数理解析研究所講究録
404巻 1980年 36-47

Norm of alias matrices for $(\ell+1)$-factor interactions in balanced fractional 2^m factorial designs of resolution $2\ell+1$

神戸大 教育　白倉 暉弘

§1. 序

m個の因子で各々2レベルで施される実験を考える。要因効果として，θ_ϕを一般平均，θ_tをt番目の因子の主効果，一般に$\theta_{t_1\cdots t_k}$を相当する因子間のk因子交互作用とする。$1 \leq \ell < m/2$を満たす整数ℓに対して，$\underline{\theta}$をℓ因子交互作用までからなる$\nu\times 1$，$(\nu=\sum_{\beta=0}^{\ell}\binom{m}{\beta})$，$\underline{\theta}^*$を$(\ell+1)$因子交互作用だけからなる$\binom{m}{\ell+1}\times 1$ベクトルとする。$N$個の処理組合わせからなる計画を$T$とし，それに関する観測値ベクトル$\underline{y}_T$に対して次のモデルを考える。

$$\mathcal{E}(\underline{y}_T) = E\underline{\theta} + E^*\underline{\theta}^* \tag{1}$$

ただしE，E^*はそれぞれ$\underline{\theta}$，$\underline{\theta}^*$に対する$N\times\nu$，$N\times\binom{m}{\ell+1}$計画行列，$\underline{y}_T$の共分散行列は$\sigma^2 I$である。$\underline{\theta}^*=0$の下で$\underline{\theta}$が推定可能となるとき，Tを分解能$2\ell+1$の2^m一部実施要因計画(2^m-FFD)と云う。その時，$\underline{\theta}$のBLUEは$\hat{\underline{\theta}} = M^{-1}E'\underline{y}_T$で与えられる$(M=E'E)$。しかしモデル(1)の下では

$$\mathcal{E}(\hat{\underline{\theta}}) = \underline{\theta} + A\underline{\theta}^* \tag{2}$$

ただし$A=M^{-1}E'E^*$で別名行列と云われる。(2)式は$\underline{\theta}^*$が

それ自身θに比べて無視出来るとしても，$A\theta^*$は必ずしも無視出来ない可能性があることを意味する．そこで$A\theta^*$の影響を出来だけ小さくするために，ノルム$\|A\| = \{tr(A'A)\}^{1/2}$を考える（[1]参照）．又，$\theta^*$の中に真に無視出来ない要因効果が存在し（その数は小とする），しかもどの効果がそれであるか未知である場合でも，$\|A\|$を小にするTを選ぶことは有効であろう．ここでは山本，白倉，桑田[6,7]によって与えられたtriangular type multidimensional partially balanced (TMDPB) アソシェーションスキーム及びその代数に関する性質を用いて強さ$2l+1$の均斉配列Tに対する$\|A\|$の明確な表現を与える．さらに$(m=5,\ 16 \leq N \leq 32)$，$(m=6,\ 22 \leq N \leq 32)$，$(m=7,\ 29 \leq N \leq 50)$を満たす各$N$に対して$\|A\|$を最小にする分解能V $(l=2)$の2^m-FFDを与える．

§2. TMDPBアソシェーションスキームと代数

$S_0 = \{\theta_\phi\}$，$S_1 = \{\theta_{t_1}\}$，一般に$S_p = \{\theta_{t_1 \cdots t_p}\}$をそれぞれ一般平均，主効果効，$p$因子交互作用からなる集合とする．各集合の元の数は$|S_0| = 1$，$|S_1| = m$，$|S_p| = \binom{m}{p}$である．これらの集合の間で，TMDPBアソシェーションスキームにおけるアソシェーションの関係はつぎのように定義される：

$\theta_{t_1 \cdots t_u} \in S_u$と$\theta_{t_1' \cdots t_v'} \in S_v$は第$\alpha$種アソシエートである

$$\Longleftrightarrow \quad |\{t_1,\cdots,t_u\}\cap\{t'_1,\cdots,t'_v\}| = \min(u,v)-\alpha\,, \tag{3}$$

（［6］参照）．この関係を行列表現すると

$$A^{(u,v)} = ((\,a^{t'_1\cdots t'_v}_{t_1\cdots t_u;\alpha}\,))\,,$$

ただし

$$a^{t'_1\cdots t'_v}_{t_1\cdots t_u;\alpha} = \begin{cases} 1\,, & \theta_{t_1\cdots t_u} \text{ と } \theta_{t'_1\cdots t'_v} \text{ は } \alpha\text{-th ass.} \\ 0\,, & \text{その他}, \end{cases}$$

となる $\binom{m}{u}\times\binom{m}{v}$ 行列 $A^{(u,v)}$ が得られる．これらの行列から

$$\begin{aligned} A^{(u,v)}_{\alpha} &= \sum_{\beta=0}^{u} z^{(u,v)}_{\beta\alpha}\, A^{(u,v)\#}_{\beta} \,, && 0\le\alpha\le u\le v\,, \\ A^{(u,v)\#}_{\beta} &= \sum_{\alpha=0}^{u} z^{\beta\alpha}_{(u,v)}\, A^{(u,v)}_{\alpha} \,, && 0\le\beta\le u\le v\,, \\ A^{(u,v)\#}_{\beta} &= (A^{(v,u)\#}_{\beta})' \,, && u>v \end{aligned} \tag{4}$$

によって得られる $\binom{m}{u}\times\binom{m}{v}$ 行列 $A^{(u,v)\#}_{\beta}$，$(\beta=0,1,\cdots,\min(u,v);\ 1\le u+v\le m)$，を考える．ただし

$$\begin{aligned} z^{(u,v)}_{\beta\alpha} &= \sum_{b=0}^{\alpha} (-1)^{\alpha-b}\, \frac{\binom{u-\beta}{b}\binom{u-b}{u-\alpha}\binom{m-u-\beta+b}{b}\left\{\binom{m-u-\beta}{v-u}\binom{v-\beta}{v-u}\right\}^{\frac{1}{2}}}{\binom{v-u+b}{b}}\,, \\ z^{\beta\alpha}_{(u,v)} &= \frac{\phi_\beta\; z^{(u,v)}_{\beta\alpha}}{\binom{m}{u}\binom{u}{\alpha}\binom{m-u}{v-u+\alpha}}\,, \\ \phi_\beta &= \binom{m}{\beta}-\binom{m}{\beta-1}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

さらに $u,v\le l$ に対して，$A^{(u,v)\#}_{\beta}$ から以下によって得られる $\nu\times\nu$ 行列 $D^{(u,v)\#}_{\beta}$ を考える：$D^{(u,v)\#}_{\beta}$ は $(l+1)^2$ 個の部分行列 $M^{(w,s)}$ をもつ，i.e., w 番目の行ブロックかつ s 番

目の列ブロックに $\binom{m}{w}\times\binom{m}{s}$ 行列をもつ，そして $M^{(u,v)}=A_\beta^{(u,v)\#}$，$M^{(g,r)}=0$，$(g\neq u, r\neq v)$．行列 $A_\beta^{(u,v)\#}$，$D_\beta^{(u,v)\#}$ は次の性質をもつ．

$$
\begin{aligned}
&A_\alpha^{(u,w)\#}A_\beta^{(w,v)\#} = \delta_{\alpha\beta}\,A_\beta^{(u,v)\#} \quad, 0\le u+w,\ w+v\le m,\\
&D_\alpha^{(u,s)\#}D_\beta^{(w,v)\#} = \delta_{\alpha\beta}\,\delta_{sw}\,D_\beta^{(u,v)\#} \quad, 0\le u, s, w, v\le \ell, \qquad (6)\\
&\mathrm{rank}(A_\beta^{(u,v)\#}) = \mathrm{rank}(D_\beta^{(u,v)\#}) = \phi_\beta \ ,
\end{aligned}
$$

（[7] 参照），ただし $\delta_{\alpha\beta}=1\ (\alpha=\beta)$，$\delta_{\alpha\beta}=0\ (\alpha\neq\beta)$．

$(\ell+1)(\ell+2)(2\ell+3)/6$ 個の行列 $D_\beta^{(u,v)\#}$ で生成される多元環 $\mathfrak{A}$ は TMDPB アソシェーシェン代数と云われる．$\mathfrak{A}$ に属する任意の行列 $B\ (=\sum_{\beta=0}^{\ell}\sum_{i=0}^{\ell-\beta}\sum_{j=0}^{\ell-\beta}\lambda_\beta^{i,j}\ D_\beta^{(\beta+i,\beta+j)\#})$ に対して，

$$
Q'BQ = \mathrm{diag}[\Lambda_0;\underbrace{\Lambda_1,\cdots,\Lambda_1}_{\phi_1};\cdots;\underbrace{\Lambda_\ell,\cdots,\Lambda_\ell}_{\phi_\ell}] \qquad (7)
$$

となる直交行列 Q が存在することが知られている（[2, 7]）．ただし Λ_β は (i,j) 要素に $\lambda_\beta^{i,j}$ を持つ $(\ell-\beta+1)\times(\ell-\beta+1)$ 行列である．

§3.　‖A‖の表現

$E(t_1\cdots t_u;t_1'\cdots t_v')$，$(0\le u\le\ell,\ 0\le v\le\ell+1)$，をモデル (1) において u 因子交互作用 $\theta_{t_1\cdots t_u}$ と v 因子交互作用 $\theta_{t_1'\cdots t_v'}$ に相当する行列 $\mathbf{E}=[E'E : E'E^*]$ の要素とする．ここで，T は強さ $2\ell+1$，制約数 m，指標 $\mu_i\ (i=0,\cdots,2\ell+1)$ の均斉配

列であるとする.

<u>定理 1 ([6])</u>. 行列 E は以下で与えられる高々 $2(\ell+1)$ 個の異なる要素 $\gamma_i\ (i=0,\cdots,2(\ell+1))$ をもつ:

$$\gamma_i = \varepsilon(t_1\cdots t_u\,;\,t_1'\cdots t_v'), \tag{8}$$

ただし $i=|\{t_1,\cdots,t_u\}\ominus\{t_1',\cdots,t_v'\}|$. さらに γ_i は具体的に

$$\gamma_i = \sum_{j=0}^{2\ell+1}\sum_{g=0}^{i}(-1)^g\binom{i}{g}\binom{2\ell+1-i}{j-i+g}\mu_j \tag{9}$$

で与えられる.

(3), (8) より, $M=E'E$ の $\binom{m}{u}\times\binom{m}{v}$ 部分行列 $M^{(u,v)}$ は $\sum_{\alpha=0}^{\min(u,v)}\gamma_w\ A_\alpha^{(u,v)}$ (ただし $w=|v-u|+2\alpha$) で与えられる. (4), (5) から M はつぎのように与えられる

$$M = \sum_{\beta=0}^{\ell}\sum_{i=0}^{\ell-\beta}\sum_{j=0}^{\ell-\beta}\kappa_\beta^{i,j}\ D_\beta^{(\beta+i,\beta+j)\#}, \tag{10}$$

ただし

$$\kappa_\beta^{i,j} = \kappa_\beta^{j,i} = \sum_{\alpha=0}^{\beta+i}\gamma_{j-i+2\alpha}\ z_{\beta\alpha}^{(\beta+i,\beta+j)}\quad ,\ 0\le i\le j\le \ell-\beta. \tag{11}$$

$D_\beta^{*(u,\ell+1)\#}$ を $\nu\times\binom{m}{\ell+1}$ 行列で, その s 番目の行ブロックに $\binom{m}{s}\times\binom{m}{\ell+1}$ 部分行列 $M^{(s,\ell+1)}$, $(s=0,\cdots,\ell)$, に対して, $M^{(u,\ell+1)} = A_\beta^{(u,\ell+1)\#}$, $M^{(r,\ell+1)}=0$, $(r\neq u)$, とする. その時, 同様に

$$M^* = E'E^* = \sum_{\beta=0}^{l} \sum_{i=0}^{l-\beta} \eta_\beta{}^i \; D_\beta^{*(\beta+i,\,l+1)\#}. \qquad (12)$$

が得られる．ただし

$$\eta_\beta{}^i = \sum_{\alpha=0}^{\beta+i} \gamma_{l+1-\beta-i+2\alpha} \; z_{\beta\alpha}^{(\beta+i,\,l+1)}, \quad 0 \le i \le l-\beta. \qquad (13)$$

(6) から次の補題が示される．

<u>補題 2</u>.　$0 \le \alpha \le u,\ 0 \le \beta \le v,\ 0 \le u,\ v \le l$ に対して，

$$D_\alpha^{*(u,\,l+1)\#} \left(D_\beta^{*(v,\,l+1)\#}\right)' = \delta_{\alpha\beta} D_\beta^{(u,v)\#}.$$

つぎに

$$K_\beta = \begin{bmatrix} k_\beta^{0,0} & k_\beta^{0,1} & \cdots & k_\beta^{0,l-\beta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_\beta^{l-\beta,0} & k_\beta^{l-\beta,1} & \cdots & k_\beta^{l-\beta,l-\beta} \end{bmatrix},$$

$$K_\beta^* = \begin{bmatrix} k_\beta^{*0,0} & k_\beta^{*0,1} & \cdots & k_\beta^{*0,l-\beta} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_\beta^{*l-\beta,0} & k_\beta^{*l-\beta,1} & \cdots & k_\beta^{*l-\beta,l-\beta} \end{bmatrix}, \qquad (14)$$

となる $(l-\beta+1)\times(l-\beta+1)$ 対称行列を考える．ただし $k_\beta^{*i,j} = \eta_\beta^i \cdot \eta_\beta^j$.

<u>定理3</u>. 強さ $2l+1$, 制約数 m, 指標 μ_i $(i=0,\cdots,2l+1)$ の均斉配列 T に対して,

$$\| A \|^2 = \sum_{\beta=0}^{l} \phi_\beta \, tr\,(K_\beta^* K_\beta^{-2}). \tag{15}$$

<u>証明</u>. (10) より $M \in \mathfrak{A}$. よって (7) より

$$M^{-1} = \sum_{\beta=0}^{l} \sum_{i=0}^{l-\beta} \sum_{j=0}^{l-\beta} k_{i,j}^{\beta} \; D_\beta^{(\beta+i,\,\beta+j)\#}.$$

ただし $k_{i,j}^{\beta}$ は K_β^{-1} の (i,j) 要素. 補題2, (12) より

$$M^* M^{*\prime} = \Big(\sum_{\beta=0}^{l} \sum_{i=0}^{l-\beta} \eta_\beta^i \, D_\beta^{*(\beta+i,\,l+1)\#} \Big) \Big(\sum_{\alpha=0}^{l} \sum_{j=0}^{l-\alpha} \eta_\alpha^j \, D_\alpha^{*(\alpha+j,\,l+1)\#} \Big)^{\prime}$$

$$= \sum_{\beta=0}^{l} \sum_{i=0}^{l-\beta} \sum_{j=0}^{l-\beta} \eta_\beta^i \cdot \eta_\beta^j \; D_\beta^{(\beta+i,\,\beta+j)\#}$$

$$= \sum_{\beta=0}^{l} \sum_{i=0}^{l-\beta} \sum_{j=0}^{l-\beta} k_\beta^{*\,i,j} \, D_\beta^{(\beta+i,\,\beta+j)\#}.$$

よって $M^* M^{*\prime} \in \mathfrak{A}$. $M^{-1} \in \mathfrak{A}$ から $M^{-1} M^* M^* M^{-1} \in \mathfrak{A}$ を得る. (7) より

$$\| A \|^2 = tr\,(AA^\prime) = tr\,(M^{-1} M^* M^* M^{-1})$$

$$= \sum_{\beta=0}^{l} \phi_\beta \, tr\,(K_\beta^{-1} K_\beta^* K_\beta^{-1}).$$

よって (15) を得る.

定理3の均斉配列Tに対して，$\mu_0=\mu_1=\cdots=\mu_{2\ell+1}=\lambda$ ならばTを強さ $2\ell+1$，制約数 m，指標 λ の直交配列と云う．

<u>系4</u>. 上記の直交配列に対して，$\|A\|=0$.

<u>証明</u>. (9) より $\gamma_i=0$ $(i=1,2,\cdots,2\ell+1)$．よって (12), (13) より $M^*=0$，よって $\|A\|=0$ が成り立つ．

$\|A\|$ の値を最小にする計画Tを最良別名計画と呼ぶ．次節で強さ5 $(\ell=2)$ の均斉配列から得られる分解能Ⅴの 2^m-FFD（特に 2^m-BFFD と云う）の中から最良別名計画を具体的に与える．

§4. 分解能Ⅴの最良別名 2^m-BFFD

$\ell=2$ に対する $\|A\|$ をより具体的に与える．強さ5，制約数 m，指標 $\mu_0,\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4$ の均斉配列に対して

$$\gamma_0=N=\mu_0+\mu_5+5(\mu_1+\mu_4)+10(\mu_2+\mu_3),$$

$$\gamma_1=-(\mu_0-\mu_5)-3(\mu_1-\mu_4)-2(\mu_2-\mu_3),$$

$$\gamma_2=\mu_0+\mu_5+\mu_1+\mu_4-2(\mu_2+\mu_3),$$

$$\gamma_3=-(\mu_0-\mu_5)+\mu_1-\mu_4+2(\mu_2-\mu_3),$$

$$\gamma_4=\mu_0+\mu_5-3(\mu_1+\mu_4)+2(\mu_2+\mu_3),$$

$$\gamma_5 = -(\mu_0-\mu_5) + 5(\mu_1-\mu_4) - 10(\mu_2-\mu_3).$$

(11), (13), (14), (15) より次の定理を得る.

定理5. 上記均斉配列から得られる分解能Ⅴの 2^m-BFFD に対して,

$$\|A\|^2 = \mathrm{tr}(K_0^* K_0^{-2}) + (m-1)\,\mathrm{tr}(K_1^* K_1^{-2}) + \frac{m(m-3)}{2}\,\mathrm{tr}(K_2^* K_2^{-2}).$$

ただし

$$\kappa_0^{0,0} = \gamma_0, \quad \kappa_0^{0,1} = \kappa_0^{1,0} = \sqrt{m}\,\gamma_1, \quad \kappa_0^{0,2} = \kappa_0^{2,0} = \sqrt{\tbinom{m}{2}}\,\gamma_2,$$

$$\kappa_0^{1,1} = \gamma_0 + (m-1)\gamma_2, \quad \kappa_0^{1,2} = \kappa_0^{2,1} = \sqrt{\frac{m-1}{2}}\,\{2\gamma_1 + (m-2)\gamma_3\},$$

$$\kappa_0^{2,2} = \gamma_0 + 2(m-1)\gamma_2 + \tbinom{m-2}{2}\gamma_4;$$

$$\kappa_1^{0,0} = \gamma_0 - \gamma_2, \quad \kappa_1^{0,1} = \kappa_1^{1,0} = \sqrt{m-2}\,(\gamma_1 - \gamma_3),$$

$$\kappa_1^{1,1} = \gamma_0 + (m-4)\gamma_2 - (m-3)\gamma_4;$$

$$\kappa_2^{0,0} = \gamma_0 - 2\gamma_1 + \gamma_4 = 2^4(\mu_2+\mu_3);$$

$$\eta_0^0 = \sqrt{\tbinom{m}{3}}\,\gamma_3, \quad \eta_0^1 = \sqrt{\tbinom{m-1}{2}/3}\,\{3\gamma_2 + (m-3)\gamma_4\},$$

$$\eta_0^2 = \sqrt{\frac{m-2}{2}}\,\{3\gamma_1 + 3(m-3)\gamma_3 + \tbinom{m-3}{2}\gamma_5\};$$

$$\eta_1^0 = \sqrt{\tbinom{m-2}{2}}\,(\gamma_2 - \gamma_4), \quad \eta_1^1 = \sqrt{\frac{m-3}{2}}\,\{2\gamma_1 + (m-6)\gamma_3 - (m-4)\gamma_5\};$$

$$\eta_2^0 = \sqrt{m-4}\,(\gamma_1 - 2\gamma_3 + \gamma_5) = 2^4\sqrt{m-4}\,(\mu_3 - \mu_2).$$

表Ⅰ-Ⅲにおいて, $(m=5,\ 16 \le N \le 32)$, $(m=6,\ 22 \le N \le 32)$, $(m=7,\ 29 \le N \le 50)$ を満たす各 N に対して最良別名 2^m-BFFD に相当する均斉配列の指標 $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$

の値が $\|A\|$, E_1, E_2, E_3 の値と共に与えられている．E_1, E_2, E_3 は計画の効率で Srivastava & Ghosh [5] によ，てつぎのように与えられている：

$$E_1 = 100 \times \frac{t_N(opt)}{t_N(T)}, \quad E_2 = 100 \times \frac{\nu/N}{t_N(opt)}, \quad E_3 = 100 \times \frac{\nu/N}{t_N(T)} .$$

ただし $t_N(opt)$ はトレース基準に関して最適な 2^m-BFFD に対する $tr M^{-1}$, $t_N(T)$ は最良別名計画 2^m-BFFD に対する $tr M^{-1}$ である．E_1 はトレース基準に関して最適な計画に対する最良別名計画の効率，E_2，E_3 はそれぞれ直交型計画(2^m-OFFD) に対する最適な 2^m-BFFD，最良別名 2^m-BFFD の効率である．

表 I

最良別名 2^5-BFFD

N	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	$\|A\|$	E_1	E_2	E_3
16	1	0	1	0	1	0	3.1623	100.0	100.0	100.0
17	1	0	1	0	1	1	3.0619	100.0	97.2	97.2
18	1	0	1	0	1	2	3.0732	98.1	94.6	92.8
19	1	0	1	0	1	3	3.0873	97.5	90.6	88.4
20	0	1	1	0	1	0	2.5254	99.1	87.0	86.2
21	0	1	1	0	1	1	2.5337	97.3	90.3	87.9
22	1	0	1	1	0	1	1.3041	82.8	89.5	74.1
23	2	0	1	1	0	1	1.3915	83.6	87.2	72.9
24	3	0	1	1	0	1	1.4307	83.4	84.6	70.6
25	4	0	1	1	0	1	1.4524	83.2	81.9	68.1
26	5	0	1	1	0	1	1.4661	73.4	89.5	65.7
27	6	0	1	1	0	1	1.4755	70.3	90.3	63.4
28	7	0	1	1	0	1	1.4824	67.6	90.7	61.3
29	8	0	1	1	0	1	1.4877	66.6	89.0	59.2
30	0	1	1	1	1	0	0.6428	100.0	91.5	91.5
31	1	1	1	1	1	0	0.7906	100.0	97.2	97.2
32	1	1	1	1	1	1	0.0000	100.0	100.0	100.0

表 Ⅱ

最良別名 2^6-BFFD

N	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	$\|A\|$	E_1	E_2	E_3
22	1	1	1	0	1	1	5.1897	100.0	86.8	86.8
23	1	1	1	0	1	2	5.1211	98.7	85.1	84.0
24	1	1	1	0	1	3	5.1146	98.3	82.2	80.8
25	1	1	1	0	1	4	5.1171	97.8	79.6	77.8
26	1	1	1	0	1	5	5.1210	97.5	76.8	75.0
27	1	1	1	1	0	1	4.2111	100.0	83.5	83.5
28	1	1	1	1	0	2	4.2111	100.0	82.8	82.8
29	1	1	1	1	0	3	4.2111	99.7	81.0	80.7
30	1	1	1	1	0	4	4.2111	99.2	79.0	78.4
31	1	1	1	1	1	0	2.0976	100.0	93.8	93.8
32	1	1	1	1	1	1	0.0000	100.0	100.0	100.0

表 Ⅲ

最良別名 2^7-BFFD

N	μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	μ_5	$\|A\|$	E_1	E_2	E_3
29	2	2	1	0	1	2	8.1309	100.0	67.3	67.3
30	2	2	1	0	1	3	8.0143	98.1	66.8	65.5
31	2	2	1	0	1	4	7.9747	97.5	65.2	63.6
32	2	2	1	0	1	5	7.9569	97.3	63.4	61.7
33	2	2	1	0	1	6	7.9475	97.1	61.7	59.9
34	2	2	1	0	1	7	7.9419	97.0	60.0	58.2
35	2	2	1	0	1	8	7.9384	96.9	58.4	56.6
36	3	3	1	0	1	3	7.9037	89.4	61.5	55.0
37	3	3	1	0	1	4	7.8816	87.3	61.6	53.8
38	3	3	1	0	1	5	7.8743	86.6	60.6	52.5
39	2	2	1	0	1	7	7.8523	97.3	59.4	57.8
40	2	2	1	0	1	8	7.8340	97.3	58.1	56.5
41	2	2	1	0	1	9	7.8237	97.3	56.8	55.2
42	2	2	1	0	1	10	7.8175	97.3	55.5	54.0
43	2	2	1	1	2	1	2.5254	95.6	90.5	86.6
44	2	2	1	1	2	2	1.5548	98.0	90.8	89.0
45	3	2	1	1	2	2	1.6157	98.4	89.6	88.2
46	3	2	1	1	2	3	1.5730	98.7	88.2	87.0
47	4	2	1	1	2	3	1.6157	98.7	86.7	85.6
48	4	2	1	1	2	4	1.6470	98.8	85.2	84.2
49	5	2	1	1	2	4	1.6888	89.3	92.6	82.7
50	6	2	1	1	2	4	1.7262	85.3	95.1	81.1

注意. (ℓ+1)因子交互作用以上のすべての要因効果に対する ℓ の別名行列 A のノルムに関して，同様な議論が白倉[3,4]によってなされている．

References

[1] Hedayat, A., Raktoe, B. L. and Federer, W. T. (1974). On a measure of aliasing due to fitting an incomplete model. Ann. Statist. 2, 650-660.

[2] Shirakura, T. (1976). Balanced fractional 2^m factorial designs of even resolution obtained from balanced arrays of strength 2ℓ with index $\mu_\ell = 0$. Ann. Statist. 4, 723-735.

[3] Shirakura, T. (1976). A note on the norm of alias matrices in fractional replication. Austral. J. Statist. 18, 158-160.

[4] Shirakura, T. (1979). On the norm of alias matrices in balanced fractional 2^m factorial designs of resolution $2\ell+1$. J. Statist. Planning Inf. 3, 337-345.

[5] Srivastava, J. N. and Ghosh, S. (1977). Balanced 2^m factorial designs of resolution V which allow search and estimation of one extra unknown effects, $4 \leqq m \leqq 8$. Commun. Statist. (A) 6, 141-166.

[6] Yamamoto, S., Shirakura, T. and Kuwada, M. (1975). Balanced arrays of strength 2ℓ and balanced fractional 2^m factorial designs. Ann. Inst. Statist. Math. 27, 143-157.

[7] Yamamoto, S., Shirakura, T. and Kuwada, M. (1976). Characteristic polynomials of the information matrices of balanced fractional 2^m factorial designs of higher $(2\ell+1)$ resolution. Essays in Probability and Statistics. Birthday volume in honor of Prof. J. Ogawa (Ed., S. Ikeda et al.), 73-94.