

Normal graded ring の rational singularity
 又は canonical singularity になるための条件について.

都立大. 理 渡辺 敬一

$R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ を normal graded ring で (1) $R_0 = k$ は体で $ch(k) = 0$ (2) R は k 上有限生成 であるものとする。
 このとき, R が rational singularity 又は canonical singularity になるための条件を環論的に記述するのが本稿の目的である。

§1. Rational singularity, canonical singularity の定義と簡単な性質.

k は $ch(k) = 0$ の代数閉体とする.

X を k 上の normal variety, $f: \tilde{X} \rightarrow X$ を resolution とする.

定義. $x \in X$ が rational singularity (又は $\mathcal{O}_{X,x}$ が rational singularity)

$$\Leftrightarrow (R^i f_* (\mathcal{O}_{\tilde{X}}))_x = 0 \quad (\forall i \geq 1).$$

Grauert-Riemenschneider の vanishing theorem と relative duality により, この条件は次の 2 つの条件と同値である.

(a) $\mathcal{O}_{X,x}$ は Cohen-Macaulay ring.

(b) $(f_* \omega_{\tilde{X}})_x = \omega_{X,x}$.

定義 (M. Reid) $x \in X$ が canonical singularity とは

- $$\begin{cases} \text{(i)} \exists r > 0, \omega_{X,x}^{[r]} \text{ は invertible } \mathcal{O}_{X,x}\text{-module} \\ \text{(ii)} f_*(\omega_X^{\otimes r})_x = \omega_{X,x}^{[r]} \text{ (} r \text{ は (i) の } r \text{)}. \end{cases}$$

の二つの条件をみたす事である。この条件は次の条件と同値である。

- $$\begin{cases} \text{(i')} r \cdot \text{cl}(\omega_{X,x}) = 0 \text{ in } \text{Cl}(\mathcal{O}_{X,x}). \text{ (} \text{Cl}(\cdot) \text{ は divisor class group).} \\ \text{(ii')} f^*(\omega_X^{[r]}) \subset \omega_X \text{ (又は } f^*(\omega_X^{[r]}) = \omega_X(-\Delta), \Delta \geq 0 \text{) near } f^{-1}(x). \end{cases}$$

但し, $X_0 = \text{Reg}(X) \xrightarrow{i} X$ とし, $\omega_X = i_*(\Omega_{X_0}^n)$, $\omega_X^{[r]} = i_*(\Omega_{X_0}^{n \otimes r})$ ($n = \dim X$) とする。また $\omega_X|_{f^{-1}(x_0)} = \omega_X|_{X_0}$ と思う。

こゝで "canonical singularity" の名前の由来を見よう。

V は smooth proj. var. / k , V は general type, $R(V) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(V, \omega_V^{\otimes n})$

が f.g. / k としよう。 (V : gen. type $\Leftrightarrow \text{tr. deg. } k R(V) = \dim V + 1$.)

$\Leftrightarrow \dim(\text{Proj}(R(V))) = \dim V$). (このとき V は "f.g. general type" という) すると次が成立する。

Proposition. (M. Reid) X : normal proj. var. / k のとき, 次は同値。

- (i) $\exists r > 0$, $\omega_X^{[r]}$ は invertible, ample, $\exists f: \tilde{X} \rightarrow X$ resolution, $f_*(\omega_{\tilde{X}}^{\otimes r}) = \omega_X^{[r]}$ (このとき X は "canonical var." とす)。
- (ii) $\exists V$: smooth proj. var. of f.g. general type / k , $\text{Proj}(R(V)) \cong X$.

注意. (1) Gorenstein, rational sing. は canonical sing.

(2) canonical, Cohen-Macaulay sing. は rational である.

(canonical sing. の Cohen-Macaulay ではない例は多分まだ存在してない, $\dim X = 3$ のとき canonical sing. \Rightarrow C.-M. は Reid が示していると思う.)

(3) $\dim X = 2$ のとき, "canonical singularity" = "rat. dbl pt."

例. (1) $X = \{f(x_0, \dots, x_n) = 0\} \subset \mathbb{A}^{n+1}$, $x=0 \in X$ が孤立特異点である。このとき,

(a) (Kimio Watanabe) $x \in X$ が rational singularity

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^n \deg X_i > \deg f.$$

(b) (M. Reid) $x \in X$ が rational sing. ならば, $k[x_0, \dots, x_n]$ の任意の grading に関して, $\sum_{i=0}^n \deg X_i > \deg f$ ($= \min \{f$ にあられる monomial の degree $\}$).

(2). (Boutot). ring S (ess. of finite type / k) が rat. sing. であり R が S の subring, R が群として S の直和因子

$\Rightarrow R$ も rational singularity である。(これは本稿に於ては、非) (常に重要な役割を果たす)

有限群又は reductive 代数群による quotient singularity は後で rational singularity である。

(3) X : smooth proj. var., $\mathcal{L} \in X$ 上の ample inv. sheaf.

$$R = R(X, \mathcal{L}) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n}). T^n \hookrightarrow k(X)[T] \text{ とする. (}$$

$\text{Spec}(R)$ は \mathcal{L}^{-1} に対応する line bundle の 0-section の contraction)

このとき,

(a) $R(X, \mathcal{L})$ が rational singularity $\Leftrightarrow \forall p > 0, \forall n \geq 0, H^p(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0$.

(b) $R(X, \mathcal{L})$ が canonical singularity $\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{Z}, \exists r > 0, a \leq -r,$
 $\omega_X^{\otimes a} \cong \mathcal{L}^{\otimes r}$.

従ってこのとき, $R(X, \mathcal{L})$ が canonical sing. ならば ω_X^{-1} は ample となり, Kodaira vanishing theorem により $R(X, \mathcal{L})$ は rational singularity になる。

§ 2. Rational singularity の判定.

R を最初の条件をみたす normal graded ring とするとき, Demazure により, $\exists D \in \text{Div}(X, \mathbb{Q})$ ($X = \text{Proj}(R)$), s.t.
 $R \cong R(X, D) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD))$ である事がわかる。
 また, (X, D) の粗に對し, $C^+ = \text{Spec}_X(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(nD))$,
 $C = \text{Spec}_X(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(nD))$ とおくと, $\Phi: C^+ \rightarrow \text{Spec}(R)$ が
 存在し, $\Phi|_C: C \xrightarrow{\sim} \text{Spec}(R) - \{\mathfrak{m}\}$ ($\mathfrak{m} = R_+ = \bigoplus_{n > 0} R_n$),
 $\Phi(S^+) = \{\mathfrak{m}\}$ となる ($S^+ = C^+ \setminus C$). これを図示す
 ると, 次のようになる。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & S^+ & \longrightarrow & \{\mathfrak{m}\} \\
 & \swarrow & \downarrow & & \cap \\
 X & \xleftarrow{\pi^+} & C^+ & \xrightarrow{\Phi} & \text{Spec}(R) \\
 & \swarrow \pi & \uparrow & & \uparrow \\
 & & C & \xrightarrow{\sim} & \text{Spec}(R) - \{\mathfrak{m}\}
 \end{array}$$

(注) E.G.A. II, §8 の notation によれば,

$$C^+ \cong \text{Proj}(R^q) \cong \text{Spec}_X \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(n) \right) \quad (\mathcal{O}_X(n) = \widetilde{R}(n))$$

である事が容易に確かめられる。

さて, §1 の例 (3) の $R(X, \mathcal{L})$ に於て, C^+ は smooth で, 従って Φ は $\text{Spec}(R)$ の resolution だった。一般には C^+ は smooth でないが, もし C^+ が rational singularity しかもたないとすると, $\text{Spec}(R)$ の resolution を C^+ に至由してとり事により $[f: \widetilde{X} \xrightarrow{g} C^+ \xrightarrow{\Phi} \text{Spec}(R)]$, $R^q g_* (\mathcal{O}_{\widetilde{X}}) = 0$ ($q > 0$), から Leray spectral sequence より, $R^p f_* (\mathcal{O}_{\widetilde{X}}) \cong R^p \Phi_* (\mathcal{O}_{C^+}) \cong \bigoplus_{n \geq 0} H^p(X, \mathcal{O}_X(n)) \cong \bigoplus_{n \geq 0} H^p(X, \mathcal{O}_X(nD))$ を得る。

補題 1. C^+ が rational singularity $\Leftrightarrow \text{Spec}(R) - \{m\}$ が nat. sing.

(証明) \Rightarrow は $\text{Spec}(R) - \{m\} \cong C \xrightarrow{\text{open}} C^+$ より自明。

\Leftarrow $\text{Spec}(R) - \{m\} \cong \text{Spec}(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(nD))$ が rational sing.

$\Rightarrow [\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(nD)][T]$ を so. $\deg(T) = -1$ とおくと,

$\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(nD)$ は $[\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(nD)][T]$ の degree 0 と同型:

$[\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(nD)][T]_0$ は $[\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(nD)][T]$ の直和因子だから,

Boutot の定理により rational singularity である。

補題 2. $R^p \Phi_* (\mathcal{O}_{C^+}) \cong H^p(C^+, \mathcal{O}_{C^+}) \cong \bigoplus_{n \geq 0} H^p(X, \mathcal{O}_X(nD)) \cong \bigoplus_{n \geq 0} [H_m^{p+1}(R)]_n$.

($p \geq 1$)

(証明) [W], §2, 命題 1. 参照

以上の2つの補題により次を得る。

定理. $\text{Spec}(R) - \{m\}$ が *rational singularity* のとき,

$$R^p f_* (\mathcal{O}_X) \cong \bigoplus_{n \geq 0} [H_m^{p+1}(R)]_n.$$

特に, R が *rational singularity* $\Leftrightarrow R$ は *Cohen-Macaulay* $\Leftrightarrow a(R) = 0$.

[但し, $\dim R = d$ のとき, $a(R) \stackrel{\text{def.}}{=} \max \{i \mid (H_m^d(R))_i \neq 0\}$ である.]

R が *Cohen-Macaulay* で, $f \in R$ が $\deg(f) = s$ の正則元 のとき,

$a(R/fR) = a(R) + s$ であり, 不変量 $a(R)$ は環論的に計算可能な量であると云える.]

例. $R = k[x_1, \dots, x_{n+r}] / (f_1, \dots, f_r)$ が完全交叉 のとき,

$$a(R) = - \sum_{i=1}^{n+r} \deg(x_i) + \sum_{j=1}^r \deg(f_j). \quad \text{従って, } \text{Spec}(R) - \{m\}$$

が *rational singularity* のとき, R が *rational sing.* $\Leftrightarrow \sum \deg x_i > \sum \deg f_j$.

§3. Canonical singularity の判定.

$X \in \text{normal proj. scheme} / k$

$$D = \sum \frac{p_V}{q_V} \cdot V \in \text{Div}(X, \mathbb{Q}) \quad (\text{但し, } q_V > 0, (p_V, q_V) = 1 \ (\forall V)).$$

条件 " $\exists N > 0, ND$ は ample Cartier divisor " をみたすとし,

$R = R(X, D)$ とする。また,

$$D' = \sum \frac{q_V - 1}{q_V} \cdot V \quad \text{とおく。 } C^+, S^+ \text{ 等は §2 の記号を使う。}$$

補題 1. $\omega_{C^+} \cong \bigoplus_{n > 0} \mathcal{O}_X(K_X + D' + nD)$. (divisor の言葉で述べると, $\text{div}_{C^+}(\omega_{C^+}) \equiv \pi^*(K_X + D') - S^+$.)

(証明). 1°. D が ample Cartier divisor のときは知られている。

2°. $(C^+)^{(N)} = \text{Spec}_X \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(nD) \right)$ とおくと, $C^+ \rightarrow (C^+)^{(N)}$ は finite morphism であり, $\omega_{C^+} \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{C^+}}(\mathcal{O}_{C^+}, \omega_{(C^+)^{(N)})}$. と
して求めればよい.

このとき, $\Phi_*(\omega_{C^+}) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + D' + nD))$.

$\omega_R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + D' + nD))$ だから, $a(R) = -\min\{i \mid (\omega_R)_i \neq 0\}$ であり,

系. $\Phi_*(\omega_{C^+}) = \omega_R \iff a(R) < 0$.

補題 2. $\omega_R^{[r]} \cong R(a')$ のとき, $\text{div}(\Phi^*(\omega_R^{[r]})) \equiv r[\pi^*(K_X + D')] + a'S^+$

(証明). Φ は S^+ の contraction だから, $\exists b \in \mathbb{Z}$,

$\text{div}(\Phi^*(\omega_R^{[r]})) = r\pi^*(K_X + D') + bS^+$. しかるに, $\omega_R^{[r]} \cong R(a')$

$\iff r(K_X + D') \equiv a'D$ in $\text{Div}(X)$ と, $\pi^*(D) \equiv -S^+$ と,

$\Phi^*(\omega_R^{[r]}) \otimes_{\mathcal{O}_{C^+}} \mathcal{O}_{S^+} \equiv \mathcal{O}_{S^+}$ に注意すると, 結果を得る.

$\text{Spec}(R)$ の resolution を

$f = [\tilde{X} \xrightarrow{g} C^+ \xrightarrow{\Phi} \text{Spec}(R)]$ と分解するとき, $g_*(\omega_{\tilde{X}}^{\otimes r})$

$\subset \omega_{C^+}^{[r]}$ は常に成立するから, $f_*(\omega_{\tilde{X}}^{\otimes r}) = \omega_R^{[r]}$ となるため

に, $\Phi_*(\omega_{C^+}^{[r]}) = \omega_R^{[r]}$ となる事は必要条件である。従って,

定理. \mathbb{C} 上 $R(X, D)$ が canonical singularity

$\iff \exists r > 0$, $r(K_X + D') \equiv a'D$ in $\text{Div}(X)$ かつ $a' \leq -r$.

§ 3. Rational singularity のある環論的性質.

一般に, (A, \mathfrak{m}) は n 次元 Noeth. local ring で, $|A/\mathfrak{m}| = \infty$ とする.

このとき $\sigma_f = (t_1, \dots, t_n) \subset \mathfrak{m}$ で, \mathfrak{m} は integral over σ_f であるものが存在する (\mathfrak{m} の minimal reduction). このとき,

$$t(A) = \min \{t \mid \mathfrak{m}^t \subset \sigma_f\} \quad \text{とおこう.}$$

M. Artin, H. Laufer はそれぞれ, 2次元 rational sing., 2次元の "minimally elliptic" singularity に関してかなり詳しい環論的記述をしているが, この事は実は, それぞれ,

$t(A) \leq 2, 3$ である事から導く事ができる。また, $t(A) = 2$ で A が Cohen-Macaulay 又は $t(A) = 3$ で A が Gorenstein のとき, J. Sally は $\hat{g}_m(A)$ がそれぞれ Cohen-Macaulay, Gorenstein になる事を示している。 $t(A)$ に関し, 次のような事が知られている。

定理 [L-T]. (A, \mathfrak{m}) を ① regular local ring ② 2次元, rational singularity (任意標数) ③ $cl(\mathfrak{m}) = 0$ 上 ess. of finiteness type 又は analytic local ring で rational singularity.

のいずれかとする。 $\dim A = n$ のとき, $\forall \lambda \geq 1$
 $\forall \lambda \geq 1$ に対し, $\overline{I^{\lambda+n-1}} \subset I$ ($\bar{}$ は integral closure を示す.)

これを $I = \sigma_f$ に対しても使うと, " A が rational singularity, $\dim A = n \Rightarrow t(A) \leq n$ " を得る。この事実の一つの応用として,

系. A が rational singularity で $\dim A = n$, A が complete intersection $\Rightarrow \text{emb.}(A) (= \dim_{\mathfrak{m}} \mathfrak{m}^2 / \mathfrak{m}^2) \leq 2n-1$.

問題. 一般に, 「 (A, m) が *rational singularity* $\Rightarrow \text{gr}_m(A)$ は Cohen-Macaulay (又は (A, m) が Gorenstein *rational sing.* $\Rightarrow \text{gr}_m(A)$ が Gorenstein)」は成立するだろうか?

[追記] §3の内容に関しては後藤四郎氏に教えられた点が多い。この場をお借りして感謝の意を表したい。

References.

- [L-T] J. Lipman and B. Teissier: On a theorem of Briançon-Skoda about integral closures of ideals, (preprint).
- [R] M. Reid: Canonical 3-folds, (preprint, Warwick univ., September, 1979).
- [D] M. Demazure: Anneaux gradués normaux, preprint, C.N.R.S. 169, Mai 1979.
- [W] K. Watanabe: Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings, 数理研講究録, 374 (1980).