数理解析研究所講究録
402巻 1980年 112-125

Hamada's theorem for Tricomi type equations.

同志社大　工　　浦部治一郎

複素領域に於て解析的な係数を持つ線型偏微分方程式に対する非特性的初期値問題を扱う。初期値が解析的な場合 Cauchy-Kowalewskaya の定理として解の局所的存在と一意性が知られている。初期値が極を持つ場合にはどうなるのかと云う問題があるが、偏微分作用素の特性根の多重度が一定の場合は、浜田、Leray、Wagschal [1] で又、包合的な特性根をもつ場合は中村 [3] 浜田、中村 [2] で扱われた。ここでは Tricomi 作用素を一般化した作用素に対して同様の問題を考える。これは浦部 [5] の拡張である。（この問題を考えるに当り色々と御教示いただいた浜田先生に感謝の意を表します。）

§1. 記号　$x=(x_0, x_1, \cdots, x_n)\in \mathbb{C}^{n+1}$　　$x'=(x_1, \cdots, x_n)$

$\xi=(\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)$　　$\xi'=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$

$D=(D_0, D_1, \cdots, D_n)$　　$D'=(D_1, \cdots, D_n)$　但し $D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$

Ω : $\mathbb{C}^{n+1}$ の原点の近傍

$L^k(\Omega)$: Ωに於て解析的な係数を持つk次の線型偏微分作用素全体

Triconi作用素 $D_0^2 - x_0 D_1^2$ の一般化として次の型の作用素Lを考える。

$$L(x,D) = P(x,D)^2 - x_0 Q(x,D') + R(x,D)$$

$$L(x,D) \in L^{2m}(\Omega),\ P(x,D) \in L^m(\Omega),\ Q(x,D) \in L^{2m}(\Omega),\ R(x,D) \in L^{2m-1}(\Omega)$$

ここで $P(x,\xi)$ と $Q(x,\xi')$ に次の仮定をする。

仮定A
- (i) $P(x,\xi)$ は m 次斉次多項式（ξについての）。
- (ii) $P(x;1,0,\cdots,0) \equiv 1$
- (iii) ξ_0に関する方程式 $P(0;\xi_0,1,0,\cdots,0)=0$ は互いに相異なる m 根 λ_i $(i=1,\cdots,m)$ を持つ。

仮定B
- (i) $Q(x,\xi')$ は $2m$ 次斉次多項式（ξ'についての）
- (ii) $Q(0;1,0,\cdots,0) \neq 0$

この $L(x,D)$ に対して次の非特性的初期値問題を考える。

$$(*)\quad \begin{cases} L(x,D)\,u(x) = 0 \\ D_{x_0}^h u(0,x') = w_h(x') \quad (h=0,\cdots,2m-1) \end{cases}$$

ここで $w_h(x')$ は $x_0=x_1=0$ 上に極を持つ。

まず、$L(x,D)$ に対して $x_0=x_1=0$ を出発する m 枚の特性面が存在する。その特性面を K_i $(i=1,\cdots,m)$ と記す。K_i は次の特性方

程式の解 $\varphi_i^{\pm}(x)$ によって、$\mathbb{K}_i=\{x\,;\,\varphi_i^{\pm}(x)=0\}$ として表わされる。

$$\begin{cases} \mathring{L}(x, \varphi^{\pm}_{i\,x})=0 \\ \varphi_i^{\pm}(0, x')=x_1 \qquad \varphi^{\pm}_{i\,x_0}(0)=\lambda_i \end{cases}$$

（但し $\mathring{L}(x,\xi)\equiv P(x,\xi)^2-x_0Q(x,\xi')$ ）

$\mathbb{K}\equiv\bigcup_{i=1}^{m}\mathbb{K}_i$ とする。得られた結果は初期値問題(※)の解が $\mathbb{C}^{n+1}$ の原点の小さな近傍 D_r から $\mathbb{K}$ を除いた集合 $D_r\setminus\mathbb{K}$ 上の一般被覆面上で存在し正則かつ一意的であると云う事である。もう少し詳しく述べるため次の補助関数を導入する。

$$k_\alpha(\rho)\equiv\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(\dfrac{\rho^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)=(\log\rho+\psi(\alpha+1))\dfrac{\rho^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ \text{特に } \alpha=-1,-2,\cdots \text{ に対しては } |\alpha+1|!\,(-1)^{\alpha-1}\rho^\alpha \end{cases}$$

$\psi(\alpha+1)\equiv\dfrac{\frac{d}{d\alpha}\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}$ である。

$\dfrac{d}{d\rho}k_\alpha(\rho)=k_{\alpha-1}(\rho)$ なる関係がある。

$$\begin{cases} X_\alpha(\theta,\rho)\equiv\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(F\left(\frac{1}{6},-\alpha,\frac{1}{3};1-\frac{\varphi^+}{\varphi^-}\right)\dfrac{(\varphi^+)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \\ Y_\alpha(\theta,\rho)\equiv\dfrac{\partial}{\partial\alpha}\left(F\left(\frac{5}{6},-\alpha,\frac{5}{3};1-\frac{\varphi^+}{\varphi^-}\right)\right)\dfrac{\theta(\varphi^+)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right) \end{cases}$$

$\varphi^+=\rho+\frac{2}{3}\theta^{3/2}$，$\varphi^-=\rho-\frac{2}{3}\theta^{3/2}$ である。

これら X_α, Y_α は各々 Tricomi 方程式 $(\partial_\theta^2-\theta\partial_\rho^2)X_\alpha=0$, $(\partial_\theta^2-\theta\partial_\rho^2)Y_\alpha=0$ をみたし、初期値は $X_\alpha(0,\rho)=k_\alpha(\rho)$, $X_{\alpha\theta}(0,\rho)=0$　$Y_\alpha(0,\rho)=0$, $Y_{\alpha\theta}(0,\rho)=k_\alpha(\rho)$ である。$\frac{\partial}{\partial\rho}X_\alpha=X_{\alpha-1}$, $\frac{\partial}{\partial\rho}Y_\alpha=Y_{\alpha-1}$ なる関係がある。

これらの補助関数の性質については浦部[5]を参照されたい。

得られた結果は次の如し。

定理　$r>0$を充分小さくとると，初期値問題(*)に対して，$D_r \setminus K$上の一般被覆面上で正則な一意的な解が次の形で構成できる。

ここで $D_r = \{ x \in \Omega, |\varphi_i^{\pm}(x)| < r \}$.

$$u(x) = \sum_{\beta=1}^{m} \sum_{\alpha=-l-2m+1}^{+\infty} u_{\alpha,\beta}(x) X_{\alpha p}(\theta_\beta(x), \rho_\beta(x)) + g_{\alpha,\beta}(x) X_{\alpha\theta}(\theta_\beta(x), \rho_\beta(x))$$
$$+ v_{\alpha,\beta}(x) Y_{\alpha p}(\theta_\beta(x), \rho_\beta(x)) + h_{\alpha,\beta}(x) Y_{\alpha\theta}(\theta_\beta(x), \rho_\beta(x))$$

ここでlは初期値の極の最大位数。$u_{\alpha,\beta}(x)$, $g_{\alpha,\beta}(x)$, $v_{\alpha,\beta}(x)$, $h_{\alpha,\beta}(x)$ $\theta_\beta(x)$, $\rho_\beta(x)$はD_rで正則な関数。▌

定理の証明は上記の形式解が収束する事にある。まず，この$u_{\alpha,\beta}(x)$, $g_{\alpha,\beta}(x)$, $v_{\alpha,\beta}(x)$, $h_{\alpha,\beta}(x)$, $\theta_\beta(x)$, $\rho_\beta(x)$がどのように決定されていくかをみて，次にこれらの係数を優級数の方法で評価し，収束性をいう。尚，この形の解はD. Ludgig [3]により開発された。これらの係数の決定されていく過程をみる前に準備として，計算から始める。

§2

$L(x,D)$を形式解に作用させる。そのためには$L(x,D)[u(x)\,U(\theta(x),\rho(x))]$の計算をすればよい。ここで$u(x)$は$u_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}$, $v_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$のどれかでありUは$X_{\alpha p}$, $X_{\alpha\theta}$, $Y_{\alpha p}$, $Y_{\alpha\theta}$のどれかである。まず，$\partial_\rho^i \partial_\theta^j X_\alpha$, ($\partial_\rho^i \partial_\theta^j Y_\alpha$)を$\partial_\rho^k X_\alpha$, $\partial_\rho^{k-1}\partial_\theta X_\alpha$ ($k \le i+j$) ($\partial_\rho^k Y_\alpha$, $\partial_\rho^{k-1}\partial_\theta Y_\alpha$ ($k \le i+j$))の線型結合で表わす事が必要である。次の公式が得られる。

(公式1)　$U(\theta,\rho)$をTricomi方程式$(\partial_\theta^2 - \theta\partial_\rho^2)U = 0$をみたすとすると

$$\left.\begin{cases} \partial_\theta^{2r} U = \theta^r \partial_\rho^{2r} U + r(r-1)\theta^{r-2}\partial_\rho^{2r-2}\partial_\theta U + \cdots \\ \partial_\theta^{2r+1} U = \theta^r \partial_\rho^{2r}\partial_\theta U + r^2\theta^{r-1}\partial_\rho^{2r} + \cdots \end{cases}\right\}$$ が成立つ。

次に、次の記号を導入する。

$k(x,\xi)$ を ξ に関する l 次斉次多項式とする。

* $k^{(\alpha)}(x,\xi) \equiv (D_\xi)^\alpha k(x,\xi)$, $k_{(i)}(x,\xi) \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}(x,\xi)$, $k^{(i)}(x,\xi) \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_i} k(x,\xi)$ etc.

* $k_i(x,\xi,\eta)$ を次で定める。

$k(x, r\xi + s\eta) = \sum_{i=0}^{l} k_i(x, r\xi, s\eta) = \sum_{i=0}^{l} r^i s^{l-i} k_i(x,\xi,\eta)$

ここで、$\eta = (\eta_0, \cdots, \eta_n)$, $r, s \in \mathbb{C}^1$.

* $\partial_i \equiv \theta_{x_i}\partial_\theta + \rho_{x_i}\partial_\rho \quad (i = 0, \cdots, n) \qquad \partial = (\partial_0, \cdots, \partial_n)$

$D_i\partial_j \equiv \theta_{x_i x_j}\partial_\theta + \rho_{x_i x_j}\partial_\rho$ と定める。

chain rule より、

$D^\alpha U(\theta(x), \rho(x)) = \partial^\alpha U + \frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{n} (\partial^\alpha)^{(i,j)} (D_i\partial_j) U + \cdots$

Leibnizの公式 $k(x,D)(u(x)v(x)) = \sum_{|\alpha|\le l} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha u \cdot k^{(\alpha)}(x,D)v$ と併わせて

(公式2) $k(x,D)(u(x)U(\theta(x), \rho(x))) = u(x)\cdot k(x,\partial)U + u(x)\cdot \frac{1}{2}k^{(i,j)}(x,\partial)(D_i\partial_j)U$
$+ D_i u \cdot k^{i}(x,\partial)U + \cdots \Big|_{\theta=\theta(x),\ \rho=\rho(x)}$.

(ここで i, j は共に 0 から n までの和であるが、Σ を省略する 又以後 $|_{\theta=\theta(x), \rho=\rho(x)}$ も省略する。)

$k(x,\partial)U$ を計算しなければならない。k_i の定義より

(公式3) $k(x,\partial) = k(x, \theta_x\partial_\theta + \rho_x\partial_\rho) = \sum_{i=0}^{l} k_i(x, \theta_x, \rho_x)\partial_\theta^i \partial_\rho^{l-i}$

(公式1) と (公式3) より次が得られる。

(公式4) $U(\theta,\rho)$ は Tricomi 方程式 $(\partial_\theta^2-\theta\partial_\rho^2)U=0$ を充たすとする。

(i) $k(x,\partial)U_\rho(\theta(x),\rho(x))=\left[\sum_{i=0}^{[\frac{l}{2}]}k_{2i}(x,\theta_x,\rho_x)\theta^i\right]\partial_\rho^{l+1}U$

$+\left[\sum_{i=0}^{[\frac{l-1}{2}]}k_{2i+1}(x,\theta_x,\rho_x)\theta^i\right]\partial_\rho^l\partial_\theta U+\left[\sum_{i=0}^{[\frac{l}{2}]}i(i-1)k_{2i}(x,\theta_x,\rho_x)\theta^{i-2}\right]\partial_\rho^{l-1}\partial_\theta U$

$+\left[\sum_{i=0}^{[\frac{l}{2}]}i^2k_{2i+1}(x,\theta_x,\rho_x)\theta^{i-1}\right]\partial_\rho^l U+\cdots$

$\equiv {}^1k(x,\theta_x,\rho_x)\partial_\rho^{l+1}U+{}^2k(x,\theta_x,\rho_x)\partial_\rho^l\partial_\theta U+{}^4k(x,\theta_x,\rho_x)\partial_\rho^{l-1}\partial_\theta U+{}^3k(x,\theta_x,\rho_x)\partial_\rho^l U+\cdots$ とおく

(ii) $k(x,\partial)U_\theta(\theta(x),\rho(x))=\left[\sum_{i=0}^{[\frac{l-1}{2}]}k_{2i+1}(x,\theta_x,\rho_x)\theta^{i+1}\right]\partial_\rho^{l+1}U$

$+\left[\sum_{i=0}^{[\frac{l}{2}]}k_{2i}(x,\theta_x,\rho_x)\theta^i\right]\partial_\rho^l\partial_\theta U+\left[\sum_{i=0}^{[\frac{l}{2}]}k_{2i}(x,\theta_x,\rho_x)i^2\theta^{i-1}\right]\partial_\rho^l U$

$+\left[\sum_{i=0}^{[\frac{l-1}{2}]}k_{2i+1}(x,\theta_x,\rho_x)i(i+1)\theta^{i-1}\right]\partial_\rho^{l-1}\partial_\theta U+\cdots$

$\equiv {}^1k'(x,\theta_x,\rho_x)\partial_\rho^{l+1}U+{}^2k'(x,\theta_x,\rho_x)\partial_\rho^l\partial_\theta U+{}^3k'(x,\theta_x,\rho_x)\partial_\rho^l U+{}^4k'(x,\theta_x,\rho_x)\partial_\rho^{l-1}\partial_\theta U+\cdots$ とおく

又同様にして次を得る。

(公式5) (i) $k(x,\partial)\partial_\theta^2U={}^1k'(x,\theta_x,\rho_x)\partial_\rho^{l+1}\partial_\theta U+\theta({}^2k')\partial_\rho^{l+1}U+\cdots$

(ii) $k(x,\partial)\partial_\theta\partial_\rho U={}^1k'(x,\theta_x,\rho_x)\partial_\rho^{l+2}U+{}^2k'\partial_\rho^{l+1}\partial_\theta U+\cdots$

(iii) $k(x,\partial)\partial_\rho^2U={}^1k(x,\theta_x,\rho_x)\partial_\rho^{l+2}U+{}^2k(x,\theta_x,\rho_x)\partial_\rho^{l+1}\partial_\theta U+\cdots$

各 ${}^hk$, ${}^hk'$ の定義より次が成立つ。

(i) ${}^1k(x,\theta_x,\rho_x)=k(x,\rho_x)+\theta({}_1\tilde{k}(x,\theta_x,\rho_x))$

(ii) ${}^2k(x,\theta_x,\rho_x)=k^{(i)}(x,\rho_x)\theta_{x_i}+\theta({}_2\tilde{k}(x,\theta_x,\rho_x))$

(iii) ${}^1k'(x,\theta_x,\rho_x)={}^2k(x,\theta_x,\rho_x)\theta$

(iv) ${}^2k'(x,\theta_x,\rho_x)={}^1k(x,\theta_x,\rho_x)$

(v) ${}^3k'(x,\theta_x,\rho_x)=\frac{1}{2}k^{(i,j)}(x,\rho_x)\theta_{x_i}\theta_{x_j}+\theta({}_3\tilde{k}(x,\theta_x,\rho_x))$

ここで $k_0(x,\xi,\eta)=k(x,\eta)$, $k_1(x,\xi,\eta)=k^{(j)}(x,\eta)\xi_j$, $k_2(x,\xi,\eta)=\frac{1}{2}k^{(i,j)}(x,\eta)\xi_i\xi_j$

を使った。

次に，$K(x,\partial)$ の形の２つの operator の積公式をみる。

(公式6)　$M(x,\partial)$, $N(x,\partial)$ を各々，m次、n次の∂-微分作用素とする。

(i) $M(x,\partial)\cdot N(x\cdot\partial)\partial_\rho U = ({}^1M\cdot{}^1N+{}^1M'\cdot{}^2N)\partial_\rho^{m+n+1}U+({}^2M\cdot{}^1N+{}^2M'\cdot{}^2N)\partial_\rho^{m+n}\partial_\theta U$

$+({}^3M\cdot{}^1N+{}^3M'\cdot{}^2N+{}^1M\cdot{}^3N+{}^1M'\cdot{}^4N)\partial_\rho^{m+n}U$

$+({}^4M\cdot{}^1N+{}^4M'\cdot{}^2N+{}^2M\cdot{}^3N+{}^2M'\cdot{}^4N)\partial_\rho^{m+n-1}\partial_\theta U+\cdots$

(ii) $M(x,\partial)N(x,\partial)\partial_\theta U$は上式で${}^1N$を${}^1N'$，${}^2N$を${}^2N'$で置きかえたもの。

ここで，${}^kM={}^kM(x,\theta_x,\rho_x)$, ${}^kN={}^kN(x,\theta_x,\rho_x)$ etc.（$k=1.2.3.4$）である。

以上の公式を使って$L(x,D)(u(x)U_\rho(\theta(x),\rho(x))+g(x)U_\theta(\theta(x),\rho(x)))$を計算すると，

$L(x,D)(u(x)U_\rho+g(x)U_\theta)=u\cdot\mathring{L}(x,\partial)U_\rho+g\cdot\mathring{L}(x,\partial)U_\theta$ $+$

$u\{P^{(i)}(x,\partial)P^{(j)}(x,\partial)+P(x,\partial)P^{(i,j)}(x,\partial)-\frac{x_0}{2}Q^{(i,j)}(x,\partial)\}(D_i\partial_j)U_\rho$ $+$

$g\cdot\{P^{(i)}(x,\partial)P^{(j)}(x,\partial)+P(x,\partial)P^{(i,j)}(x,\partial)-\frac{x_0}{2}Q^{(i,j)}(x,\partial)\}(D_i\partial_j)U_\theta$ $+$

$D_iu\cdot\{2P(x,\partial)P^{(i)}(x,\partial)-x_0Q^{(i)}(x,\partial)\}U_\rho+D_ig\{2P(x,\partial)P^{(i)}(x,\partial)-x_0Q^{(i)}(x,\partial)\}U_\theta$

$+\ u\cdot\mathring{R}(x,\partial)U_\rho+g\cdot\mathring{R}(x,\partial)U_\theta+\cdots$

但し，$\mathring{R}(x,\xi)=R_{2m-1}(x,\xi)+R^{(i)}(x,\xi)P_{(i)}(x,\xi)$

(公式7) $L(x,D)(u(x)U_\rho+g(x)U_\theta)=({}^1\mathring{L}\cdot u+\theta\cdot{}^2\mathring{L}\cdot g)\partial_\rho^{2m+1}U+({}^2\mathring{L}\cdot u+{}^1\mathring{L}g)\partial_\rho^{2m}\partial_\theta U$

$+[\theta\mathcal{L}g+\mathcal{M}u+(\theta(\rho_{x_ix_j}\mathcal{P}^1_{ij}+\theta_{x_ix_j}\mathcal{P}^2_{ij}+{}^2\mathring{R})+{}^3\mathring{L}')g$

$+(\rho_{x_ix_j}\mathcal{P}^2_{ij}+\theta\theta_{x_ix_j}\mathcal{P}^1_{ij}+{}^4\mathring{L}'+{}^1\mathring{R})u\,]\,\partial_\rho^{2m}U$

$+[\mathcal{L}u+\mathcal{M}g+(\rho_{x_ix_j}\mathcal{P}^1_{ij}+\theta_{x_ix_j}\mathcal{P}^2_{ij}+{}^4\mathring{L}+{}^2\mathring{R})u$

$+(\rho_{x_ix_j}\mathcal{P}^2_{ij}+\theta\theta_{x_ix_j}\mathcal{P}^1_{ij}+{}^4\mathring{L}'+{}^1\mathring{R})g\,]\,\partial_\rho^{2m-1}\partial_\theta U+\cdots.$

但し，ここで$\mathcal{L}=\mathcal{L}(x,\theta_x,\rho_x,D)=\{2({}^1P(x,\theta_x,\rho_x)\cdot{}^2P^{(i)}(x,\theta_x,\rho_x)+{}^2P(x,\theta_x,\rho_x)\cdot{}^1P^{(i)}(x,\theta_x,\rho_x))-x_0\cdot{}^2Q^{(i)}(x,\theta_x,\rho_x)\}D_i$

$$\mathcal{M}=\mathcal{M}(x,\theta_x,\rho_x,D)=\{2({}^1P(x,\theta_x,\rho_x)\cdot{}^1P^{(i)}(x,\theta_x,\rho_x)+\theta\cdot{}^2P^{(i)}(x,\theta_x,\rho_x)\cdot{}^2P(x,\theta_x,\rho_x))-x_i\,{}^1Q^{(i)}(x,\theta_x,\rho_x)\}D_i$$

$$\mathcal{P}^1_{ij}=\{{}^1P^{(i)}\cdot{}^2P^{(j)}+{}^2P^{(i)}\cdot{}^1P^{(j)}+{}^1P\cdot{}^2P^{(i,j)}+{}^2P\cdot{}^1P^{(i,j)}-\frac{1}{2}x_0\cdot{}^2Q^{(i,j)}\}(x,\theta_x,\rho_x)$$

$$\mathcal{P}^2_{ij}=\{{}^1P^{(i)}\cdot{}^1P^{(j)}+{}^1P\cdot{}^1P^{(i,j)}+\theta({}^2P^{(i)}\cdot{}^2P^{(j)}+{}^2P\cdot{}^2P^{(i,j)})-\frac{1}{2}x_0\cdot{}^1Q^{(i,j)}\}(x,\theta_x,\rho_x)$$

形式解の収束性を証明するためには上の公式の・・・の部分をもう少し詳しくみる必要がある。次の公式が必要となる。

(公式8) $L(x,D)u\,U_\rho=\sum_{|\alpha|=0}^{2m}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha u\cdot L^{(\alpha)}(x,D)U_\rho$

$$=\sum_{|\alpha|=0}^{2m}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha u\{\overset{\circ}{L}{}^{(\alpha)}(x,\partial)+\cdots\}U_\rho$$

$$=\sum_{|\alpha|=0}^{2m}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha u\{\sum_{\mu=0}^{2m-|\alpha|}{}^1\overset{\circ}{L}{}^{(\alpha)}_\mu\partial_\rho^\mu U_\rho+\sum_{\mu=0}^{2m-|\alpha|-1}{}^2\overset{\circ}{L}{}^{(\alpha)}_\mu\partial_\rho^\mu\partial_\theta U_\rho+\cdots\}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{2m}\left(\sum_{|\alpha|=0}^{2m-\nu}{}^1\overset{\circ}{L}{}^{(\alpha)}_\nu\frac{D^\alpha u}{\alpha!}+\cdots\right)\partial_\rho^\nu U_\rho+\sum_{\nu=0}^{2m-1}\left(\sum_{|\alpha|=0}^{2m-1-\nu}{}^2\overset{\circ}{L}{}^{(\alpha)}_\nu\frac{D^\alpha u}{\alpha!}+\cdots\right)\partial_\rho^\nu\partial_\theta U_\rho$$

(i) $=\sum_{\nu=0}^{2m}{}^1L_\nu[u]\partial_\rho^\nu U_\rho+\sum_{\nu=1}^{2m}{}^2L_\nu[u]\partial_\rho^\nu\partial_\theta U$

(ii) $L(x,D)g\,U_\theta=\sum_{\nu=1}^{2m}\left(\sum_{|\alpha|=0}^{2m-\nu}{}^3\overset{\circ}{L}{}^{(\alpha)}_\nu\frac{D^\alpha g}{\alpha!}+\cdots\right)\partial_\rho^{\nu+1}U+\sum_{\nu=0}^{2m}\left(\sum_{|\alpha|=0}^{2m-\nu}{}^4\overset{\circ}{L}{}^{(\alpha)}_\nu\frac{D^\alpha g}{\alpha!}+\cdots\right)\partial_\rho^\nu\partial_\theta U$

$$=\sum_{\nu=1}^{2m}{}^3L_\nu[g]\partial_\rho^\nu U_\rho+\sum_{\nu=0}^{2m}{}^4L_\nu[g]\partial_\rho^\nu\partial_\theta U$$

ここで、 ${}^kL_\nu={}^kL_\nu(x,\theta,\rho,D)\in L^{2m-\nu}(\Omega)$ $(k=1.2.3.4)$

${}^kL_\nu$ の principal part を ${}^k\overset{\circ}{L}_\nu$ で表わすと次の通りである。

$$\begin{cases}{}^1\overset{\circ}{L}_\nu\equiv\sum_{|\alpha|=2m-\nu}{}^1\overset{\circ}{L}{}^{(\alpha)}(x,\theta_x,\rho_x)\frac{D^\alpha}{\alpha!} & (\mathrm{mod}\ \theta)\\ {}^2\overset{\circ}{L}_\nu\equiv\sum_{|\alpha|=2m-\nu}{}^2\overset{\circ}{L}{}^{(\alpha)}(x,\theta_x,\rho_x)\frac{D^\alpha}{\alpha!} & (\mathrm{mod}\ \theta)\\ {}^3\overset{\circ}{L}_\nu\equiv\theta\sum_{|\alpha|=2m-\nu}{}^2\overset{\circ}{L}{}^{(\alpha)}(x,\theta_x,\rho_x)\frac{D^\alpha}{\alpha!} & (\mathrm{mod}\ \theta^2)\\ {}^4\overset{\circ}{L}_\nu\equiv\sum_{|\alpha|=2m-\nu}{}^1\overset{\circ}{L}{}^{(\alpha)}(x,\theta_x,\rho_x)\frac{D^\alpha}{\alpha!} & (\mathrm{mod}\ \theta)\end{cases}$$

公式7, 8より次の等式が得られる。

$$(\text{公式}9)\begin{cases} {}^1L_{2m}(x,\theta,\rho,D) \equiv {}^1\overset{\circ}{L}(x,\theta_x,\rho_x) \\ {}^2L_{2m}(x,\theta,\rho,D) \equiv {}^2\overset{\circ}{L}(x,\theta_x,\rho_x) \\ {}^3L_{2m}(x,\theta,\rho,D) \equiv \theta\cdot {}^2\overset{\circ}{L}(x,\theta_x,\rho_x) \\ {}^4L_{2m}(x,\theta,\rho,D) \equiv {}^1\overset{\circ}{L}(x,\theta_x,\rho_x) \end{cases}$$

$$(\text{公式}10)\begin{cases} {}^1L_{2m-1}(x,\theta,\rho,D) = \mathcal{M} + (\rho_{x_ix_j}\ast\Theta^2_{ij} + \theta\,\theta_{x_ix_j}\ast\Theta^1_{ij} + {}^3\overset{\circ}{L} + {}^1\overset{\circ}{R}) \\ {}^2L_{2m-1}(x,\theta,\rho,D) = \mathcal{L} + (\rho_{x_ix_j}\Theta^1_{ij} + \theta_{x_ix_j}\Theta^2_{ij} + {}^4\overset{\circ}{L} + {}^2\overset{\circ}{R}) \\ {}^3L_{2m-1}(x,\theta,\rho,D) = \theta\mathcal{L} + (\theta\rho_{x_ix_j}\Theta^1_{ij} + \theta\,\theta_{x_ix_j}\Theta^2_{ij} + \theta\cdot{}^2\overset{\circ}{R} + {}^3\overset{\circ}{L}') \\ {}^4L_{2m-1}(x,\theta,\rho,D) = \mathcal{M} + (\rho_{x_ix_j}\Theta^2_{ij} + \theta\,\theta_{x_ix_j}\Theta^1_{ij} + {}^4\overset{\circ}{L}' + {}^1\overset{\circ}{R}) \end{cases}$$

§3

§2で得られた公式を使って，係数 $u_{\alpha,\beta}, g_{\alpha,\beta}, v_{\alpha,\beta}, h_{\alpha,\beta}$ がどのように決定されていくかを見る。まず重ね合わせの原理から初期値問題として次の形の初期値問題を考えれば充分である。

$$\begin{cases} L(x,D)\,u(x) = 0 \\ D_0^h u(0,x') = w_h(x'')\,k_{-\ell}(x_1) \quad (h=0,\cdots,2m-1) \quad x''=(x_2,\cdots,x_n) \end{cases}$$

（$w_h(x'')$ は x'' の $0\in\mathbb{C}^{n-1}$ の近傍で整型な函数）

$$u(x) = \sum_{\beta=1}^{m}\sum_{\alpha=-\ell+1-2m}^{+\infty} u_{\alpha,\beta}(x)X_{\alpha\rho}(\theta_\beta(x),\rho_\beta(x)) + g_{\alpha,\beta}(x)X_{\alpha\theta}(\theta_\beta(x),\rho_\beta(x)) + v_{\alpha,\beta}(x)Y_{\alpha\rho}(\theta_\beta(x),\rho_\beta(x)) + h_{\alpha,\beta}(x)Y_{\alpha\theta}(\theta_\beta(x),\rho_\beta(x))$$

に $L(x,D)$ を作用させる。§2の公式より次を得る。

$$Lu = \sum_{\beta=1}^{m}\sum_{\alpha}\Big\{\sum_{\nu=0}^{2m}{}^1L_{\nu,\beta}u_{\alpha+\nu,\beta} + {}^3L_{\nu,\beta}g_{\alpha+\nu,\beta}\Big\}X_{\alpha\rho}(\theta_\beta(x),\rho_\beta(x)) + \Big\{\sum_{\nu=0}^{2m}{}^4L_{\nu,\beta}g_{\alpha+\nu,\beta} + {}^3L_{\nu,\beta}u_{\alpha+\nu,\beta}\Big\}X_{\alpha\theta}(\theta_\beta(x),\rho_\beta(x))$$

$$+\left\{\sum_{\nu=0}^{2m} {}^1L_{\nu,\beta}\, v_{\alpha+\nu,\beta} + {}^3L_{\nu,\beta}\, h_{\alpha+\nu,\beta}\right\} Y_{\alpha\rho}(\theta_\beta(x), \rho_\beta(x))$$

$$+\left\{\sum_{\nu=0}^{2m} {}^4L_{\nu,\beta}\, h_{\alpha+\nu,\beta} + {}^2L_{\nu,\beta}\, v_{\alpha+\nu,\beta}\right\} Y_{\alpha\theta}(\theta_\beta(x), \rho_\beta(x)) = 0$$

ここで、${}^kL_{\nu,\beta} = {}^kL_\nu(x, \theta_\beta, \rho_\beta, D) \in L^{2m-\nu}(\Omega)$ $(k=1,2,3,4)$

特に ${}^3L_{0,\beta} \equiv {}^2L_{0,\beta} \equiv 0$.

上で $X_{\alpha\rho}, X_{\alpha\theta}, Y_{\alpha\rho}, Y_{\alpha\theta}$ の係数 $=0$ とおく事により次を得る。

$$\begin{cases} \sum_{\nu=0}^{2m} {}^1L_{\nu,\beta}\, u_{\alpha+\nu,\beta} + {}^3L_{\nu,\beta}\, g_{\alpha+\nu,\beta} = 0 \\ \sum_{\nu=0}^{2m} {}^4L_{\nu,\beta}\, g_{\alpha+\nu,\beta} + {}^2L_{\nu,\beta}\, u_{\alpha+\nu,\beta} = 0 \\ \sum_{\nu=0}^{2m} {}^1L_{\nu,\beta}\, v_{\alpha+\nu,\beta} + {}^3L_{\nu,\beta}\, h_{\alpha+\nu,\beta} = 0 \\ \sum_{\nu=0}^{2m} {}^4L_{\nu,\beta}\, h_{\alpha+\nu,\beta} + {}^2L_{\nu,\beta}\, v_{\alpha+\nu,\beta} = 0 \end{cases}$$

ここで、${}^1L_{2m,\beta} = {}^2L_{2m,\beta} = {}^3L_{2m,\beta} = {}^4L_{2m,\beta} = 0$ $(\beta=1,\cdots,m)$

とおく。これらの θ_β と ρ_β に関する一階の非線型方程式系より θ_β と ρ_β を決定する。(次の§で述べる。) このように置く事より上の系は次のようになる。

$$(\mathrm{T.E})\begin{cases} \begin{cases} {}^2L_{2m-1,\beta}\, u_{\alpha+2m-1,\beta} = -\sum_{\nu=0}^{2m-1} {}^4L_{\nu,\beta}\, g_{\alpha+\nu,\beta} - \sum_{\nu=0}^{2m-2} {}^2L_{\nu,\beta}\, u_{\alpha+\nu,\beta} \\ {}^3L_{2m-1,\beta}\, g_{\alpha+2m-1,\beta} = -\sum_{\nu=0}^{2m-1} {}^1L_{\nu,\beta}\, u_{\alpha+\nu,\beta} - \sum_{\nu=0}^{2m-2} {}^3L_{\nu,\beta}\, g_{\alpha+\nu,\beta} \end{cases} \\ \begin{cases} {}^2L_{2m-1,\beta}\, v_{\alpha+2m-1,\beta} = -\sum_{\nu=0}^{2m-1} {}^4L_{\nu,\beta}\, h_{\alpha+\nu,\beta} - \sum_{\nu=0}^{2m-2} {}^2L_{\nu,\beta}\, v_{\alpha+\nu,\beta} \\ {}^3L_{2m-1,\beta}\, h_{\alpha+2m-1,\beta} = -\sum_{\nu=0}^{2m-1} {}^1L_{\nu,\beta}\, v_{\alpha+\nu,\beta} - \sum_{\nu=0}^{2m-2} {}^3L_{\nu,\beta}\, h_{\alpha+\nu,\beta} \end{cases} \end{cases}$$

これがいわゆる transport equations でこれをといて順次 $u_{\alpha,\beta}, g_{\alpha,\beta}, v_{\alpha,\beta}, h_{\alpha,\beta}$ を決定していこうと云う訳である。

一方、初期値の方から次の式を $D_0^k u(x)|_{x_0=0}$ を計算する事によって得る。

$$\sum_{\beta=1}^{m}(\rho_{\beta\, x_0}(0,x'))^{h}(u_{\alpha+1,\beta}+h_{\alpha,\beta}) + h(\rho_{\beta,x_0}(0,x'))^{h-1}\sigma(0,x')\, v_{\alpha,\beta}$$
$$+\sum_{\beta=1}^{m}\Big(\sum_{k=0}^{h-1} M^{h}_{k,\beta}(u_{\alpha+k+1-h,\beta}+h_{\alpha+k-h,\beta}) + M'^{h}_{k,\beta}\, g_{\alpha+k+1-h,\beta}$$
$$+ N^{h}_{k,\beta}\, v_{\alpha+k-h,\beta} + M''^{h}_{k,\beta}\, u_{\alpha+k+1-h,\beta} + N'^{h}_{k,\beta}\, h_{\alpha+k-h,\beta}\Big|_{x_0=0}$$
$$=\begin{cases} w_h(x') & \text{for } \alpha=-l+2m+h \\ 0 & \text{otherwise}. \end{cases} \qquad (h=0,\cdots,2m-1)$$

ここで $\begin{cases} M^{h}_{k,\beta},\ N^{h}_{k,\beta} \text{ は } (h-k)\text{階の } D_0 \text{ に関する常微分作用素} \\ M'^{h}_{k,\beta},\ N'^{h}_{k,\beta},\ M''^{h}_{k,\beta} \text{ は } (h-k-1)\text{階の } D_0 \text{ に関する常微分作用素.} \end{cases}$

これらの常微分作用素はもちろん $L(x,D)$ の係数と θ_β, ρ_β のみによって定まり、係数は x' の正則関数であり、又線型である。

一方
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \gamma_1 & 1 & \cdots & \gamma_m & 1 \\ \gamma_1^2 & 2\gamma_1 & \cdots & \gamma_m^2 & 2\gamma_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \gamma_1^{2m-1} & (2m-1)\gamma_1^{2m-2} & \cdots & \gamma_m^{2m-1} & (2m-1)\gamma_m^{2m-2} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \gamma_h = \rho_{h,x_0}(0,x')$$

であるから、上の式を $(u_{\alpha+1,\beta}+h_{\alpha,\beta})(0,x')$ と $v_{\alpha,\beta}(0,x')$ についての $2m$ ケの連立方程式と見て解く事ができて、次の表現を得る。

$$u_{\alpha+2m-1,\beta}(0,x') + h_{\alpha+2m-2,\beta}(0,x')$$
$$= \sum_{\mu=1}^{2m-1}\sum_{\gamma=1}^{m} d^1_{\mu,\gamma}(x')\, H^1_{\mu,\gamma}(x',D_0)(u_{\alpha+2m-1-\mu,\gamma}+h_{\alpha+2m-2-\mu,\gamma})(0,x')$$
$$+ d^2_{\mu,\gamma}(x')\, H^2_{\mu-1,\gamma}(x',D_0)\, g_{\alpha+2m-1-\mu,\gamma}(0,x')$$
$$+ d^3_{\mu,\gamma}(x')\, H^3_{\mu,\gamma}(x',D_0)\, v_{\alpha+2m-2-\mu,\gamma}(0,x')$$
$$+ d^4_{\mu,\gamma}(x')\, H^4_{\mu-1,\gamma}(x',D_0)\, h_{\alpha+2m-2-\mu,\gamma}(0,x')$$
$$+ d^5_{\mu,\gamma}(x')\, H^5_{\mu-1,\gamma}(x',D_0)\, u_{\alpha+2m-1-\mu,\gamma}(0,x')$$

$$v_{\alpha+2m-1,\beta}(0,x') = \sum_{\mu=1}^{2m-1}\sum_{\gamma=1}^{m} e^1_{\mu,\gamma}(x') H^1_{\mu,\gamma}(x',D_0)(u_{\alpha+2m-1-\mu,\gamma} + h_{\alpha+2m-2-\mu,\gamma})(0,x')$$
$$+ e^2_{\mu,\gamma}(x') H^2_{\mu-1,\gamma}(x',D_0)\, g_{\alpha+2m-1-\mu,\gamma}(0,x')$$
$$+ e^3_{\mu,\gamma}(x') H^3_{\mu,\gamma}(x',D_0)\, v_{\alpha+2m-2-\mu,\gamma}(0,x')$$
$$+ e^4_{\mu,\gamma}(x') H^4_{\mu,\gamma}(x',D_0)\, h_{\alpha+2m-2-\mu,\gamma}(0,x')$$
$$+ e^5_{\mu,\gamma}(x') H^5_{\mu+1,\gamma}(x',D_0)\, u_{\alpha+2m-2-\mu,\gamma}(0,x')$$

ここで $d^h_{\mu,\gamma}, e^h_{\mu,\gamma}$ は $0\in\mathbb{C}^n_{x'}$ の近傍で正則な関数。$H^\gamma_{\mu,\beta}(x',D_0)$ は ν 階の常微分作用素で、係数は $0\in\mathbb{C}^n_{x'}$ の近傍で正則である。

以上で得られた (T.E) をこの初期値のもとに解いていこうと云う訳であるが次の事に注意する。(T.E) は全て次の型と同じ型をしている。

$$\begin{cases} \{(2x_0D_0+1)+(x_0^2\alpha_i(x)D_i + x_0\gamma_1(x))\}g + (x_0\beta_i(x)D_i+\delta_1(x))u = S(x) \\ \{2D_0 + x_0\alpha_i(x)D_i + \gamma_2(x)\}u + (x_0\beta_i(x)D_i + \delta_2(x)) = T(s) \\ u(0,x') = u_0(x') \end{cases}$$

(ここで $\alpha_i(x), \beta_i(x), \delta_i(x), \gamma_i(x), S(x), T(x)$ は $0\in\mathbb{C}^{n+1}_x$ の近傍で正則な関数。$u_0(x')$ は $0\in\mathbb{C}^n_{x'}$ の近傍で正則な関数。)

この初期値問題には正則な一意的な解 $u(x), g(x)$ が局所的に存在する。この事実を使って係数を決定していく。詳しくいうと、まず、$u_{\gamma,\beta}, g_{\gamma,\beta}, v_{\gamma,\beta}, h_{\gamma,\beta}$ ($\gamma\leq\alpha+2m-2, \beta=1,\dots,m$) が全て決定されたとしよう。そうすると (T.E) の右辺は既知であり、初期値とあわせて、$u_{\alpha+2m-1,\beta}, g_{\alpha+2m-1,\beta}$ が求まる。この $u_{\alpha+2m-1,\beta}, g_{\alpha+2m-1,\beta}$ から

$v_{\alpha+2m-1}(0,x')$ が求まり (T.E) とあわせて，$v_{\alpha+2m-1,\beta}, h_{\alpha+2m-1,\beta}$ が求まる．

このようにして順次係数が決定されていく。

§4.

$${}^1L_{2m,\beta} = {}^2L_{2m,\beta} = {}^3L_{2m,\beta} = {}^4L_{2m,\beta} = 0 \text{ は}$$

$$\begin{cases} {}^1\overset{\circ}{L}(x, \theta_{\beta x}, \rho_{\beta x}) = \sum_{\nu=0}^{m} \overset{\circ}{L}_{2\nu}(x, \theta_{\beta x}, \rho_{\beta x})\theta^{\nu} = 0 \\ {}^2\overset{\circ}{L}(x, \theta_{\beta x}, \varphi_{\beta x}) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \overset{\circ}{L}_{2\nu+1}(x, \theta_{\beta x}, \rho_{\beta x})\theta^{\nu} = 0 \end{cases}$$

と同値である．ここで第二式に $\pm\sqrt{\theta}$ を乗じ，$\overset{\circ}{L}_h(x, r\xi, \eta) = \overset{\circ}{L}_h(x,\xi,\eta)r^h$ $(h=0,\cdots,2m)$ に注意して，第一式と加える．そして $\overset{\circ}{L}(x,\xi+\eta) = \sum_{\nu=0}^{2m}\overset{\circ}{L}_{\nu}(x,\xi,\eta)$ と $\frac{2}{3}(\theta_\beta^{3/2})_x = \sqrt{\theta_\beta}\,\theta_{\beta x}$ を使うと，普通の eikonal equation

$$\overset{\circ}{L}(x, (\rho_\beta \pm \tfrac{2}{3}\theta_\beta^{3/2})_x) = 0$$

が得られる。$\varphi_\beta^{\pm} = \rho_\beta \pm \frac{2}{3}\theta_\beta^{3/2}$ と置くと $\overset{\circ}{L}(x, \varphi^{\pm}_{\beta x}) = 0$ である。

$$\begin{cases} \overset{\circ}{L}(x, \varphi^{\pm}_{\beta x}) = 0 \\ \varphi^{\pm}_{\beta}(0,x') = x_1 \end{cases}$$

を解いて，$\varphi_\beta^{\pm}$ と θ_β, ρ_β が求まる。今 $x_0 = t^2$ と置くと，

$$0 = \overset{\circ}{L}(x, \varphi_{\beta x}) = L(t^2, x', \tfrac{1}{2t}\varphi^{\pm}_{\beta t}, \varphi^{\pm}_{\beta x'}) = [P(t^2,x', \tfrac{1}{2t}\varphi^{\pm}_{\beta t}, \varphi^{\pm}_{\beta x'})]^2 - t^2 Q(t^2, x', \varphi^{\pm}_{\beta x'})$$

これを
$$\begin{cases} P(t^2, x', \frac{1}{2t}\varphi^{\pm}_{\beta t}, \varphi^{\pm}_{\beta x'}) = \pm t\sqrt{Q(t^2, x', \varphi^{\pm}_{\beta x'})} \\ \varphi^{\pm}(t,x')\big|_{t=0} = x_1 \end{cases}$$

と書く，仮定 A iii, B i より陰関数定理より $\frac{1}{2t}\varphi_t$ について解け，Cauchy-Kobalevskaya の定理より φ_β が求まる。又 $t \to -t$ の変数変換をする事により $\varphi_\beta^+(-t,x') = \varphi_\beta^-(t,x')$ 等がわかり，$\theta_\beta(t,x')$ $\rho_\beta(t,x')$ は各 t の偶関数である事がわかる。だから $\theta_\beta(x), \rho_\beta(x)$ と

書け．$\varphi^{\pm}_{\beta}(x)$ と書ける。又，かんたんな計算より．$\varphi^{\pm}_{\beta ttt}(0, x') = \pm 2\sqrt{Q(0;1,0\cdots0)} \prod_{\mu\neq\beta}(\lambda_\mu - \lambda_\beta) \neq 0$ がわかり　$\theta_\nu(x) = x_0\,\sigma_\nu(x)$　$(\sigma_\nu(0) \neq 0)$ と表現できる事がわかる。

以上のようにして，θ_β, f_β, $u_{\alpha,\beta}$, $v_{\alpha,\beta}$, $g_{\alpha,\beta}$, $h_{\alpha,\beta}$ が定まる．これら係数が優級数の方法により共通の存在領域をもち，そこでてきとうな評価をもち従って形式解が収束する事が示せるが証明は長くなるので省略する。

参考文献

[1] Y. Hamada, J. Leray et C. Wagschal : Systèmes d'équations aux dérivées partielles a caractéristique multiples ; problème de Cauchy ramifié, hyperbolicité partielles. J. Math. pure et appl. 55('76) p. 297 à 352

[2] Y. Hamada and G. Nakamura : On the singularities of the solutions of the Cauchy problem for the operator with non-uniform multiple characteristics. Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa 1978.

[3] D. Ludwig : Uniform asymptotic expansions at a caustic. Comm. Pure Appl. Math 19('66) pp 215~250

[4] G. Nakamura : The Singularities of Solutions of the Cauchy problems for systems whose characteristic roots are non-uniform. Publ. RIMS. Kyoto Univ. 13('77)

[5] J. Urabe : On the theorem of Hamada for a linear second order equation with variable multiplicities. J. Math. Kyoto. Univ. 19('79) pp 153~169