数理解析研究所講究録
404巻 1980年 19-24

Randomization Design 再論

竹内　啓

Randomization designについては20年も前に，田口玄一氏の確率対応法にヒントを得て，一連の論文を発表したことがあった。更にその後10年ほど前「数理統計学の方法的基礎」なる論文集をまとめた際に若干の再検討を加えた。

20年ほど前にはちょうどアメリカでもSatterthwaiteにより田口氏のアイデアとよく似た提案があり，それに関連してrandomized designについてのいくつかの論文が発表されたが，あまり一般の関心をひくことなく終ったようである。

日本でも外国でも，この問題はほとんど忘れられているようである。しかしながら，私はなおこの問題については，いくつかの理論的問題点が残されており，またそれは応用上にも重要な意味を持っているので，改めて注意を喚起するのに値すると思っている。そこで基本的な問題点を説明したい。

J. Kieferは1958年に基本的な論文：Non-randomized optimality and randomized non-optimality of orthogonal designs (AMS)において，仮説検定の局所検出力を基準にすると，最も極端にunbalancedな配置をランダムにバランスさせるのが最適であることを示した。ところがこの論文のタイトルの前半に関してはその後数多くの論

文が書かれたにもかかわらず，後者については その後ほとんど何もなされていない。そこでこの点を解説しよう．

いま最も簡単な場合として，k個の母平均μ_i $(i=1\cdots k)$がすべて等しいか否かを検定する問題を考えよう．このためにそれぞれについてN_i個の観測値x_{ij} $i=1\cdots k,\ j=1\cdots N_i$を得ることができるとしよう．問題は制限条件$\sum N_i=n$の下で，最適な$N_i$を定めることである．ただし$N_i$はランダムに定めてもよいとする。ここで$x_{ij}$は互いに独立に分散$\sigma^2$の正規分布に従うものとする．簡単のために$\sigma^2$は既知としておく．

いまN_iの中で0でないものの数をg $(\leq k)$とする．仮説$\mu_i\equiv\mu$を最もふつうの検定方式であるχ^2検定によって検定するとすれば

$$\chi^2=\sum N_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2/\sigma^2$$

となり，その自由度は$g-1$である．対立仮説の下ではχ^2の非心度は$\lambda=\sum N_i(\mu_i-\bar{\mu}^*)^2/\sigma^2$：$\bar{\mu}^*=\sum N_i\mu_i/n$となる．従って$N_i$が与えられたときの検出力は

$$\beta(\lambda)=P\{\chi'^2(g-1,\lambda)>\chi^2_\alpha(g-1)\}$$

となる．そうしてこれはよく知られているように

$$\beta(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}}\frac{(\lambda/2)^k}{k!}P\{\chi^2(g-1+2k)>\chi^2_\alpha(g-1)\}$$

と表される．ところで

$$\beta'(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k-\lambda}{2}\right) \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}}(\lambda/2)^{k-1}}{k!} P\{\chi^2(g-1+2k) > \chi^2_\alpha(g-1)\}$$

であるから，λが小さいとき

$$\beta(\lambda) = \alpha + \beta'(0)\lambda + o(\lambda)$$

$$= \alpha + [P\{\chi^2(g+1) > \chi^2_\alpha(g-1)\} - \alpha](\lambda/2) + o(\lambda),$$

$$= \alpha + \frac{\lambda}{2\Gamma(\frac{g+1}{2})}\left(\frac{\chi^2_\alpha}{2}\right)^{\frac{g-1}{2}} e^{-\frac{\chi^2_\alpha}{2}} + o(\lambda)$$

$$= \alpha + c_1(g)\lambda + o(\lambda)$$

となる．それゆえ N_i の分布を考慮すると 平均検出力は

$$E(\beta(\lambda)) = \alpha + E(c_1(g)\lambda) + o(\lambda)$$

となる。ここで g が一定であるとすると，

$$E(c_1(g)\lambda) = c_1(g)E(\lambda)$$

となり，更に

$$\sigma^2 E(\lambda) = \sum E(N_i)\mu_i^2 - E(\sum N_i\mu_i)^2/n$$

を得る ここで分布が i に関して対称的であるとすれば

$$E(N_i) = n/k$$

$$E(N_iN_j) = E((\sum N_i)^2 - \sum N_i^2)/k(k-1)$$

$$= n^2/k(k-1) - E(N_1^2)/(k-1)$$

であるから，

$$E(\sum N_i\mu_i)^2/n = \frac{1}{n(k-1)}\{(k-1)\sum \mu_i^2 - \sum_{i\neq j}\mu_i\mu_j\} E(N_1^2)$$

$$+ \frac{1}{k-1}\sum_{i\neq j}\mu_i\mu_j$$

$$= \frac{k}{n(k-1)} \Sigma (\mu_i - \bar{\mu})^2 E(N_1^2) + \frac{1}{k-1} \sum_{i \neq j} \mu_i \mu_j$$

したがって

$$\sigma^2 E(\lambda) = \frac{n}{k} \Sigma (\mu_i - \bar{\mu})^2 \left\{ 1 - \frac{k^2}{n^2(k-1)} V(N) \right\}$$

ただし $V(N) = E(N_1)^2 - \dfrac{n^2}{k^2}$

となる。それゆえ g が一定のとき、検出力を大きくするには $V(N)$ を小さくすることが望ましい。そのためには

$$P\{N_1 = n/g\} = g/k$$

$$P\{N_1 = 0\} = 1 - g/k$$

とすればよい。(n/g が整数になるものと仮定しておく)

そのとき $V(N) = n^2(k-g)/kg$ となるから

$$\sigma^2 E(\lambda) = \frac{n(g-1)}{g(k-1)} \Sigma (\mu_i - \bar{\mu})^2$$

を得る　したがって局所検出力は

$$(1 - 1/g)\, C_1(g) = k_1(g)$$

の線形関数として表されることになる

この値は次のようになる

g	1	2	3	4	5
$k_1(g)$	0	0.0573	0.0499	0.0438	0.0392

すなわち $g=2$ のとき最大となる。すなわち k 個の平均の

うち2つだけをランダムにえらび、その2種について $n/2$ 回ずつ観測するのが最もよいということになる。

しかしλが大きくなるとこのような方法は適当でなくなる。$\Sigma(\mu_i-\bar{\mu})^2$ が大きいときには g が大きい方が検出力が大きくなる。どのような値で順序が入れ換るかは数値的にしらべるほかはないが、また具体的な検討は行われていない。

もう一つの問題点は、検定統計量を変えることである

$$\bar{\chi}^2 = \Sigma n(\bar{x}_i-\bar{\bar{x}})^2/k\sigma^2$$

ただし　$\bar{\bar{x}} = \Sigma \bar{x}_i/k$

とおくと $\bar{\chi}^2$ の仮説の下での分布は χ^2 分布にはならない。N_i が与えられたとき、仮説の下での $\bar{\chi}^2$ のモーメントは比較的容易に計算できる。とくに

$$E(\bar{\chi}^2|N_i) = \{n(k-1)/k^2\}\Sigma(1/N_i)$$

$$V(\bar{\chi}^2|N_i) = \{2n^2(k-2)/k^3\}\Sigma(1/N_i^2) + (n^2/k^4)(\Sigma 1/N_i)^2$$

となるから、$c\bar{\chi}^2$ の条件付分布を自由度 ϕ の χ^2 分布で近似することができる。ただし

$$\phi = 2\{E(\bar{\chi}^2|N_i)\}^2/V(\bar{\chi}^2|N_i)$$

$$c = \phi/E(\bar{\chi}^2|N_i)$$

である。一般に $\phi \leqq k-1$、$c \leqq 1$ であることに注意しよう。

或いは更に

$$E(\bar{\chi}^2) = \{n(k-1)/k\}E(N_1),$$

$$V(\bar{\chi}^2) = E\{V(\bar{\chi}^2|N_i)\} + V\{E(\bar{\chi}^2|N_i)\}$$
$$=\{2n^2(k-2)/k^2\}E(1/N_i^2) + (n^2/k^4)E\{\Sigma 1/N_i\}^2$$
$$+\{n^2(k-1)^2/k^4\}V\{\Sigma 1/N_i\}$$

として $\bar{\chi}^2$の（無条件）分布をχ^2分布で近似することもできる。ここでN_iのとる値の組が集合としては一定であって、ただ番号だけがランダムに定められるような場合であれば、条件付分布はN_iには無関係になるから、無条件分布に一致することになる。

$\bar{\chi}^2$による検定の局所検出力は、近似的には、

$$\beta(\bar{\lambda}) \doteqdot \alpha + [P\{\chi^2(\phi+2) > \chi^2_\alpha(\phi)\} - \alpha](\bar{\lambda}/2) + o(\bar{\lambda})$$

と表すことができる。ただしここで

$$\bar{\lambda} = E\{\bar{\chi}^2/c - \phi\} = (n/ck)\Sigma(\mu_i - \bar{\mu})^2/\sigma^2$$

である。それゆえχ^2による検定にくらべて、非心度と自由度がともに小さくなっていることがわかる

しかしn/kが整数でない場合には、若干の数値的検討によると$\bar{\chi}^2$を用いる検定の方がχ^2による検定よりも局所検出力が高くなるようである。

$\bar{\chi}^2$の条件付分布を用いる検定においては、方法論上の難点はないから、実用上にも安心して応用可能である。

以上の議論は本質的にはRandom Balanced Incomplete Block Designの場合（前掲書第10章）に適用できる