷重変数の折り返し点が出現するが、特に興味あるのは LP ② と LP ④ と同じ点において分岐点が発生していることである。荷重変数の折り返し点と分岐点とがたまたま一致する場合は、主経路の接線剛性行列のゼロ固有値の固有ベクトルと主経路の接線ベクトルが平行するため、分岐経路の探査がきわめてむずかしくなるが、本報の II) または III) の経路切りかえ方法で難なく分岐経路を検出できた。図 4 の経路は III) の方法で発見した遊離経路のうちのひとつである。図 4 に示した系の変形モードからもわかるように、この経路は他のどの経路とも接続されておらず、直接アクセスできないことがわかる。このように経路切りかえ方法で遊離経路の一端を見つけ、可能な限り遊離経路を見出すことができる。





6. ま と め 構造系の有限変位問題におけるつり合い経路の追跡方法と経路の切りかえ方法を紹介した。本報では専門分野にとらわれない数値計算の観点からまとめており、経路追跡方法と経路切りかえ方法は基本的にはどの分野でも応用できる。分岐経路の探査や遊離経路の発見に使える I) ~ III) の経路切りかえ方法が成功するか否かは、多分に曲線  $\eta$  の形状 (分岐経路の探査においては、特に点 A 付近での形状) に、したがって  $F_D$  の選び方に依存する。

#### 参 考 文 献

- (1) Choong, K.K. / Fujii, F., "Line search for Asymmetric Bifurcation Path of Elastic Structures", Proc. of Symp. on Computational Meth. in Struc. Eng. and Related Fields, Vol. 14, 1990, 73-78
- (2) Fujii, F., "Scheme for Elasticas with Snap-Back and Looping", EM, ASCE, Vol. 115, No. 10, 2166-2181, 1989
- (3) 藤井文夫, "非線形増分方程式の解法のための篠原法について", 構造工学論文集, Vol. 35A, (1989年3月), 195-202
- (4) 藤井文夫 / Choong, K.K., "構造系の対称・非対称分岐経路の探査方法について", 構造工学論文集, Vol. 37A, (1991年3月)
- (5) Wriggers, P. / Wagner, W. / Miehe, C., "A Quadratically Convergent Procedure for the Calculation of Stability Points in Finite Element Analysis", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 70(1988), 329-347