数理解析研究所講究録
402巻 1980年 155-162

特異点をもつ解の積分表現と漸近挙動
(Hamadaの解の積分表現)

上智大 理工 数学
大内 忠

§1. ΩをC^{n+1}内の原点を含む領域とする. 座標を$z=(z_0, z_1, \ \ , z_n)=(z', z_n)$と表わす。$L(z,\partial)$を正則函数を係数とする$m$階線型偏微分作用素とする。$K=\{\varphi(z)=0\}$を, $L(z,\partial)$の原点を含む非特異特性曲面とする。$\mathcal{O}(\Omega)$でΩ上の正則函数の集合, $\mathcal{O}(\widetilde{\Omega-K})$で$(\Omega-K)$のuniversal covering space $(\widetilde{\Omega-K})$上の正則函数の集合を表わす, さて次のproblemを考える

$$
(1.1)\quad \begin{cases} L(z,\partial)u(z)=0 \\ u(z)\in \mathcal{O}(\widetilde{\Omega-K}) \end{cases}
$$

を満たす$u(z)$の特性曲面Kの近傍での性質を調べ, Kの特徴づけを行う,

このことに対する一つの解答, すなわち, 定理を述べるために, $L(z,\partial)$及びKの条件を記述する,

(A.1) $L(z,\partial)$の主シンボルを$\ell(z,\xi)$とする. $\ell(z,\xi)$

は $\ell(z,\zeta)=p(z,\zeta)^{k}q(z,\zeta)$ と表わされる。$p(z,\zeta),\ q(z,\zeta)$ は ζ の斉次多項式である。Kについて次のことが成り立つ

$$(1.2)\left\{\begin{array}{l} p(z,\frac{\partial\varphi}{\partial z})=0\ ,\quad \sum_{i=0}^{n}\left|\frac{\partial p}{\partial\zeta_i}(z,\frac{\partial\varphi}{\partial z})\right|\neq 0 \\ q(z,\frac{\partial\varphi}{\partial z})\neq 0 \qquad \text{on } K\ . \end{array}\right.$$

Remark. (1.1) はKが多重度 k（一定）の特性曲面であるという条件である。(1.2) の仮定のもとでは、次のことが示せる：

原点の近傍で正則な函数 $a(z)$ で $a(0)=1$ かつ $p(z,\frac{\partial}{\partial z}(a\varphi))\equiv 0$ となるものが存在する（Komatsu [3], Ōuchi [4]）。

したがって以下 $p(z,\frac{\partial\varphi}{\partial z})\equiv 0$ とする。Sを $z=0$ を含む超曲面とし、$z=0$ を通るKの bicharacteristic curve はSに transversal であるとする。Sが $z_0=0$ で表わされるように座標をとる。次のような problem を考える

$$(1.3)\quad \left|\begin{array}{l} L(z,\partial)\,u(z)=0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{l}u(0,z')=u_l(z')\ ,\quad 0\le l\le k-1\ , \\ u(z)\in\mathcal{O}(\widetilde{\Omega_1-K})\qquad(\Omega\supset\Omega_1) \end{array}\right.$$

ここで $u_l(z')\in\mathcal{O}(\widetilde{(\Omega-K)\cap S})$.

Theorem 1. (1.3) の解は原点のある近傍 Ω_1 で存在し、$\mathcal{O}(\Omega_1)$（正則函数）を除いて（法として）一意である。

存在は Hamada-Leray-Wagschal [2] より，一意性は，Goursat problem の一意性より従う。 この Theorem により，(1.1) の解は S 上の値を知れば，正則函数を modulo として決まる。 よって以下，(1.3) の解について考察する。 S のことを初期平面，$u_\ell(z')$ $(0 \le \ell \le k-1)$ のことを初期値とよぶことにする。

§2. 以下簡単のため多重度 $k=2$ とする。 まず簡単な例により，以下に述べる定理の内容の理解の手助けとしよう。

例.

$$
(2.1) \quad \begin{cases} Lu = \left\{ \left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{\partial}{\partial y} \right\} u(x, y) = 0 \qquad (x, y) \in \mathbb{C}^2 \\ u(0, y) = \dfrac{1}{y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 \end{cases}
$$

$$
K = \{ y = 0 \} \qquad k = 2 .
$$

この解は

$$
(2.2) \quad u(x, y) = \frac{1}{y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} \left(\frac{x^2}{y} \right)^n
$$

と表わされ，K は真性特異点である。 一方，$u(x, y)$ の K の近傍での漸近挙動を調べると次のことがわかる：

(i) $\quad \left| \arg \pm \dfrac{x}{\sqrt{y}} \right| \le \dfrac{\pi}{4} - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$ において

$$
(2.3) \quad u(x, y) = \pm \frac{\sqrt{\pi}\, x}{2y\sqrt{y}} \exp\left(\frac{x^2}{4y} \right) \left(1 + O\left(\left(\frac{\sqrt{y}}{x} \right)^4 \right) \right) \quad \left(\begin{array}{l} \left| \dfrac{x}{\sqrt{y}} \right| \to \infty \\ \text{複号同順} \end{array} \right)
$$

(iii) $\frac{\pi}{4}+\varepsilon \leq \left|\arg \frac{x}{\sqrt{y}}\right| \leq \frac{3}{4}\pi-\varepsilon$ において

$$(2.4)\qquad x^2 u(x,y) = \left(1 + O\left(\frac{y}{x^2}\right)\right) \qquad \left(\left|\frac{x}{\sqrt{y}}\right| \to \infty\right).$$

(2.1) の解を (2.2) の型で求めるのが Hamada-Leray-Wagschal の理論である。我々は (2.3), (2.4) の型の漸近挙動をより一般の作用素に対して得ることを目標とする。

さて $L(z,\partial) = L_m(z,\partial) + L_{m-1}(z,\partial) + \cdots$, $L_j(z,\partial)$ j次斉次, と表わし, その subprincipal symbol $S_p(z,\xi)$ を

$$S_p(z,\xi) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^2 L_m(z,\xi)}{\partial z_i \partial \xi_i} - L_{m-1}(z,\xi)$$

で定義する。

Theorem 2. 条件 (A.1) および

$$(A.2)\qquad S_p\left(z, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\Big|_K \neq 0$$

を仮定する。$\psi(z)$ を次の方程式の解とする:

$$(2.5)\qquad \begin{cases} g\left(z,\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial p}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}\psi(z)\right)^2 + S_p\left(z,\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0 \\ \psi(0,z') = 0 \end{cases}$$

$\omega(z) = \psi(z)\varphi(z)^{-1/2}$ とおく。Problem (1.3) の初期条件 $u_0(z')$, $u_1(z')$ は $K \cap S$ において pole をもつとする。この時 (1.3) の解 $u(z)$ の K の近傍での漸近挙動について次のことが成り立つ。

$\alpha < \arg \varphi(z) < \beta$ とする.

(i) $|\arg \pm \omega(z)| < \frac{\pi}{4} - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$ において

(2.6) $u(z) = \left(\frac{\psi(z)}{\varphi(z)}\right)^{p_\pm} \exp\left(\frac{1}{4}\frac{\psi(z)^2}{\varphi(z)}\right)\omega(z)^{-1}\left(\nu^\pm(z) + O(\omega(z)^{-1})\right)$,

$|\omega(z)| \longrightarrow \infty$ (複号同順),

ここで $\nu^\pm(z)$ は正則函数, $p_\pm \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ で, 少くとも一つは有限 (p_+ or $p_- = -\infty$ は $u(z)$ が有界であることを意味する).

(ii) $\frac{\pi}{4} + \varepsilon < \arg \omega(z) < \frac{3}{4}\pi - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$ ならば

(2.7) $|\psi(z)^{p'} u(z)| \leq C_{\alpha,\beta,\varepsilon}$

がなりたつ.

Remark. $\omega(z)$ の偏角の値により, 解の挙動が大きく異なっている。 Stokes 現象ともみなせる。

さて, この Theorem 2 は解 $u(z)$ の積分表示式を解析することにより得られる.

Theorem 3. (積分表示式). 仮定は Theorem 2 と同じとする. この時 (1.3) の解 $u(z)$ は次のようにあらわすことができる.

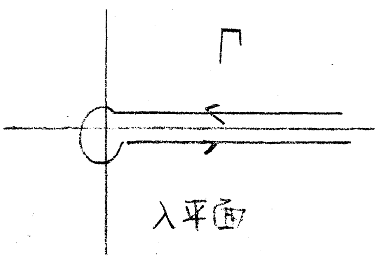
$|\arg \varphi(z)| < \frac{\pi}{2}$ とする.

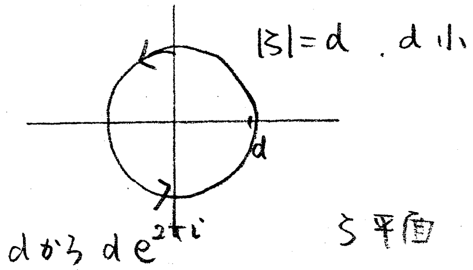
(2.8) $$u(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\exp(-\lambda^2\varphi(z))\,W(z,\lambda)\,h(\lambda)(\log\lambda)\,d\lambda+V(z)+W(z),$$

ここで

(2.9) $$W(z,\lambda)=\int_{|\zeta|=d}\exp(-\lambda\zeta)\,\hat{w}(z,\zeta)\,d\zeta .$$

式(2.8), (2.9) に現われる積分路, 函数を説明しよう. 積分路 Γ および $|\zeta|=d$ は次の図のようにとる。





また, $W(z)\in\mathcal{O}(\Omega_1)$, $V(z)\in\mathcal{O}(\widetilde{\Omega_1-K})$ で, $|\arg\varphi(z)|<\frac{\pi}{2}$ において $V(z)$ は K まで smooth な函数。 $h(\lambda)$ は λ の多項式（初期条件が pole であることに対応する）, $\hat{w}(z,\zeta)$ は $\zeta\pm\varphi(z)=0$ に極あるいは対数特異点をもつ函数.

$\varphi(z)$ の偏角がより一般の場合, $\hat{w}(z,\zeta)$ の構成等は Ouchi [4], [5] を見られたい。 Theorem 3 の積分表示式より, Theorem 2 を導くには (2.8) の第1項を調べればよい。

$\varphi(z)\to 0$ の解の挙動は，$W(z,\lambda)$ の $\lambda\to\infty$ の挙動を知ることにより解析できる。 $W(z,\lambda)$ の $\lambda\to\infty$ の挙動は (2.9) において $\hat{\varphi}(z,\xi)$ の特異点 $\xi\pm\psi(z)=0$ による寄与が大きい。以上が Theorem 2 の証明の方針である。

§3. ここで，常微分方程式との類似点(対応)についてみてみよう。常微分方程式の特異点の近傍における局所理論において，最も重要な概念は，確定特異点，不確定特異点であろう。このことを考慮して表にまとめてみよう。

	O. D. E	P. D. E.
作用素と特異点 K	$z^2\left(\frac{d}{dz}\right)^m + a(z)\left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1} + \cdots$ $K=\{z=0\}$	$Q(z,\partial)P(z,\partial)^2 + R(z,\partial) + \cdots$ $K=\{\varphi(z)=0\}$
確定特異点	$a(0)=0$. 斉次解は，べき，log型特異点	$S_p\left(z,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)=0$ on $K^{(*)}$ 初期値問題 (1.3) の解は初期条件が pole ならば解は K上 pole, log 型
不確定特異点	$a(0)\neq 0$ $e^{\frac{a}{z}} z^{\alpha}(a_0 + a_1 z + \cdots\ )$ と漸近挙動する斉次解がある。	$S_p\left(z,\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\neq 0$ 初期値問題 (1.3) の解は初期条件が pole であってもある領域では指数型の挙動をする。

(*) Hamada [1] における Levi 条件より弱い。

多重度 $k \geq 3$ の時，より詳しいことについては Ōuchi [4]，[5] をみられたい。

文献

[1] Hamada, Publ. RIMS. Kyoto Univ., 6 (1970) 357-384.

[2] Hamada-Leray-Wagschal, J. Math. Pure. Appl., 55 (1976) 297-352.

[3] Komatsu, J. Fac Sci. Univ. Tokyo. 23 (1976) 297-342.

[4][(**)] Ōuchi, J. Fac Sci. Univ. Tokyo 27 (1980) 1-36

[5][(**)] Ōuchi 同上 37-85.

(**) [4] は $k=2$，[5] は一般の k について取り扱っている。