

σ (σ^2) のロバスト推定に対する
sub-sampling法の応用

東大 工学部 大橋 靖雄

§ 1. はじめに

正規分布からの標本に若干の異常値の混入が想定される場合にロバストであるような σ (σ^2) の推定法を提案する。この方法は、単一標本のみならず、線形模型の誤差分散の推定にも適用可能であり、“sub-sampling”，すなわち元の標本を幾つかの subsample に分割してある統計量を計算する，という手続きを繰り返すものである。この“繰り返し”に際して実験配置 (BIBD) が応用され、推定量の効率が高められる。

§ 2 で、尺度母数と線形模型における誤差分散のロバスト推定について概括し、§ 3 で、“異常値”の数学モデルを導入する。§ 4, および § 5 で sub-sampling法を詳しく説明し、実験配置の応用の効果の検討と、他の推定量との比較を数値的に行なう。§ 6 で、問題点をまとめた上で今後の可能性に

ついて述べることにする。

§2. 尺度母数のロバスト推定 ～ 従来の提案 ～

位置母数の場合に比べると，尺度母数のロバスト推定に関する研究は極端に少ないと言える。(cf. 成書では David [2], pp. 146~147, Mosteller and Tukey [12], pp. 207~208, Barnett and Lewis [1], pp. 158~160, pp. 169~171, Gnanadesikan [6], 邦訳 pp. 117~118, 竹内 [16], 第4章など.) その理由としては，①尺度をどのように定義するかの曖昧さ，②尺度母数，すなわちバラツキは推測の際の“厄介者”とされ，関心の対象となることが少なかった，等があげられよう。しかし，現在では，医学データにおける“個体差”の問題などで，バラツキそのものが興味の対象となることも多く，これまでに提案されている推測方式のロバストネスの観点からの見直しも必要になっているように思われる。

線形モデルにおける回帰係数のロバスト推定としてはM-推定法が最も良く使われているが，推定値を尺度不変にする為に，尺度の適当なロバスト推定値で残差を割って計算が遂行される。通常は，Huberの“proposal 2”や残差の重み w_2

乗和, 後述の MAD (Median Absolute Deviation) 等を用いて, 反復的に推定値が計算される (cf. 大橋 [13]). また, 反復の初期値としては MAD が良く用いられる. しかし, MAD は分布の異なる統計量の中央値であり, 正確な分布論的性質が利らないという欠点がある. 簡便でロバストな推定量があれば, 少なくとも初期値としては有効であろう.

ここで, 従来提案をまとめておく. 1 標本の場合は

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

で, 線形模型の場合は

$$Y_1, Y_2, \dots, Y_n \quad ; \quad E(Y_i) = \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \quad i=1, \dots, n$$

で観測値を表わす.

(i) MAD (cf. Hampel [9] など)

$$\hat{\sigma} = \text{const.} \cdot \underset{i}{\text{Median}} | X_i - \underset{j}{\text{Median}} X_j | \quad (1)$$

線形模型の場合は $\hat{\varepsilon}_i := Y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}} \quad i=1, \dots, n$ として

$$\hat{\sigma} = \text{const.} \cdot \underset{i}{\text{Median}} | \hat{\varepsilon}_i - \underset{j}{\text{Median}} \hat{\varepsilon}_j |, \quad (1)'$$

ただし, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ は $\boldsymbol{\beta}$ の (予備的な) ロバスト推定量.

(ii) 線形推定量

David [2], Chap. 6~7 や Sarhan and Greenberg [14] が詳しいが, それらは簡便法として線形推定量をとらえており, ロバスト推定量としての性質を調べた研究は David [3] 以外ほとんど無いようである.

線形推定量の例

$$\cdot \text{quasi-range} \quad \hat{\sigma} = \text{const.} \cdot \{X_{(m+1-k)} - X_{(k)}\} \quad (2)$$

4分位偏差が良く用いられる。

・ Giniの平均偏差 (の定数倍)

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \frac{2\sqrt{\pi}}{n(n-1)} \sum_i (i - \frac{1}{2}(m+1)) X_{(i)} \\ &= \sqrt{\pi} \frac{1}{n(n-1)} \sum_i \sum_j |X_i - X_j| \end{aligned} \quad (3)$$

これは Downton [5] の推定量とも呼ばれている。 ▣

(iii) trimmed variance (cf. Tukey [17] など) と Winsorized variance (cf. Dixon and Tukey [4] など)

それぞれ, trimmed mean と Winsorized mean に対応して計算されるものである。

(iv) 残差の重みつき二乗和 (cf. 大橋 [13])

重みつき二乗和の例

Lax の提案 (Mosteller and Tukey [12], p. 207)

$$\hat{\sigma}^2 = n \sum_i Z_i^2 (1-w_i^2)^4 / \{ \sum_i (1-w_i^2) (1-5w_i^2) \}^2 \quad (4)$$

$$Z_i := X_i - \text{Median}_j X_j \quad ; \quad w_i := Z_i / 9\text{MAD}$$

\sum_i は $w_i^2 \leq 1$ のときのみ和をとることを示す。 ▣

(v) M-推定法における 回帰係数 (1標本の場合は位置母数) との同時推定, あるいは Huber の "proposal 2", すなわち

$$\frac{1}{n-p} \sum_i \psi^2((Y_i - \hat{Y}_i)/\sigma) = E_{\Phi}(\psi^2(x)) \text{ の解. } (5)$$

ρ はパラメータ一教, Φ は標準正規分布の分布関数,
 ϕ は M -推定法に用いられるコスト関数の微分であ
 る (cf. 大橋 [13] など).

(vi) $Z_{ij} := (X_i - X_j)^2$, $1 \leq i < j \leq m$ のうち小さい方の値を利
 用して σ^2 を推定.

(vi-1) ガンマ (ρ_1^2) 確率プロットの傾斜より推定

(Gnanadesikan and Kettenring [6]).

(vi-2) 大きい値を何個か除いて平均 (Johnson et al. [11]).

σ の不偏推定量 (正規分布の下で) を得るための
 乗数が数値実験により求められている.

§3. 異常値のモデル

推定量の性質を定量的に調べる為には, 異常値混入のモデ
 ルを数学的に定式化しなければいけない. ここでは, 異常値
 混入を想定しない帰無モデル (分布) として正規分布を採用
 し,

$$H_0: X_1, \dots, X_m \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} F(x) = \Phi((x-\mu)/\sigma) \quad (6)$$

で表わし, 異常値混入を想定する対立モデル (分布) として
 は

(i) 混合 (mixture) モデル

$$H_1: X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} (1-\gamma)F(x) + \gamma G(x), 0 < \gamma < 1 \quad (7)$$

(ii) “スベリ” (slippage) モデル

$$H_1: X_1, \dots, X_n \text{のうち } l \text{ 個は } \sim G(x) \quad (8)$$

$$n-l \text{ 個は } \sim F(x)$$

のいずれかを採用する。ただし

$$G(x) = F(x-a), \text{ あるいは } F(x/a). \quad (9)$$

線形模型の場合には，各 X を誤差 ε で置き換えれば良い。

なお，異常値のモデルについての詳しい議論は，Barnett and Lewis [1], Chap. 2~3 を参照されたい。

§4. Subsample \wedge の分割

標本の分割 (sub-sampling) を推定に利用する試みは，既に幾つか提案されている。

Grubbs and Weaver [8] は，標本を無作為に m 個に分割して m 個の範囲 (group range) を求め，それらを平均して $\hat{\theta}$ を求める際の最適な m について議論している。ロバスト推定との関連では，Himich and Talwar [10] が，1次回帰モデル

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

の推定に標本分割を利用している。すなわち、subsampleの各々から α, β を計算し、それぞれの中央値によって α, β を推定する方法を提案している。Takeuchi [15]の推定量も、標本分割の概念から導かれたものである。

ここで提案する sub-sampling 法は、分割のやり方を変えて繰り返すという点を除けば、上記 Himich and Talwar [10]の方法と全く類似のものである。すなわち、 n 個の $X \in n/k = m$ 組の subsample に分割し、各組毎に不偏分散（線形模型の場合は（残差平方和 / 自由度）） $z_i, i=1, \dots, m$ を計算し、 m 個の z からロバスト推定によつて $\hat{\sigma}$, あるいは $\hat{\sigma}$ を求める；異常値の個数が少ければ、それらを含む少数組での z のみが大まくなるので、適当な打ち切りによつてロバストな推定が行なえるだろう。

H_0 の下では $z_i \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Gamma distribution}$ であり、 σ^2 はガンマ分布の尺度母数となっている。ガンマ分布のパラメーターのロバスト推定については、Wilk や Gnanadesikan に幾つかの研究があり、また、特に指数分布については Kale や Simha が一連の研究を行なっている (cf. Barnett and Lewis [1], pp. 171~173) が、ここでは、ロバスト推定量として、小さい方から $(m-c)$ 個を用いたときの最良線形推定量 (BLUE) を採用する。係数を一度計算してしまえばすぐ

に求められるという点で, BLUE は最も取り扱いやすい推定量と言えよう.

最も計算が簡単なのは $k=3$ (自由度 = 2), すなわち指数分布の場合である. このとき BLUE は

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m-c} \left(\sum_{i=1}^{m-c-1} x_{(i)} + (c+1)x_{(m-c)} \right) \quad (10)$$

という Winsorized mean の形になる. これは $x_{(1)}$ から $x_{(m-c)}$ までを用いたときの最小分散不偏推定量 (UMVU) にもなっている. 以後の数値例においては, 計算の簡便さから, $k=3$ の場合のみを示す.

最適な k の決め方について, 若干考察しよう. ここでは, breakdown point (b. p.) を p に保った上で, H_0 の下での不偏分散に対する効率

$$\text{eff}(\hat{\sigma}^2) := \text{Var}(s^2) / \text{Var}(\hat{\sigma}^2), \quad (11)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (X_i - \bar{X})^2$$

を最大にするような k を求めてみよう. なお, b. p. とは, Hampel [9] が提唱したロバストネスの一つの指標であり, 標本のうち $100 \cdot p$ パーセントを無限大にまで動かしても推定量が有限にとどまっているような, そのような p の上限のことである. H_0 の下では

$$\text{Var}(x_i) = \frac{2}{k-1} \sigma^4 \quad (12)$$

である。b.p.を p に保つには mp 個の又を(大きい方から)打ち切る必要がある。そのときの $\hat{\sigma}^2$ の分散を、 n, m が充分大として

$$\text{Var}(\hat{\sigma}^2) \doteq \frac{2}{(k-1)(m-mp)} \sigma^4 \quad (13)$$

で近似しよう。(13)が最小、すなわち効率が最大となるのは

$$k = 1/\sqrt{p}, \quad m = n\sqrt{p} \quad (14)$$

のときであり、 $p = .05, .10$ に対して、 $k = 4.47, 3.16$, $\text{eff}(\hat{\sigma}^2) \doteq .603, .468$ となる。現実問題としては $p = .05 \sim .10$ 程度の要求が妥当と考えられ、上記の議論からは $k = 3 \sim 4$ にとるのが適当、ということになる。なお、この議論は、かなり荒いものである(§6(b)参照)ことを注意しておく。

§5. 分割の繰り返し

$k=3$ のとき(13)は正確に成り立ち

$$\text{eff}(\hat{\sigma}^2) = \frac{2}{m-1} \frac{2 \cdot (m-c)}{2} = \frac{2(m-c)}{m-1} < \frac{2}{3} \quad (15)$$

となる。どのような k を選んでも、(打ち切りを行なう限り)1回まりの分割では効率はあまり高くなるまい。平均値の推定の為 m 個の自由度が失われ、また、 H_0 の下では、たまたまたの値が大きくなった subsample 中の X の持つ情報が全て捨

てられるからである。そこで、効率を高める為に、分割の仕方を変え $\hat{\sigma}^2$ を r 個 (これを $\tilde{\sigma}_1^2, \dots, \tilde{\sigma}_r^2$ と書く) 求め、その平均を推定量としてみよう；もし異常値が存在して、他の X から充分離れていれば、異常値を含む subsample から計算される $\tilde{\sigma}_i^2$ が必ず捨てられ、大きなカタヨリは生じないだろうし、 H_0 の下では、全ての X がより均等に推定に利用されるようになり、効率の低下は小さくなるだろう。この推定量

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \tilde{\sigma}_i^2 \quad (16)$$

のことを、便宜的に (k, c, r) -推定量と呼ぶことにする。

1 から n までの X の添字 (名前) の付け方に対し不変な推定量を作る為には、全ての分割

$$r_{\max} = n! / \{(k!)^m m!\} \quad (17)$$

($k=3$ のとき、 $n=9, 12, 15$ に対し $r_{\max} = 280, 15400, 1401400$) に対し $\hat{\sigma}^2$ を計算する必要があるが、この計算量は膨大である。そこで、上記の不変性は諦め、できるだけ少い r で効率が高まるように systematic に分割を決めることにする。

仮に、各 $\hat{\sigma}_i^2$ 間の相関係数が ρ に等しいとしてみよう。すると

$$\text{Var}(\hat{\sigma}^2) = \left(\rho + \frac{1-\rho}{r} \right) \text{Var}(\tilde{\sigma}_i^2). \quad (18)$$

効率を高めるには、明らかに、 ρ をできるだけ小さくすれば良い。打ち切りの無い $(k, 0, \cdot)$ -推定量の場合には、 ρ は、二通りの分割で同じ subsample に属する観測値 X の pair の数 N_p の増加関数であることが証明できる。数値例を表 A に挙げる

Table A. N_p (number of pairs in the same group) and correlation coefficients between θ^2 's ($n=9, k=3$)

N_p	0	2	3	5	9
$(3, 0, \cdot)$	$2/3 = .667$	$20/27 = .741$	$7/9 = .778$	$23/27 = .852$	1.00
$(3, 1, \cdot)$ (standard error)	.473 (.005)	.577 (.006)	.617 (.006)	.744 (.006)	1.00

NOTE: Figures for $(3, 1, \cdot)$ -estimators are obtained from sampling experiment (iteration=100000).

補足 1 : 以後全て、数値実験の際の正規乱数としては、 M -系列によって発生させた一様乱数を Box-Müller 変換したものを using している。

補足 2 : (例) 分割 1 $(X_1, X_2, X_3), (X_4, X_5, X_6), (X_7, X_8, X_9)$
 分割 2 $(X_1, X_2, X_4), (X_3, X_5, X_6), (X_7, X_8, X_9)$
 分割 3 $(X_1, X_4, X_7), (X_2, X_5, X_8), (X_3, X_6, X_9)$

1-3 間で $N_p = 0$, 1-2 間で $N_p = 5$, 2-3 間で $N_p = 2$.

ておくが、一般の $C \neq 0$ の場合にも同様であることが予想される。そこで

(方針) 観測値の任意の pair (X_s, X_t) が同じ subsample に 2 度以上は入らないように分割を繰り返すことにする。以後、 (k, c, r) -推定量と言えは、こうして

得られた推定量を指すことにする。

この(方針)を採用したとき

$$r \leq \frac{m-1}{k-1} \quad (19)$$

等号が達成されるのは，“Kirkmanの問題”の解が存在する，すなわち，処理 = m ，ブロックの大きさ = k ，組の数 = $(m-1)/(k-1) = r$ ，会合数 = 1，ブロックの数 = $r \cdot m/k$ の RBIBD が存在すると仮定である。このときには， $(k, 0, r)$ -推定量について

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{m-1} \sum_i (X_i - \bar{X})^2 \quad (20)$$

が成り立ち

$$\rho = \frac{m-1}{r-1} = \frac{k-1}{k} \quad (21)$$

となることが，代数的に確かめられる。RBIBD が存在せず，かつ r を増やしたいときには，(方針)を緩めて会合数 ≥ 2 の BIBD を利用して分割を繰り返せば良いだろう。分割の仕方の実際の構成に関しては（“配置の理論”の専門書に譲り）これ以上触れないことにする。

$k=3$ ， $m=3l$ のときの $(3, 1, r)$ -推定量の効率について計算した結果を表 B に示す。各効率は，数値実験によって求めた ρ と (18) を用いて計算したものである。 $l = 2l' + 1$ の

Table B. Correlation coefficients between (3,1,1)- subsample estimators and efficiencies of (3,1,r)-estimators to sample variance

sample size n	9	12	15	18	21
correlation coefficient ρ	.473	.514	.561	.573	.588
(standard error)	(.005)	(.004)	(.006)	(.007)	(.010)
efficiency of (3,1,r)					
r					
1	.500	.545	.571	.588	.600
2	.68	.72	.73	.75	.76
$[\frac{n-1}{2}]$.83	.89	.92	.94	.95

NOTE: Coefficients are obtained from sampling experiment (iteration= 50000~100000).

とよには Kirkmanの問題の解が存在し, $r = (m-1)/2$ ととれる。比較的少い繰り返しで, かなり高い効率が達成されているのが判るであろう。

異常値に対する振舞いを調べる為に, H_1 の下での (3,1,r)-推定量の性質を調べてみた。ただし, ここでは, David [3]の結果と対応がつくように, (3,1,r)-推定量の平方根に乗数(表B作成の際に数値実験により求められた)を掛けて得られる σ の推定量についての結果のみ示す。この修整は, 推定量のバイアスを減らす為のものである。

表Cに, 比較の為にとりあげた推定量を, 表Dには, “スベリ”モデルの下でのそれらの平均と平均2乗誤差(MSE)を示す。図1, 図2はそれらをグラフ化したものであるが, 通常良く用いられる4分位偏差などの線形推定量に比べ, (3,1,r)-推定量から導かれる $\hat{\sigma}$ も遜色ないと言えるだろう。

Table C. Examples of unbiased and robust estimators of σ

BL : Best linear unbiased estimator of σ
 G : Gupta's estimator
 BL1 : BL for 1 observation removed at each end
 G1 : G for 1 observation removed at each end
 GINI: Gini's mean difference \times const.
 IQ : Inter quartile range \times const.
 RSr : Square root of (3,1,r)-estimator \times a(r)

$$a(r) = (1 - \text{Var}((3,1,r)\text{-estimator}) / (8\sigma^4))^{-1}$$

Table D. Mean and MSE of the estimators in Table C for sample size n=15 when one observation is $N(\lambda,1)$ and the others from $N(0,1)$

	λ	MEAN				MSE			
		0.0	2.0	3.0	∞	0.0	2.0	3.0	∞
BL	1.000	1.122	1.248	∞	.366	.586	1.085	∞	
G	1.000	1.120	1.240	∞	.367	.576	1.037	∞	
GINI	1.000	1.115	1.223	∞	.376	.559	.943	∞	
BL1	1.000	1.089	1.129	1.144	.460	.602	.725	.803	
G1	1.000	1.084	1.118	1.131	.476	.603	.698	.752	
IQ	1.000	1.071	1.090	1.093	.811	.960	1.022	1.038	
RS1	1.000	1.104	1.173	1.22	.653	.861	1.123	1.73	
		(.004)	(.004)	(.004)	(.013)	(.019)	(.023)		
RS7	0.998	1.105	1.174		.398	.551	.780		
		(.003)	(.003)	(.003)	(.007)	(.011)	(.015)		

NOTE: Figures for BL~IQ are calculated from the moments of the order statistics. (cf. David(1979) in *Robustness in Statistics and Selected Tables in Mathematical Statistics*(1977))
 Figures for RSr are obtained from sampling experiment (iteration=5000).

線形推定量を線形模型の場合に適用することは極めて困難であるのに対し、sub-sampling法の応用は容易であることを改めて強調しておく。

なお、混合モデルの場合にも、“スベリ”モデルの場合と同様の傾向が観察された。

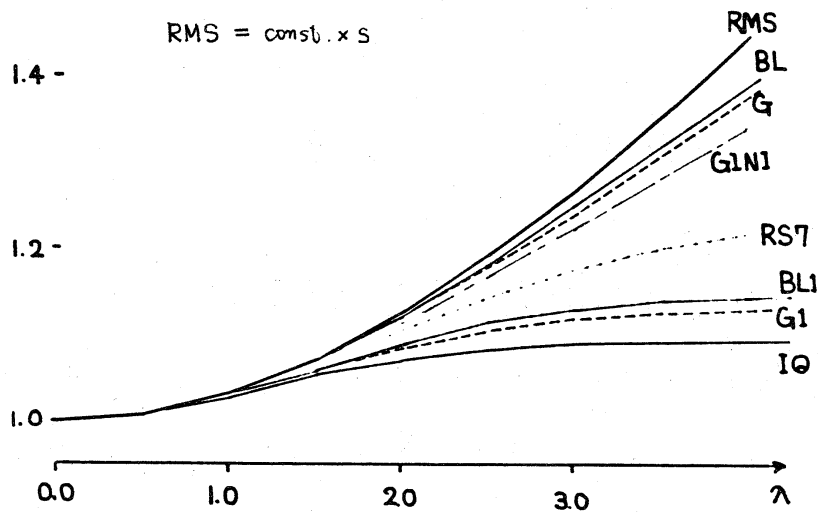


Fig 1. Mean of the estimators in Table C

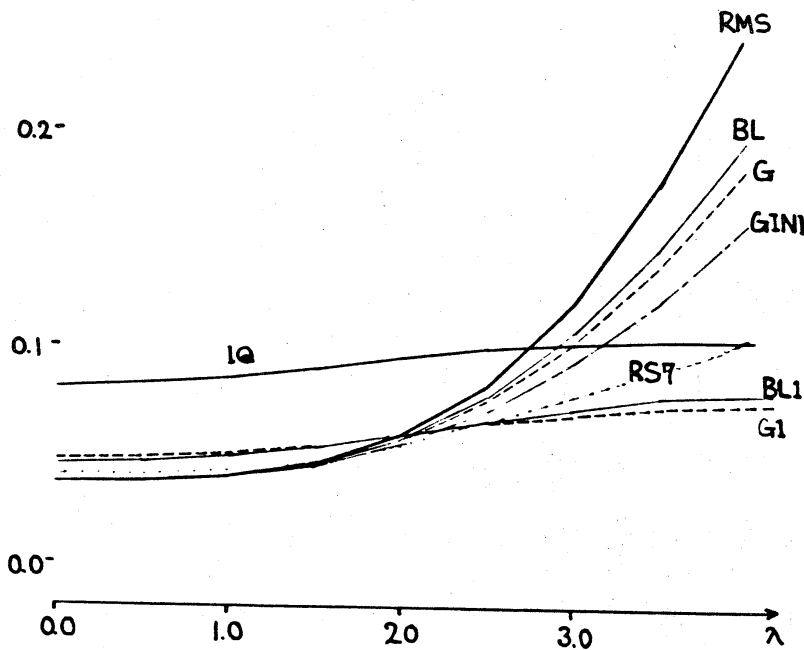


Fig 2. MSE of the estimators in Table C

§ 6. 注意と問題点

ここまでの本文中で述べたが、た幾つかの注意と、今後の問題点について述べる。

(a) §4~§5 の数値例は、計算の便宜の為に m が k で割り切れる場合のみを扱っているが、一般の場合にも BIBD を利用して systematic に sub-sampling 法を応用することは可能である。この場合には、各分割において計算に使われる X が幾つか生ずることになる。

(b) m と r を固定して最適な k を求めるには、ガンマ分布からの順序統計量のモーメントを用いて精密な計算を行わねばならない。 $k=3$ 以外に選ぶことも可能であるが、計算が極めて簡単化される $k=3$ が著者には好ましく思われる。

(c) 各回毎にランダムに分割を行なうとすると、推定量の効率は、これまでの (方針) を採用した場合に比べて上がらない。例えば、 $m=9$, $k=3$, $C=1$ のとき $\hat{\sigma}^2$ 間の ρ は .589 で $r=4$ のときの効率は .723 である。

(d) 打ち切り個数 C を固定せず、adaptive に各 $\hat{\sigma}^2$ を求めた方が効率は上がるであろうが、尺度母数の adaptive なロバースト推定はほとんど研究されていない。subsample 毎の平均

値を推定に利用することも，1標本の場合には可能であるが，分布論的には取り扱いにくくなる。

(e) §2 (vi) に述べた推定法は， $k=2$ の場合の sub-sampling 法の変形とみなすこともできるが，全ての Z_{ij} を 1列に並べてしまう為には，分布論的に扱いにくいものとなっている。

(f) 線形模型，特に（重）回帰の場合には，説明変数 x_i に応じて，分割を決めるのが有効であろうが，詳しい考察は今後の課題としたい。

(g) 東大経済学部・竹内啓教授から，BIBDを利用した systematic な sub-sampling を jack-knife に応用することが可能である，との指摘があった。1個の観測値 X を除いて計算を行なう一般的な jack-knife において， $\binom{M}{l}$ 回の計算を（有効性をあまり失わないように）節約して減らすのに BIBD を利用しようという提案である。更に，一般の相互検証（cross validation）にも同様の考え方が応用できるだろう。

最後に，講演の際に貴重な助言をして下さった東大工学部奥野忠一教授，竹内啓教授，本シンポジウムにお招き下さった広大学校教育学部・景山三平博士に心から感謝して，本稿を閉じることにする。

REFERENCES

- [1] Barnett, V. and Lewis, T.(1978), *Outliers in Statistical Data*, Wiley.
- [2] David, H.A.(1970), *Order Statistics*, Wiley.
- [3] —————(1979), "Robust Estimation in the Presence of Outliers,"
In : Launer, L. and Wilkinson, G.N.(eds.), *Robustness in Statistics*,
pp.61-74, Academic Press.
- [4] Dixon, W.J. and Tukey, J.W.(1968), "Approximate Behavior of the
Distribution of Winsorized t(Trimming/Winsorization 2),"
Technometrics, vol.10, pp.83-98.
- [5] Downton, F.(1966), "Linear Estimates with Polynomial Coefficients,"
Biometrika, vol.53, pp.129-141.
- [6] Gnanadesikan, R.(1977), *Methods for Statistical Data Analysis of
Multivariate Observations*, Wiley. (邦訳：丘本，磯貝訳(1979)，
「統計的多変量データの解析」，日科技連.)
- [7] Gnanadesikan, R. and Kettenring, J.R.(1972), "Robust Estimates,
Residuals, and Outlier Detection with Multi-response Data,"
Biometrics, vol.28, pp.81-124.
- [8] Grubbs, F.E. and Weaver, C.L.(1947), "The Best Unbiased Estimate of
Population Standard Deviation Based on Group Ranges,"
J. of the American Statistical Association, vol.42, pp.224-241.
- [9] Hampel, F.R.(1974), "The Influence Curve and its Role in Robust Estimation,"
J. of the American Statistical Association, vol.69, pp.383-393.
- [10] Hinich, M.R. and Talwar, P.P.(1975), "A Simple Method for Robust Regres-
-sion," *J. of the American Statistical Association*, vol.70, pp.113-119.
- [11] Johnson, D.A. et al.(1978), "Estimating σ^2 in the Presence of Outliers,"
Technometrics, vol.20, pp.441-455.
- [12] Mosteller, F. and Tukey, J.W.(1977), *Data Analysis and Regression*,
Addison-Wesley.
- [13] 大橋靖雄 (1979), "回帰分析におけるロバスト推定法," 品質, vol.9, pp.22-30.
- [14] Sarhan, A.E. and Greenberg, B.G.(eds.) (1962),
Contributions to Order Statistics, Wiley

- [15] Takeuchi, K.(1971), "A Uniformly Asymptotically Efficient Estimator of a Location Parameter,"
J. of the American Statistical Association, vol.66, pp.292-301.
- [16] 竹内啓(1980), 「現象と行動の中の統計教理」, 新曜社
- [17] Tukey, J.W.(1960), "A Survey of Sampling from Contaminated Distributions,"
In : Olkin, I.(ed.), *Contributions to Probability and Statistics*,
Stanford University Press.