

## 波面集合が分岐する解について

大阪府大. 総合科 谷口和夫

序. 谷口-戸崎[3]では, 双曲型作用素

$$(1) \quad L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - t^{2l} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - at^{l-1} \frac{\partial}{\partial x}$$

( $l$ : 自然数,  $a$ : 実数)

に対する Cauchy 問題

$$(2) \quad \begin{cases} Lu = 0 & t > -1, \\ u(-1, x) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(-1, x) = u_1(x) \end{cases}$$

の解が分岐する特異性を持つかどうかを調べた. この報告では, これについての解説を行いたい.

§1. 準備的考察と主定理. (1) の作用素  $L$  の特性根は  $\lambda_+ = t^{2l}$  と,  $\lambda_- = -t^{2l}$  とである. したがって  $t=0$  では  $\lambda_+ = \lambda_-$  となる. さらに  $\lambda_+$  と  $\lambda_-$  の Poisson bracket

$$\begin{aligned} & \{\lambda_+ - \lambda_-, \lambda_- - \lambda_-\} \\ & = \frac{\partial \lambda_+}{\partial t} - \frac{\partial \lambda_-}{\partial t} \end{aligned}$$

$$-(\partial\lambda_+/ \partial x)(\partial\lambda_- / \partial t) + (\partial\lambda_- / \partial x)(\partial\lambda_+ / \partial t)$$

(ただし  $\lambda$  は  $t$  に対する dual variable)

を考えると

$$\{\lambda - \lambda_+, \lambda - \lambda_-\} = 2\ell t^{\ell-1} t$$

となり,

$$\{\lambda - \lambda_+, \lambda - \lambda_-\} / (\lambda_+ - \lambda_-) = \ell t^{-1} \notin C^\infty$$

を得る. したがって  $L$  は  $C^\infty$  の意味では包含系ではない (c.f. [4]). 以上により解の特異性が多様体  $\{t=0\}$  を通りすぎるとき, それは分岐する可能性が出てくる. この事実を正確に述べるのがこの報告の主題であるが, それを述べるために少し記号を用意する.

余接束  $T^*(R^n) \setminus 0$  の点  $(y, \eta)$  をひとつとり, それを通る四個の道  $\Gamma^+, \Gamma^-, \tilde{\Gamma}^+, \tilde{\Gamma}^-$  を次で定義する.

i)  $\{\varphi^\pm, p^\pm\}(t; y, \eta; \ell)$  を

$$(3) \begin{cases} \frac{d\varphi^\pm}{dt} = -(\partial\lambda_\pm / \partial t)(t, \varphi^\pm, p^\pm) = \mp t^\ell, \\ \frac{dp^\pm}{dt} = (\partial\lambda_\pm / \partial x)(t, \varphi^\pm, p^\pm) = 0 \quad (-1 \leq t \leq 1), \\ \{\varphi^\pm, p^\pm\}(-1; y, \eta; \ell) = \{y, \eta\} \end{cases}$$

の解, すなわち

$$(4) \begin{cases} \varphi^\pm(t; y, \eta; \ell) = y \mp \omega(t^{\ell+1} - (-1)^{\ell+1}), \\ p^\pm(t; y, \eta; \ell) = \eta \quad (-1 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

とする。ここで  $\omega = 1/(l+1)$ 。このとき道  $\Gamma^\pm$  を

$$\Gamma^\pm \equiv \Gamma^\pm(t) : \{\varphi^\pm, p^\pm\}(t; y, \eta; l)$$

と定義する。

ii)  $\{\tilde{\varphi}^\pm, \tilde{p}^\pm\}(t; y, \eta; l)$  を

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d\tilde{\varphi}^\pm}{dt} = -(\partial\lambda_{\mp}/\partial t)(t, \tilde{\varphi}^\pm, \tilde{p}^\pm) = \pm t^l, \\ \frac{d\tilde{p}^\pm}{dt} = (\partial\lambda_{\mp}/\partial x)(t, \tilde{\varphi}^\pm, \tilde{p}^\pm) = 0 & (-1 \leq t \leq 0), \\ \frac{d\tilde{\varphi}^\pm}{dt} = -(\partial\lambda_{\pm}/\partial t)(t, \tilde{\varphi}^\pm, \tilde{p}^\pm) = \mp t^l, \\ \frac{d\tilde{p}^\pm}{dt} = (\partial\lambda_{\pm}/\partial x)(t, \tilde{\varphi}^\pm, \tilde{p}^\pm) = 0 & (0 \leq t \leq 1), \\ \{\tilde{\varphi}^\pm, \tilde{p}^\pm\}(-1; y, \eta; l) = \{y, \eta\} \end{cases}$$

の  $C^1$ -級解, すなわち

$$(6) \quad \begin{cases} \tilde{\varphi}^\pm(t; y, \eta; l) = y \pm \omega(t^{l+1} - (-1)^{l+1}), \\ \tilde{p}^\pm(t; y, \eta; l) = \eta & (-1 \leq t \leq 0), \\ \tilde{\varphi}^\pm(t; y, \eta; l) = y \mp \omega(t^{l+1} + (-1)^{l+1}), \\ \tilde{p}^\pm(t; y, \eta; l) = \eta & (0 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

とする。このとき道  $\tilde{\Gamma}^\pm$  を

$$\tilde{\Gamma}^\pm \equiv \tilde{\Gamma}^\pm(t) : \{\tilde{\varphi}^\pm, \tilde{p}^\pm\}(t; y, \eta; l)$$

と定義する。

以上の記号を用意すると, 我々の主定理は次のように述べることができる。

定理. Cauchy問題(2)に対し, その初期値  $u_0, u_1$  は

$$WF(u_0) \cup WF(u_1) = \{(x, \eta)\}$$

を満たしているとする。このとき、解  $u(x) = u(t, x)$  の波面集合の伝播の様子は次の四つの型に分かれる。

(A)  $WF(u(t)) = P^+(t) \cup P^-(t) \cup \tilde{P}^+(t)$  (c.f. 図-a)

これは  $a = 2n(l+1) + l + m$  ( $n=0, 1, 2, \dots, m=0, 2$ ) のとき起こる。

(B)  $WF(u(t)) = P^+(t) \cup P^-(t) \cup \tilde{P}^-(t)$  (c.f. 図-b)

これは  $a = -\{2n(l+1) + l + m\}$  ( $n=0, 1, 2, \dots, m=0, 2$ ) のとき起こる。

(C) (この型は  $l$  が偶数のときだけ生じてくる。)

$WF(u(t)) = \tilde{P}^+(t) \cup \tilde{P}^-(t)$  (c.f. 図-c)

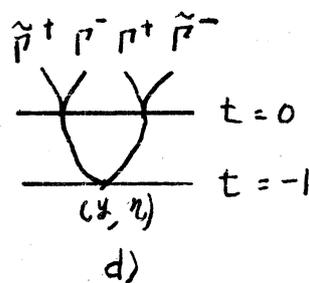
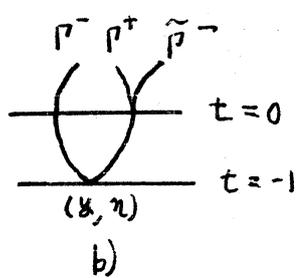
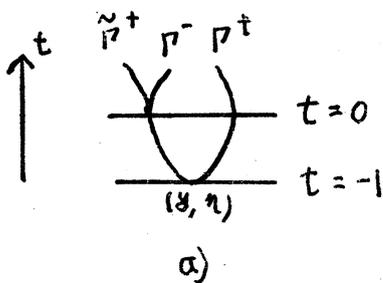
これは  $a = (1 \pm 2n)(l+1)$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) のとき起こる。

(D)  $WF(u(t)) = P^+(t) \cup P^-(t) \cup \tilde{P}^+(t) \cup \tilde{P}^-(t)$  (c.f. 図-d)

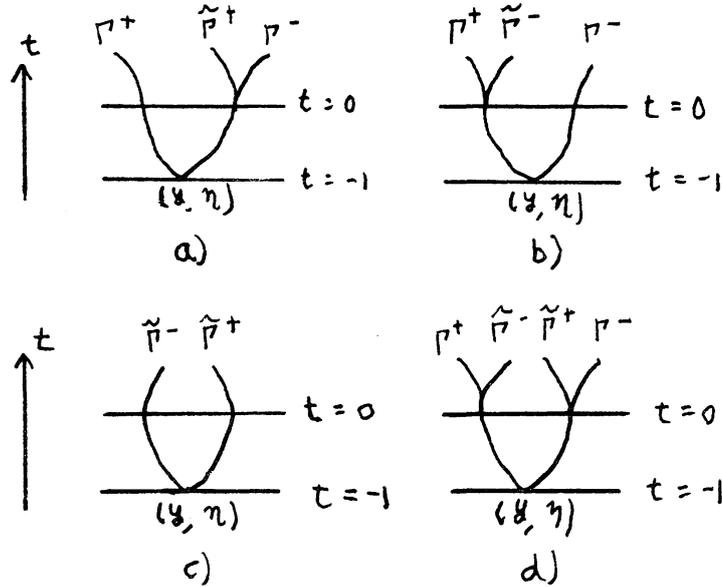
これは上記以外のとき起こる。



i)  $l$ : 奇数



ii)  $l$ : 偶数



§2. 相関数と道.

この節では、特性根  $\lambda_{\pm} = \pm t^l \xi$  に対する相関数  $\phi_{\pm}(t, s) = \phi_{\pm}(t, s; x, \xi)$  と道  $\rho^{\pm}, \tilde{\rho}^{\pm}$  との関係について考える。まず最初に  $\lambda_{\pm} = \pm t^l \xi$  に対するアイコナル方程式

$$(17) \begin{cases} (\partial \phi_{\pm} / \partial t)(t, s; x, \xi; l) \mp t^l (\partial \phi_{\pm} / \partial x)(t, s; x, \xi; l) = 0, \\ \phi_{\pm}(s, s; x, \xi; l) = x \xi \end{cases}$$

を考える。するとこの解は

$$(18) \quad \phi_{\pm}(t, s; x, \xi; l) = x \xi \pm \omega (t^{l+1} - s^{l+1}) \xi$$

となる。次に [2] で定義された  $\phi_+(t, s)$  と  $\phi_-(t, s)$  との  $\#$ -積  $\Phi_{\pm}(t, \theta, s) \equiv \Phi_{\pm}(t, \theta, s; x, \xi; l) = \phi_{\pm}(t, \theta) \# \phi_{\mp}(\theta, s)$  を考える。これは  $\{x^{\pm}, \xi^{\pm}\}$  を

$$(9) \begin{cases} x^\pm = (\partial \phi_\pm / \partial \xi)(t, \theta; x, \xi^\pm; \ell), \\ \xi^\pm = (\partial \phi_\mp / \partial x)(\theta, s; x^\pm, \xi; \ell) \end{cases}$$

の解としたとき

$$(10) \quad \Phi_\pm(t, \theta, s; x, \xi; \ell) = \phi_\pm(t, \theta; x, \xi^\pm; \ell) - x^\pm \xi^\pm + \phi_\mp(\theta, s; x^\pm, \xi; \ell)$$

で定義される. ところで(9)の解は

$$(11) \begin{cases} X^\pm = x \pm \omega(t^{\ell+1} - \theta^{\ell+1}), \\ \Xi^\pm = \xi \end{cases}$$

だから

$$(12) \quad \begin{aligned} \Phi_\pm(t, \theta, s; x, \xi; \ell) &= \{x\xi \pm \omega(t^{\ell+1} - \theta^{\ell+1})\xi\} - (x \pm \omega(t^{\ell+1} - \theta^{\ell+1}))\xi \\ &\quad + \{(x \pm \omega(t^{\ell+1} - \theta^{\ell+1}))\xi \mp \omega(\theta^{\ell+1} - s^{\ell+1})\xi\} \\ &= x\xi \pm \omega(t^{\ell+1} - 2\theta^{\ell+1} + s^{\ell+1})\xi \end{aligned}$$

となる. したがって特に

$$(13) \begin{cases} \phi_+(t, -1) = x\xi + \omega(t^{\ell+1} - (-1)^{\ell+1})\xi, \\ \phi_-(t, -1) = x\xi + \omega(-t^{\ell+1} + (-1)^{\ell+1})\xi, \\ \Phi_+(t, 0, -1) = x\xi + \omega(t^{\ell+1} + (-1)^{\ell+1})\xi, \\ \Phi_-(t, 0, -1) = x\xi + \omega(-t^{\ell+1} - (-1)^{\ell+1})\xi \end{cases}$$

が成立する. これから次が得られる.

命題1.  $c_t^\pm, \tilde{c}_t^\pm$  をそれぞれ水  $p^\pm, \tilde{p}^\pm$  から決まる正準関係 (canonical relation) とする. このとき次式が成立する.

i)  $C_t^\pm : \mathbb{R}^2 \ni (y, \eta) \rightarrow (x, \xi) \in \mathbb{R}^2$  は次で定義される.

$$(14) \quad \begin{cases} y = (\partial \phi_\pm / \partial \xi)(t, -1; x, \eta; l) = x \pm \omega(t^{l+1} - (-1)^{l+1}), \\ \xi = (\partial \phi_\pm / \partial x)(t, -1; x, \eta; l) = \eta \quad (-1 \leq t \leq 1). \end{cases}$$

ii)  $\tilde{C}_t^\pm : \mathbb{R}^2 \ni (y, \eta) \rightarrow (x, \xi) \in \mathbb{R}^2$  は次で定義される.

$$(15) \quad \begin{cases} \begin{cases} y = (\partial \phi_\mp / \partial \xi)(t, -1; x, \eta; l) = x \mp \omega(t^{l+1} - (-1)^{l+1}), \\ \xi = (\partial \phi_\mp / \partial x)(t, -1; x, \eta; l) = \eta \quad (-1 \leq t \leq 0), \end{cases} \\ \begin{cases} y = (\partial \tilde{\phi}_\pm / \partial \xi)(t, 0, -1; x, \eta; l) = x \pm \omega(t^{l+1} + (-1)^{l+1}), \\ \xi = (\partial \tilde{\phi}_\pm / \partial x)(t, 0, -1; x, \eta; l) = \eta \quad (0 \leq t \leq 1). \end{cases} \end{cases}$$

§3.  $l=1$  の場合. この節では  $l=1$  の場合について, 何故, 低階すなわち  $\alpha$  の値によつて解の波面集合の伝播の様子が分れるかを, Chi Min-You [1] が出した結果を参考にしてみたい. まず最初に Cauchy 問題

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u(0, x) = v_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_1(x) \end{cases}$$

を考える. このとき,  $\alpha = 4n+1$ ,  $v_1(x) = 0$  であれば, (16) の解  $u(t, x)$  は

$$(17) \quad u(t, x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{\pi} k!}{k! (n-k)! \Gamma(k+1/2)} t^{2k} \left( \frac{\partial^k v_0}{\partial x^k} \right) \left( x + \frac{1}{2} t^2 \right)$$

と書ける. したがつて  $\alpha = 4n+1$  で  $v_1(x) = 0$  のときは,

$v_0(x)$  の特異性は  $\lambda_+$  の特性曲線に沿ってのみ伝播する。この事実を我々の立場から調べてみたい。簡単のため、 $a=1$  (i.e.  $n=0$ ) とする。このとき (2) の解  $u(t, x)$  は

$$(18) \quad u(t, x) = u_0(x + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}) + \int_{-1}^t \{u_0' + u_1\}(x + \frac{1}{2}(t^2 - 2\theta^2 + 1)) d\theta$$

と書ける。したがって (18) の右辺の第 2 項を  $\int_{-1}^t \exp\{i(x + \frac{1}{2}(t^2 - 2\theta^2 + 1))\} \{i\lambda_+ \hat{u}_0(\xi) + \hat{u}_1(\xi)\} d\theta$  とおき (おき =  $(2\pi)^{-1} d\xi$ )

と書き直して、 $t > 0$  のときは stationary phase method を使えば、 $a=1$  に対する (2) の解  $u(t, x)$  の伝播の様子は、定理で言った型のうちで (D) 型ではなく、(A) 型となる。これは次の事実から生じる。 (18) から  $v_0(x) = u(0, x)$ ,  $v_1(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$  を計算すれば

$$(19) \quad \begin{cases} v_0(x) = u_0(x - \frac{1}{2}) + \int_{-1}^0 \{u_0' + u_1\}(x - \theta^2 + \frac{1}{2}) d\theta, \\ v_1(x) = \{u_0' + u_1\}(x + \frac{1}{2}) \end{cases}$$

を得る。したがって (2) の初期値  $u_0, u_1$  が  $\underline{u_0' + u_1 = 0}$  を満たすとなれば、

$$v_0(x) = u_0(x - \frac{1}{2}), \quad v_1(x) = 0$$

となり、(17) から  $t > 0$  に対する (2) の解  $u(t, x)$  は

$$u(t, x) = v_0(x + \frac{1}{2}t^2) = u_0(x + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2})$$

となる。以上のことと、(16) の解に対して  $a=1$  で  $v_1(x) = 0$  のとき  $v_0(x)$  の特異性が  $\lambda_+$  の特性曲線に沿ってのみ伝播す

るという事実から、(2) の解  $u(t, x)$  は  $a=1$  のとき  $\tilde{P}^-$  にその波面集合を持たないという事実が従う。

§4. 定理の証明の概略. (2) を  $x$  について Fourier 変換すると

$$(20) \quad \begin{cases} \hat{L}\hat{u} = \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + t^{2l} \xi^2 \hat{u} - a i t^{l-1} \xi \hat{u} = 0, \\ \hat{u}(-1, \xi) = \hat{u}_0(\xi), \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(-1, \xi) = \hat{u}_1(\xi) \end{cases}$$

となる。したがって  $\hat{L}\hat{u} = 0$  の一次独立な解  $V_{\pm}(t, \xi) \equiv V_{\pm}(t, \xi; l, a)$ ,  $\pm=1, 2$  を

$$(21) \quad \begin{cases} V_1(0, \xi) = 1, & V_1'(0, \xi) = 0, \\ V_2(0, \xi) = 0, & V_2'(0, \xi) = 1 \end{cases}$$

となるようにとると、方程式  $\hat{L}\hat{u} = 0$  の  $\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}$  に対する係数が 0 になることに注意すれば (2) の解  $u(t, x)$  は

$$(22) \quad u(t, x) = \int e^{ix\xi} \{ p_0(t, \xi) \hat{u}_0(\xi) + p_1(t, \xi) \hat{u}_1(\xi) \} d\xi$$

$$(23) \quad \begin{cases} p_0(t, \xi) \equiv p_0(t, \xi; l, a) = V_2'(-1, \xi) V_1(t, \xi) - V_1'(-1, \xi) V_2(t, \xi), \\ p_1(t, \xi) \equiv p_1(t, \xi; l, a) = V_1(-1, \xi) V_2(t, \xi) - V_2(-1, \xi) V_1(t, \xi) \end{cases}$$

と書ける。したがって  $u(t, \cdot)$  の波面集合を調べるには、 $\xi \rightarrow \pm\infty$  のときの  $p_{\pm}(t, \xi)$  の振舞いを調べればよい。ところで解の一貫性から  $V_{\pm}(t, -\xi; l, a) = V_{\pm}(t, \xi; l, -a)$ ,  $\pm=1, 2$  を得るから

$$(24) \quad p_{\pm}(t, -\xi; l, a) = p_{\pm}(t, \xi; l, -a), \quad \pm = 0, 1$$

が成立する。したがって、以下  $\xi > 0$  と仮定してよい。

$w = 1/(l+1)$  とし、 $\tau = w t^{l+1} \xi$  と変数変換すると方程式  $\hat{L}\hat{u} = 0$  は

$$(25) \quad \frac{d^2 v}{d\tau^2} + l w \tau^{-1} \frac{dv}{d\tau} + (1 - a i w \tau^{-1}) v = 0$$

となる。次に従属変数を  $w(z) = e^{z/2} v(z/(2i))$  と変換すれば、 $w$  は Kummer の方程式

$$(26) \quad z w''(z) + (\gamma - z) w'(z) - \alpha w(z) = 0$$

を満たす。ここで  $\alpha, \gamma$  は次の値をとる。

$$(27) \quad \alpha = w(l+a)/2, \quad \gamma = l w.$$

したがって、 $F(\alpha; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{(\gamma)_n} \frac{1}{n!} z^n$  ( $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots \times (\alpha+n-1)$  ( $= \Gamma(\alpha+n)/\Gamma(\alpha)$ )) を (26) の正則な解とすれば、(21) を満たす  $\hat{L}\hat{u} = 0$  の解  $V_{\pm}(t, \xi; l, a)$ ,  $\pm = 1, 2$  は

$$(28) \quad \begin{cases} V_1(t, \xi; l, a) = e^{-z/2} F(\alpha; \gamma; z), \\ V_2(t, \xi; l, a) = t e^{-z/2} F(1+\alpha-\gamma; 2-\gamma; z), \end{cases}$$

$$(z = 2i w t^{l+1} \xi)$$

と表わせる。一方、Kummer の方程式 (26) は  $z \rightarrow \infty$  ( $\arg z = \pm \frac{\pi}{2}$ ) としたとき、次の漸近展開を持つ一次独立な解  $H_{\pm}^{\pm}(\alpha; \gamma; z)$ ,  $\pm = 1, 2$  を持つ。

$$(29) \quad \begin{cases} H_1^{\pm}(\alpha; \gamma; z) = e^z \tilde{H}_1^{\pm}(\alpha; \gamma; z), \\ \tilde{H}_1^{\pm}(\alpha; \gamma; z) \sim z^{\alpha-\gamma} \{ 1 + (1-\alpha)(1-\alpha) z^{-1} + \dots \} \end{cases}$$

$$(z \rightarrow \infty, \arg z = \pm \frac{\pi}{2}),$$

$$\begin{aligned}
 H_2^\pm(\alpha; \gamma; z) &= \tilde{H}_2^\pm(\alpha; \gamma; z), \\
 \tilde{H}_2^\pm(\alpha; \gamma; z) &\sim (e^{-\pi i} z)^{-\alpha} \{1 + (-\alpha(1+\alpha-\gamma))z^{-1} + \dots\} \\
 &\quad (z \rightarrow \infty, \arg z = \pm \frac{\pi}{2}).
 \end{aligned}$$

したがって,  $z = 2i\omega t^{l+1}\xi$  に対し  $t \rightarrow +\infty$  のとき

$$\begin{cases}
 z \rightarrow \infty, \arg z = \frac{\pi}{2}, & \text{when } t > 0, \\
 z \rightarrow \infty, \arg z = \frac{\pi}{2}, & \text{when } t < 0, \quad l: \text{odd}, \\
 z \rightarrow \infty, \arg z = -\frac{\pi}{2}, & \text{when } t < 0, \quad l: \text{even}
 \end{cases}$$

に注意すれば,

$$t = \begin{cases}
 (2i\omega\xi)^{-w} z^w & (t > 0), \\
 -(2i\omega\xi)^{-w} z^w & (t < 0, l: \text{odd}), \\
 -(2i\omega\xi)^{-w} e^{\pi i w} z^w & (t < 0, l: \text{even})
 \end{cases}$$

を用いることにより, (28) で与えられた  $\hat{L}\hat{u} = 0$  の解  $V_{\pm}(t, \xi; l, a)$  は  $z = 2i\omega t^{l+1}\xi$  として

$$\begin{aligned}
 (30)_+ \quad V_{\pm}(t, \xi; l, a) &= (2i\omega\xi)^{(1-i)w} \\
 &\quad \times [c_{\pm, 1; l}^+ e^{z/2} \tilde{H}_1^+(\alpha; \gamma; z) + c_{\pm, 2; l}^+ e^{-z/2} \tilde{H}_2^+(\alpha; \gamma; z)] \\
 &\quad (t > 0), \quad i = 1, 2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (30)_- \quad V_{\pm}(t, \xi; l, a) &= \{-(2i\omega\xi)^w\}^{1-i} \\
 &\quad \times [c_{\pm, 1; l}^- e^{z/2} \tilde{H}_1^E(\alpha; \gamma; z) + c_{\pm, 2; l}^- e^{-z/2} \tilde{H}_2^E(\alpha; \gamma; z)] \\
 &\quad (t < 0), \quad i = 1, 2
 \end{aligned}$$

(ただし  $\pm$  は  $l$  が奇数のときは  $+$  を表わし,  
 $l$  が偶数のときは  $-$  を表わす)

なる形を持ち、その係数  $c_{\lambda, l; l}^{\pm}$  は  $\delta = 0$  ( $l$ : 奇数),  $= 1$  ( $l$ : 偶数) とすれば、

$$(31) \quad \begin{cases} c_{1,1;l}^+ = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)}, & c_{1,2;l}^+ = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)}, \\ c_{2,1;l}^+ = \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)}, & c_{2,2;l}^+ = \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)} e^{\pi i \omega}, \\ c_{1,1;l}^- = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{\pi i(\gamma-\alpha)\delta}, & c_{1,2;l}^- = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} e^{-\pi i \alpha \delta}, \\ c_{2,1;l}^- = \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)} e^{\pi i(1-\alpha)\delta}, & c_{2,2;l}^- = \frac{\Gamma(2-\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)} e^{\pi i(\omega-(\omega+\alpha)\delta)} \end{cases}$$

を満たす。この(31)に与えた定数が Stokes 係数と呼ばれるものである。以上と(23)から  $p_{\pm}(t, \xi; l, \alpha)$ ,  $\lambda = 0, 1$  は

$$(32) \quad p_{\pm}(t, \xi; l, \alpha) = \omega^{-\omega} (2i\xi)^{\gamma-\delta} (-1)^{1+(1-\delta)\delta} \\ \times (c_{2,2;l}^- c_{1,1;l}^- - c_{1,2;l}^- c_{2,1;l}^-) \\ \times [e^{(z-z^0)/2} \tilde{J}_{\alpha,2}^E(\alpha; \gamma; z^0) \tilde{H}_1^E(\alpha; \gamma; z) \\ - e^{(-z+z^0)/2} \tilde{J}_{\alpha,1}^E(\alpha; \gamma; z^0) \tilde{H}_2^E(\alpha; \gamma; z)] \\ (t < 0), \lambda = 0, 1$$

$$(32)_+ \quad p_{\pm}(t, \xi; l, \alpha) = \omega^{-\omega} (2i\xi)^{\gamma-\delta} (-1)^{1+(1-\delta)\delta} \\ \times [(c_{2,2;l}^- c_{1,1;l}^+ + c_{1,2;l}^- c_{2,1;l}^+) \\ \times e^{(z-z^0)/2} \tilde{J}_{\alpha,2}^E(\alpha; \gamma; z^0) \tilde{H}_1^+(\alpha; \gamma; z) \\ + (c_{2,1;l}^- c_{1,2;l}^+ + c_{1,1;l}^- c_{2,2;l}^+) \\ \times e^{(-z+z^0)/2} \tilde{J}_{\alpha,1}^E(\alpha; \gamma; z^0) \tilde{H}_2^+(\alpha; \gamma; z) \\ + (c_{2,1;l}^- c_{1,1;l}^+ + c_{1,1;l}^- c_{2,1;l}^+) \\ \times e^{(z+z^0)/2} \tilde{J}_{\alpha,1}^E(\alpha; \gamma; z^0) \tilde{H}_1^+(\alpha; \gamma; z)]$$

$$+ (C_{2,2;l}^- C_{1,2;l}^+ + C_{1,2;l}^- C_{2,2;l}^+) \\ \times e^{(-z-z^0)/2} \tilde{J}_{\alpha,2}^\varepsilon(\alpha; \gamma; z^0) \tilde{H}_2^+(\alpha; \gamma; z^0)] \\ (t > 0), \alpha = 0, 1$$

と書ける。ここで

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{J}_{0,1}^\pm(\alpha; \gamma; z) &= e^{-z/2} \frac{d}{dz} (e^{z/2} \tilde{H}_1^\pm(\alpha; \gamma; z)) \\ &= \frac{1}{2} \tilde{H}_1^\pm(\alpha; \gamma; z) + \frac{d}{dz} \tilde{H}_1^\pm(\alpha; \gamma; z), \\ \tilde{J}_{0,2}^\pm(\alpha; \gamma; z) &= e^{z/2} \frac{d}{dz} (e^{-z/2} \tilde{H}_2^\pm(\alpha; \gamma; z)) \\ &= -\frac{1}{2} \tilde{H}_2^\pm(\alpha; \gamma; z) + \frac{d}{dz} \tilde{H}_2^\pm(\alpha; \gamma; z), \\ \tilde{J}_{1,k}^\pm(\alpha; \gamma; z) &= \tilde{H}_k^\pm(\alpha; \gamma; z), \quad k=1, 2, \end{aligned} \right.$$

$$(34) \quad z = 2i\omega t^{\alpha+1} \xi, \quad z^0 = 2i\omega (-1)^{\alpha+1} \xi,$$

$$(35) \quad \varepsilon = \begin{cases} + & (l; \text{奇数}) \\ - & (l; \text{偶数}) \end{cases} \text{ を表わす,}$$

$$(36) \quad \delta = \begin{cases} 0 & (l; \text{奇数}), \\ 1 & (l; \text{偶数}). \end{cases}$$

ところで, (13) と (34) から

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi_+(t, -1; x, \xi; l) &= x\xi + (z - z^0)/(2i), \\ \Phi_-(t, -1; x, \xi; l) &= x\xi + (-z + z^0)/(2i), \\ \Phi_+(t, 0, -1; x, \xi; l) &= x\xi + (z + z^0)/(2i), \\ \Phi_-(t, 0, -1; x, \xi; l) &= x\xi + (-z - z^0)/(2i) \end{aligned} \right.$$

が成立する。以上述べたことと (24) および  $\omega(l + (-\alpha))/2 = \gamma - \alpha$  をおわせると次の命題を得, この命題からただちに我々

の定理に従う。

命題 2. 任意に固定した  $t \in [-1, 1]$  に対し主部が消えない表  
象  $g_{\alpha, \pm}(t, \xi) \equiv g_{\alpha, \pm}(t, \xi; l, a)$ ,  $\alpha = 0, 1$  と任意に固定した  $t \in$   
 $(0, 1]$  に対し主部が消えない表象  $\tilde{g}_{\alpha, \pm}(t, \xi) \equiv \tilde{g}_{\alpha, \pm}(t, \xi; l, a)$ ,  
 $\alpha = 0, 1$  が存在して, (2) の解  $u(t, x)$  は

$$(38)_- \quad u(t, x) = \sum_{\alpha=0}^1 D_0^-(l, a) \left[ \int e^{i\phi_+(t, -1; x, \xi)} g_{\alpha, +}(t, \xi) \hat{u}_\alpha(\xi) d\xi \right. \\ \left. + \int e^{i\phi_-(t, -1; x, \xi)} g_{\alpha, -}(t, \xi) \hat{u}_\alpha(\xi) d\xi \right] \\ (-1 \leq t \leq 0),$$

$$(38)_+ \quad u(t, x) = \sum_{\alpha=0}^1 \left[ D_0^+(l, a) \left\{ \int e^{i\phi_+(t, -1; x, \xi)} g_{\alpha, +}(t, \xi) \hat{u}_\alpha(\xi) d\xi \right. \right. \\ \left. \left. + \int e^{i\phi_-(t, -1; x, \xi)} g_{\alpha, -}(t, \xi) \hat{u}_\alpha(\xi) d\xi \right\} \right. \\ \left. + B_1(l, a) \int e^{i\phi_+(t, 0, -1; x, \xi)} \tilde{g}_{\alpha, +}(t, \xi) \hat{u}_\alpha(\xi) d\xi \right. \\ \left. + B_2(l, a) \int e^{i\phi_-(t, 0, -1; x, \xi)} \tilde{g}_{\alpha, -}(t, \xi) \hat{u}_\alpha(\xi) d\xi \right] \\ (0 < t \leq 1)$$

と表わせる。ここで (27) の  $\alpha, \gamma$  に対し

$$D_0^-(l, a) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} - \frac{e^{(-1)^l \pi i \omega}}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(1+\alpha-\gamma)},$$

$$D_0^+(l, a) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} + \frac{e^{-\pi i \omega}}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(1+\alpha-\gamma)} \\ \quad (l: \text{odd}), \\ \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(1+\alpha-\gamma)} \\ \quad (l: \text{even}), \end{cases}$$

$$B_1(\ell, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha-\gamma)\Gamma(\alpha)},$$

$$B_2(\ell, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}$$

である。

### 文 献

- [1] Chi Min-You: On the Cauchy problem for a class of hyperbolic equations with data given on the degenerate parabolic line, Acta Math. Sinica, 8 (1958), 521-529.
- [2] H. Kumano-go, K. Taniguchi and Y. Tozaki: Multi-products of phase functions for Fourier integral operators with an application, Comm. Partial Differential Equations, 3 (1978), 349-380.
- [3] K. Taniguchi and Y. Tozaki: A hyperbolic equation with double characteristics which has a solution with branching singularities, to appear in Math. Japon..
- [4] K. Taniguchi: Multi-products of Fourier integral operators and fundamental solutions for a hyperbolic system with involutive characteristics, to appear.