

部分系間相互作用の減衰演算子への影響

東大 理 物理 有光敏彦
(現在は、筑波大 物理学系)

序

巨視的(統計力学的)な現象を記述するのに、確率微分方程式(ランジュバン方程式)を立てて議論することがよく行なわれる。それを解いて注目している物理量の振舞いを求め観測量と比較することも行なわれているが、その出発点となる確率微分方程式を従来やられているような『現象論的考察』で書き下すのがはたしてよいのかどうかを少しくわしく調べる。

従来やられている方法とは次のようなものである。簡単のため A と B 、2つの系が相互作用していてそれぞれが互いに独立な熱浴と接触している場合を例にとって説明する。3つ以上の系の場合も本質的には同じである。注目している確率変数を X_A 、 X_B とすると、ランジュバン方程式を次のように書き下すのである。

$$\dot{X}_A = (i\Omega_A - K_A) X_A + i\Omega_{AB}(X_A, X_B) + F_A, \quad (0.1a)$$

$$\dot{X}_B = (i\Omega_B - K_B) X_B + i\Omega_{BA}(X_A, X_B) + F_B. \quad (0.1b)$$

ただし K_A は 系 A が単独にその熱浴と接触しているときに決まる減衰定数である。 K_B も同様。 Ω_{AB} 、 Ω_{BA} は 系 A と B の間の可逆的な相互作用を表わす部分であり、 Ω_A 、 Ω_B は 各系に固有なモードを表わす。また F_A 、 F_B は ランジュバン力であり、ふつうは その相関を ガウス型と仮定する。

式 (0.1) の言うところは、系 A と B の間の相互作用がなく 独立にそれぞれが 熱浴と接触している場合の減衰定数がわかっていて、系 A B 間の相互作用の仕方が知れていれば、系 A と B の間に相互作用のある場合のランジュバン方程式も ただちに書き下せるということである。

ところで (0.1) は 本来微視的な方程式 (たとえば リウビユ方程式) から導出されるべきものである。注目している変数だけを残して 他の変数を消去することにより 系の不可逆性が表われるわけであるが、その減衰定数は 一般には A B 間の相互作用に依存するはずである。(0.1) には その効果は まったく入っていないわけで、注目している系 A と B の正しい発展を記述しないのであるが、A B 間の相互作用が十分弱ければ (0.1) による記述が近似的に正しいものと信じられている。

そこで 物理系の微視的モデルから出発して 熱浴の変数を消去し、注目している系を構成している部分系間の相互作用が減衰定数に及ぼす影響を調べる。その結果 従来やられている (0.1) から出発する議論は、はなはだ不完全で 危険であることが分かる。

§ 1. 一般論

互いに相互作用している 2 つの部分系 A 、 B と、それぞれに接触している熱浴 R_A 、 R_B で構成されている全体系を考える。簡単のため ハミルトニアンは時間に依存しないとする。ハミルトニアンが時間に依存する場合や、3 つ以上の部分系の場合への拡張は、少し議論を面倒にするだけである。§ 2 のパラメトリック発振器の系では 外場のためハミルトニアンが時間に依存する。§ 3 のレーザー系は 3 つ以上の部分系の一例である。

さて 全体系のハミルトニアンは 次のように書ける。

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \quad (1.1)$$

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_F + \mathcal{H}_{AB}, \quad (1.2)$$

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_{AR_A} + \mathcal{H}_{BR_B}. \quad (1.3)$$

ただし $\mathcal{H}_{AB}$ は 部分系 A B 間の相互作用を表わし、 $\mathcal{H}_{AR_A}$

($\mathcal{H}_{BRB}$) は 部分系 A (B) とそれに接触している熱浴との相互作用を表わす。また

$$\mathcal{H}_F = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_B + \mathcal{H}_{R_A} + \mathcal{H}_{R_B}, \quad (1.4)$$

で、 $\mathcal{H}_A$ ($\mathcal{H}_B$) は 部分系 A (B) のハミルトニアンを、 $\mathcal{H}_{R_A}$ ($\mathcal{H}_{R_B}$) は 熱浴 R_A (R_B) のハミルトニアンである。全体系の密度演算子を $W(t)$ とすると リウビユ方程式は ($\hbar \equiv 1$)

$$\dot{W}(t) = -i [\mathcal{H}, W(t)] \equiv -i \mathcal{H}^x W(t), \quad (1.5)$$

である。ここで

$$\tilde{W}(t) = U_0^\dagger(t, 0) W(t) U_0(t, 0), \quad (1.6)$$

$$\bar{W}(t) = U_F^\dagger(t, 0) W(t) U_F(t, 0), \quad (1.7)$$

なる量を定義する。ただし

$$U_0(t, \tau) = \exp [-i \mathcal{H}_0 t], \quad (1.8)$$

$$U_F(t, \tau) = \exp [-i \mathcal{H}_F t], \quad (1.9)$$

であり、これは

$$U_0(t, \tau) = U_F(t, 0) V(t, \tau) U_F^\dagger(t, 0), \quad (1.10)$$

$$V(t, \tau) = \exp_+ \left\{ -i \int_\tau^t ds \bar{\mathcal{H}}_{AB}(s) \right\}, \quad (1.11)$$

なる関係で結ばれている。(1.7) の定義と同様に

$$\bar{\mathcal{H}}_{AB}(t) = U_F^\dagger(t, 0) \mathcal{H}_{AB} U_F(t, 0), \quad (1.12)$$

としている。

さて (1.6) を用いると (1.5) は

$$\dot{\tilde{W}}(t) = -i \tilde{\mathcal{H}}_1(t) \tilde{W}(t), \quad (1.13)$$

と変形できる。ただし

$$(1.14)$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_1(t) = U_0^\dagger(t, 0) \mathcal{H}_1 U_0(t, 0),$$

である。いわゆる減衰理論¹⁾⁻³⁾を用いて熱浴 R_A , R_B の変数を消去すると (1.13) より

$$\dot{\tilde{W}}_S(t) = \text{tr}_R \int_0^\infty d\tau \left\{ [\tilde{\mathcal{H}}_1(t-\tau) \rho_R \tilde{W}_S(t), \tilde{\mathcal{H}}_1(t)] + \text{h.c.} \right\}, \quad (1.15)$$

が得られる。ただし ρ_R は熱浴の密度演算子で

$$\tilde{W}_S(t) = \text{tr}_R \tilde{W}(t), \quad (1.16)$$

である。 tr_R は熱浴変数に対してトレースをとることを表わす。(1.15)は例によって熱浴との接触が弱いことと、マルコフ近似を用いている。ここで任意の演算子 X に対して

$$\tilde{X} = V^\dagger(t, 0) \bar{X} V(t, 0), \quad (1.17)$$

(ただし $\tilde{X}$, $\bar{X}$ は (1.6), (1.7) に準じて X より定義されたものとする) なる関係があることに注意すると、(1.15)は (1.7) を用いて次のようにも書ける。

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{W}}_S(t) = & -i [\bar{\mathcal{H}}_{AB}(t), \bar{W}_S(t)] \\ & + \text{tr}_R \int_0^\infty d\tau \left\{ [V(t, t-\tau) \bar{\mathcal{H}}_1(t-\tau) V^\dagger(t, t-\tau) \rho_R \bar{W}_S(t), \bar{\mathcal{H}}_1(t)] + \text{h.c.} \right\}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

次の量を定義して用いている。

$$\bar{\mathcal{H}}_1(t) = U_F^\dagger(t, 0) \mathcal{H}_1 U_F(t, 0), \quad (1.19)$$

$$\bar{W}_S(t) = \text{tr}_R \bar{W}(t). \quad (1.20)$$

ところで従来よくやられる近似 (ハイゼンベルグ表示で (0.1) 式に相当する近似) は、(1.18) で $V(t, t-\tau) = 1$ とするこ

とに対応している。つまり

$$\begin{aligned} \dot{\bar{W}}_S(t) = & -i [\bar{\mathcal{H}}_{AB}(t), \bar{W}_S(t)] \\ & + \text{tr}_R \int_0^{\infty} d\tau \{ [\bar{\mathcal{H}}_1(t-\tau) \rho_R \bar{W}_S(t), \bar{\mathcal{H}}_1(t)] + \text{h.c.} \}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

となり、減衰演算子の項である 右辺オ2項には 部分系間相互作用 $\mathcal{H}_{AB}$ の効果は まったく入らないわけである。その効果は 右辺オ1項に 可逆な相互作用としてのみ考慮されるのである。

そこで 以下で パラメトリック発振器 (§2) と レーザー系 (§3) を、(1.18) 及び (1.21) の両方で扱い、はたして 従来信じられている事が 本当かどうか、さらに (1.21) で無視された項の効果が どの程度のものなのかを 調べてみることにする。

§2. パラメトリック発振器

パラメトリック発振器とは、 LiNbO_3 、KDP、ADP など 非線型光学過程を有する物質を用いて レーザーから発振されたコヒーレントな光の振動数を連続的に変えるための装置である。⁴⁾ レーザー発振器は 発振に用いる物質に特有な振動数の光しか発振できない (最近では 色素レーザーとよばれる振動数可変の発振器も作られるようになった)。そこで レー

レーザー光を用いて吸収スペクトルなどをとる時には、パラメトリック発振器はかかせないものである。図1はパラメトリック発振器の模

式図である。 ω_p が入射レーザー光の振動数を表わし、 ω_s 、 ω_i がそれぞれシグナル光

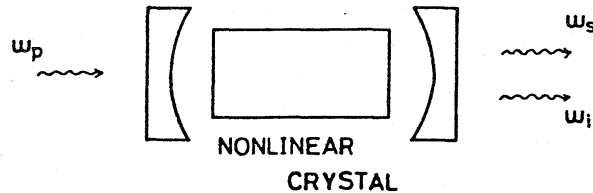


図 1

とアイドラー光の振動数である。振動数 ω_p のレーザー光は十分強力でコヒーレントであるので、古典場として扱うことにすると、パラメトリック過程を記述するハミルトニアンは^{5), 6)}

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_S(t) + \mathcal{H}_R + \mathcal{H}', \quad (2.1)$$

ただし

$$\mathcal{H}_S(t) = \omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b + (G e^{-2i\omega t} a^\dagger b^\dagger + G^* e^{2i\omega t} a b), \quad (2.2)$$

$$\mathcal{H}' = g_1 (a^\dagger C + a C^\dagger) + g_2 (b^\dagger D + b D^\dagger), \quad \mathcal{H}_R = \mathcal{H}_R^C + \mathcal{H}_R^D, \quad (2.3)$$

となる。 ω_a (ω_b) はシグナル (アイドラー) 光の振動数であり、 a (b)、 $a^\dagger$ ($b^\dagger$) はその消滅 (生成) 演算子である (ボーズ交換関係に従う)。 G はレーザー光とシグナル及びアイドラー光の相互作用の強さであり、レーザー光の複素振幅と非線型光学物質の物質定数でかけている。また便宜上 $2\omega = \omega_p$ としている。 C (D) はシグナル (アイドラー) 光と結合定数 g_1 (g_2) で接触している熱浴の演算子である。 $\mathcal{H}_R$ は

熱浴自体のハミルトニアンである。この系を模式的に表わしたのが 図 2

である。A、B
が シグナル及
バイドラーの

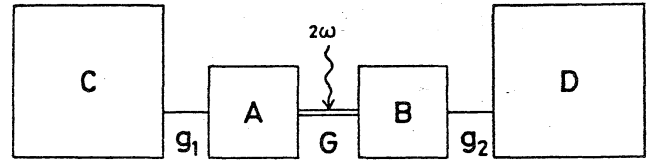


図 2

系を表わし、そ

れぞれの熱浴を C、D としている。

全系の密度演算子を $W(t)$ とすると、リウビユ方程式は

$$\dot{W}(t) = -i[H(t), W(t)], \quad (2.4)$$

となる。§ 1 の一般論に従って 相互作用表示に移して 減衰理論を適用する。そのあと 回転系に乗ってハミルトニアンの時間依存性をとると、(1.18)に相当する方程式が得られるが、この系では それを厳密に取扱うことができる。厳密に扱えるために かえって技巧を要し 面白い事もあるのだが、すべて省略して結果だけを書くと^{7), 8)}

$$\dot{f}(t) = \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (iH + K) \alpha + \text{c.c.} + \frac{\partial}{\partial \alpha} D \frac{\partial}{\partial \alpha} \right\} f(t), \quad (2.5)$$

となる。ただし $f(t)$ は a を逆ノーマル順に、 b をノーマル順にならべて、密度演算子

$$\rho(t) = S_2(t) \left\{ a_R S^\dagger(t) W(t) S(t) \right\} S_2^\dagger(t), \quad (2.6)$$

を ボーズ = コヒーレント表示で C -数空間に 写した C -数関数である。ここで

$$S(t) = \exp_+ \left[-i \int_0^t d\tau \mathcal{H}_S(\tau) \right] \exp \left[-i \mathcal{H}_R t \right], \quad (2.7)$$

$$S_2(t) = \exp \left[-i (\mathcal{H}_S - 2\omega K_z) t \right], \quad (2.8)$$

であり、 $\exp_+$ は time ordered exponential で $\mathcal{H}_S = \mathcal{H}_S(t=0)$ 。

また

$$K_z = \frac{1}{2} (a^\dagger a + b b^\dagger), \quad (2.9)$$

である。 tr_R は 例によって 熱浴変数についてのトレースを示す。(2.5)中の H, K, D は 2×2 行列で その要素は

$$H_{11} = H_{22} = \frac{1}{2} (\omega_a - \omega_b), \quad (2.10)$$

$$H_{12} = G, \quad H_{21} = -G^*,$$

$$\begin{aligned} K_{11} &= K'_C + i\Delta'_C = g_1^2 \int_0^\infty d\tau \langle [C(\tau), C^\dagger(0)] \rangle_R e^{i\omega_a \tau} \text{sh} G\tau, \\ K_{12} &= K'_C'' + i\Delta'_C'' = i g_1^2 \int_0^\infty d\tau \langle [C(\tau), C^\dagger(0)] \rangle_R e^{i\omega_a \tau} \text{sh} G\tau, \\ K_{21} &= -K_D'' - i\Delta_D'' = -i g_2^2 \int_0^\infty d\tau \langle [D^\dagger(\tau), D(0)] \rangle_R e^{-i\omega_b \tau} \text{sh} G\tau, \\ K_{22} &= K_D' + i\Delta_D' = -g_2^2 \int_0^\infty d\tau \langle [D^\dagger(\tau), D(0)] \rangle_R e^{-i\omega_b \tau} \text{ch} G\tau, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} D_{11} &= 2\Lambda'_C = 2g_1^2 \text{Re} \int_0^\infty d\tau \langle C^\dagger(0) C(\tau) \rangle_R e^{i\omega_a \tau} \text{ch} G\tau, \\ D_{22} &= 2\Lambda'_D = 2g_2^2 \text{Re} \int_0^\infty d\tau \langle D(0) D^\dagger(\tau) \rangle_R e^{-i\omega_b \tau} \text{ch} G\tau, \\ D_{12} &= D_{21}^* = -\Lambda_{C-D}'' - i\Gamma_{C-D}'' = -(\Lambda_C'' - \Lambda_D'') - i(\Gamma_C'' + \Gamma_D'') \\ &= -i \left\{ g_1^2 \int_0^\infty d\tau \langle C^\dagger(0) C(\tau) \rangle_R e^{i\omega_a \tau} \text{sh} G\tau + g_2^2 \int_0^\infty d\tau \langle D(0) D^\dagger(\tau) \rangle_R^* e^{i\omega_b \tau} \text{sh} G\tau \right\}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

で与えられる。ただし

$$\langle \dots \rangle_R = Z_R^{-1} \text{tr}_R e^{-\beta_C \mathcal{H}_R^C - \beta_D \mathcal{H}_R^D} \dots, \quad Z_R = \text{tr}_R e^{-\beta_C \mathcal{H}_R^C - \beta_D \mathcal{H}_R^D}, \quad (2.13)$$

で $\beta_c = 1/k_B T_c$, $\beta_D = 1/k_B T_D$ 。また

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta^* \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha}, \frac{\partial}{\partial \beta^*} \right). \quad (2.14)$$

$f(t)$ の規格化は

$$\int d\alpha d\alpha^* f(t) = 1, \quad (2.15)$$

である。(2.8)は Fokker-Planck 方程式であり、これより種々のモーメントの時間発展が得られる。ここで次の事が重要である。 H の中の G 依存性は、(1.18)右辺の α -項に相当し、可逆な相互作用を表わし、一方 K と D の中の G 依存性は(1.18)右辺 α -項の $V(t, t-\tau)$ から出たものである。この系では $V(t, t-\tau)$ の情報は正確に取入れられている。

さて、従来やられている(1.21)に相当する近似で得られる Fokker-Planck 方程式は、(2.5)で K, D の中の G を零と扱ったものである。つまり(2.11)、(2.12)より

$$K_{11} = g_1^2 \int_0^\infty d\tau \langle [C(\tau), C^\dagger(0)] \rangle_R e^{i\omega_a \tau}, \quad K_{22} = g_2^2 \int_0^\infty d\tau \langle [D^\dagger(\tau), D(0)] \rangle_R e^{-i\omega_b \tau}, \quad (2.16)$$

$$K_{12} = K_{21} = 0,$$

$$D_{11} = 2g_1^2 \operatorname{Re} \int_0^\infty d\tau \langle C^\dagger(0) C(\tau) \rangle_R e^{i\omega_a \tau}, \quad D_{22} = 2g_2^2 \operatorname{Re} \int_0^\infty d\tau \langle D(0) D^\dagger(\tau) \rangle_R e^{-i\omega_b \tau}, \quad (2.17)$$

$$D_{12} = D_{21} = 0,$$

となる。

以下で上の2つの Fokker-Planck 方程式から得られるモーメントの時間発展を比較するわけであるが、その前に熱浴

の性格を決めておかなければならぬ。そのためには、熱浴のスペクトル関数を知ればよいが、それは原理的には熱浴の吸収スペクトルを測定して得ることが出来る。ここではガウス型のスペクトルを持つと仮定して次のように与えることにする。^{7), 8)}

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt g_1^2 \langle C^\dagger(0) C(t) \rangle_R e^{-i\omega t} = 2\pi I_C \exp[-(\Omega_C + \omega)^2 / \sigma_C^2], \quad (2.18a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt g_2^2 \langle D(0) D^\dagger(t) \rangle_R e^{-i\omega t} = 2\pi I_D e^{\beta\omega} \exp[-(\Omega_D - \omega)^2 / \sigma_D^2]. \quad (2.18b)$$

表1-(i) に 数値計算に用いたパラメータをのせておく。そこには 厳密にやった場合の発振臨界値 $G_{th}(PT)$ と、従来の近似による臨界値 $G_{th}(CT)$ も示してある。(パラメトリック発振器のモデルは、必要なモーメントの解や、発振臨界値

表 1

(i)	ω_a	ω_b	β_C	β_D	I_C	I_D	Ω_C	Ω_D	σ_C	σ_D	$G_{th}(PT)$	$G_{th}(CT)$
	1.2	0.8	1.0	0.8	0.1	0.1	1.0	1.0	1.0	1.0	0.418	0.563

(ii)	G	0.35	0.1
PT	κ_C	$= 0.770 + 0.284 i$	$\kappa_C = 0.706 + 0.0729 i$
	κ_D	$= 0.253 - 0.216 i$	$\kappa_D = 0.269 - 0.0570 i$
	Δ_C	$= -0.524 + 0.261 i$	$\Delta_C = -0.427 + 0.0704 i$
	Δ_D	$= 0.441 + 0.0153 i$	$\Delta_D = 0.376 + 0.00694 i$
	Λ_C	$= 0.338 - 0.0476 i$	$\Lambda_C = 0.305 - 0.0122 i$
	Λ_D	$= 0.591 - 0.264 i$	$\Lambda_D = 0.574 - 0.0692 i$
	Γ_C'	$= 0.123$	$\Gamma_C' = 0.0329$
	Γ_D'	$= 0.139$	$\Gamma_D' = 0.0398$
CT		$\kappa_C = 0.700$	
		$\kappa_D = 0.271$	
		$\Delta_C = -0.419$	
		$\Delta_D = 0.371$	
		$\Lambda_C = 0.302$	
		$\Lambda_D = 0.572$	

注) エネルギーと時間は、 $(\omega_a + \omega_b)/2 = \omega_p/2$ でスケールしている。

を解析的に求めることができるが、その表式は複雑であるので数値計算して絵に書いてみるのである。^(7,8) なお、 G は入射するレーザー光の強度を変えることによって外から制御できる量である。部分系間の相互作用の強さが系の緩和にいかなる影響があるかを調べるのにこの系が注目になるのは、このためである。

図3(i)に、回転系でみた $t \rightarrow \infty$ でのシグナル(アイドラー)の光子数の G 依存性を示した。 K_c' と K_b' の G 依存性も示してある。実線が厳密な取扱い(以下PTと記す)によるもので、点線が従来の近似によるもの(以下CTと記す)である。光子数の G 依存性を

みると、たしかに G (部分系間の相互作用の強さ)が小さいときにはPTとCTの差が小さくなることが

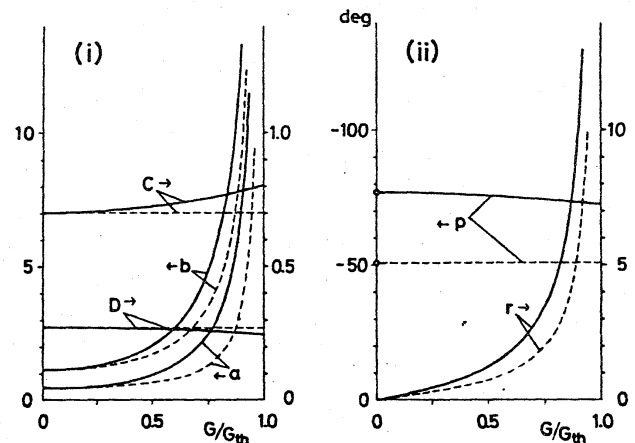


図3

わかる。これは従来信じられていたとおりである。緩和定数 K_c' 、 K_b' はPTでは G に依ることがわかる。もちろんCTでは G に依存しない。

図3(ii)には、 $t \rightarrow \infty$ でのシグナル光とアイドラー光の位相

相関 $\langle a^\dagger b^\dagger \rangle_{t \rightarrow \infty}$ を回転系でみたものの G 依存性を示した。 r はその絶対値を表わし、 ϕ は位相である。これとみると r についてはやはり $G \rightarrow 0$ で PT と CT の差が小さくなっている。ところが位相 ϕ については、 G が小さいから PT と CT の差が小さいなどとは言えないことがわかる。つまり位相相関などのようないわば非対角成分を記述するには、従来の近似は妥当でないということである。

図4と5に $G = 0.35$ と 0.1 の場合の光子数及び位相相関の時間発展を示した。 $G = 0.35$ と 0.1 の場合を較べると、光子数や位相相関の

絶対値は $G = 0.1$ の方がすべての時間領域において PT と CT の一致がひじょうによいことがわかる (図5の縦軸のスケールは、図4の $1/10$ になっている)。ところが位相をみると、 G の値にかか

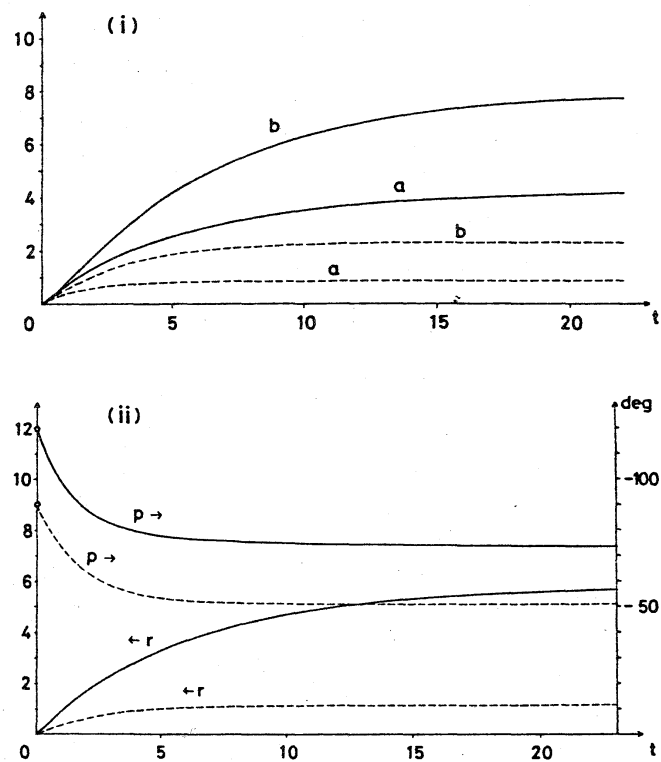


図 4

わらず PT と CT の
差は、全時間領域
で大きいままであ
る（位相 ϕ につ
いては 図 4 と 5 の
縦軸のスケールは
同じである）。

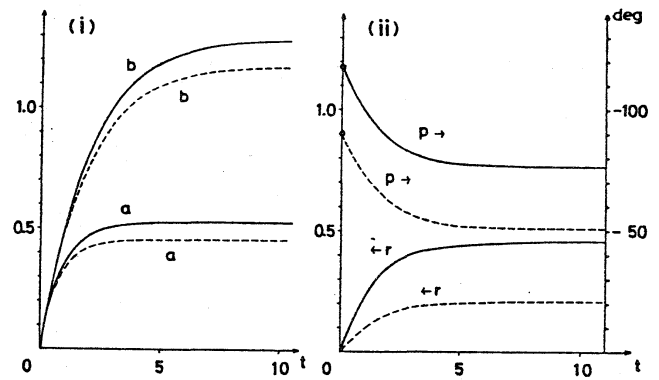


図 5

$G=0.35, 0.1$ の場合の K と D の要素に関連した量は、表 I (ii) に掲げてある。PT の場合は それらの量は 複素数で、 G に依存している。CT では G 依存性はなく、それらは実数である。

以上で たとえ $G \ll G_{th}$ であっても、物理量によっては CT では記述できないものがあることがわかった。しかもそれは 非対角成分に関する量でとくに不完全であることがわかった。

ところで レーザー系では、レーザー光のボーズ演算子の平均値 $\langle b \rangle$ が オーダーパラメータである。この時間発展等を記述する際 CT でやったのでは 問題がありそうにみえる。そこで 次章で レーザー系を PT で扱い 従来の結果と比較してみることにする。

§ 3. レーザー

二準位の同種原子が N 個ある系と、その準位間エネルギーと共鳴している単一の光子場というモデルを考える。原子系と光子場にはそれぞれ独立な熱浴が接触しているものとする。原子に対する熱浴は“ポンピング”の効果も含まれているものとし、それに対応した実効温度（負にもなり得る）で特徴づけられるものとする。模式的に書くと全系は図6のように描くことができる。

導出は省略するが、スピン演算子とボゾン演算子を用いて全系のハミルトニアンを書くと次のようになる。⁹⁾⁻¹¹⁾

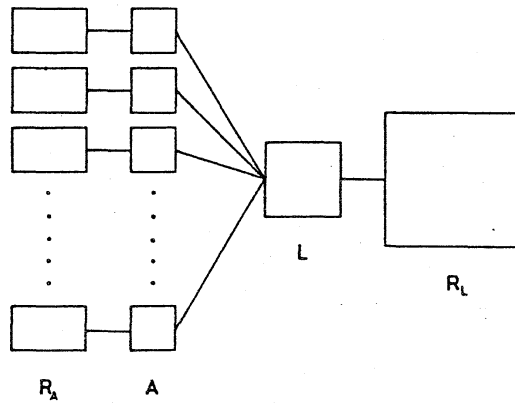


図 6

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \quad (3.1)$$

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_L + \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_{AL} + \mathcal{H}_{R_L} + \mathcal{H}_{R_A}, \quad (3.2)$$

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_{LR} + \mathcal{H}_{AR}. \quad (3.3)$$

$\mathcal{H}_L$, $\mathcal{H}_A$, $\mathcal{H}_{AL}$ はそれぞれレーザー系、原子系及びその間の相互作用を表わすハミルトニアンで

$$\mathcal{H}_A = \epsilon \sum_{\mu=1}^N S_{\mu}^z + \frac{1}{2} \epsilon N, \quad (3.4)$$

$$\mathcal{H}_L = \omega b^{\dagger} b, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{H}_{AL} = g \sum_{\mu=1}^N (S_{\mu}^{+} b + S_{\mu}^{-} b^{\dagger}), \quad (3.6)$$

となる。 $\omega = \epsilon$ (共鳴) の場合を扱う。 S はスピン $1/2$ の演算子で交換関係

$$[S_{\mu}^z, S_{\mu}^{\pm}] = \pm S_{\mu}^{\pm}, \quad [S_{\mu}^{+}, S_{\mu}^{-}] = 2 S_{\mu}^z, \quad (3.7)$$

をみたす。 b ($b^{\dagger}$) はボース消滅 (生成) 演算子である。熱浴との相互作用は $\mathcal{H}_{LR}$ と $\mathcal{H}_{AR}$ で表わし

$$\mathcal{H}_{LR} = T b^{\dagger} + T^{\dagger} b + \Theta b^{\dagger} b, \quad (3.8)$$

$$\mathcal{H}_{AR} = \sum_{\mu=1}^N (T_{\mu} S_{\mu}^{+} + T_{\mu}^{\dagger} S_{\mu}^{-} + \Theta_{\mu} S_{\mu}^z), \quad (3.9)$$

で与えられるものとする。 T 、 Θ 及び T_{μ} 、 Θ_{μ} はそれぞれ光子系及び原子系の熱浴の演算子である。また $\mathcal{H}_{R_L}$ と $\mathcal{H}_{R_A}$ は光子系と原子系の熱浴のハミルトニアンである。

さて

$$\mathcal{H}_F = \mathcal{H}_L + \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_{R_L} + \mathcal{H}_{R_A}, \quad (3.10)$$

として (3.1)~(3.3) を用いると (1.18) 式を書き下すことができる。従来は (1.21) 式を用いて以下の議論をするのであるが、ここでは厳密な表式 (1.18) から出発する。パラメトリック発振器の場合のように

$$V(t, \tau) = \exp_+ \left\{ -i \int_{\tau}^t ds \bar{\mathcal{H}}_{AL}(s) \right\}, \quad (3.11)$$

を正確に扱うことがレーザーの場合はできないので、 $V(t, \tau)$ の効果を最低次 (g のオーダーまで) まで取り入れることにする。そして従来の方に対する補正を求めることに

する。この近似で (1.18) は 次のようになる。^{7), 12)}

$$\dot{\bar{W}}_S(t) = -i(\mathcal{H}_{AL}^X + \delta\mathcal{H}^X + i\pi_L^{(0)} + i\pi_A^{(0)} + i\pi_L^{(u)} + i\pi_A^{(u)}) \bar{W}_S(t). \quad (3.12)$$

$\pi_L^{(u)}$ と $\pi_A^{(u)}$ が オータ - g の補正である。各演算子は 次のように与えられる。

$$\delta\mathcal{H} = \Delta b^\dagger b + \Delta_a \sum_{\mu} S_{\mu}^z, \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \pi_L^{(0)} X = & \kappa \{ [bX, b^\dagger] + [b, Xb^\dagger] \} + 2\kappa\bar{n} [b, [X, b^\dagger]] \\ & + \delta \{ [b^\dagger bX, b^\dagger b] + [b^\dagger b, Xb^\dagger b] \}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \pi_A^{(0)} X = & \sum_{\mu} \left[\frac{1}{2} \gamma_{10}' \{ [S_{\mu}^- X, S_{\mu}^+] + [S_{\mu}^-, X S_{\mu}^+] \} \right. \\ & + \frac{1}{2} \gamma_{01}' \{ [S_{\mu}^+ X, S_{\mu}^-] + [S_{\mu}^+, X S_{\mu}^-] \} \\ & \left. + \frac{1}{2} \delta_a \{ [S_{\mu}^z X, S_{\mu}^z] + [S_{\mu}^z, X S_{\mu}^z] \} \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \pi_L^{(u)} X = & g \sum_{\mu} \left\{ \frac{\partial \kappa_0}{\partial \omega} [S_{\mu}^- X, b^\dagger] + \frac{\partial \kappa_1}{\partial \omega} [S_{\mu}^+ X, b] + \text{R.c.} \right. \\ & \left. - i\delta_a^{(u)} ([S_{\mu}^- b^\dagger X, b^\dagger b] - [S_{\mu}^+ bX, b^\dagger b]) + \text{R.c.} \right\}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \pi_A^{(u)} X = & -g \sum_{\mu} \left\{ \frac{\partial \gamma_{10}}{\partial \epsilon} [S_{\mu}^z bX, S_{\mu}^+] + \frac{\partial \gamma_{01}}{\partial \epsilon} [S_{\mu}^z b^\dagger X, S_{\mu}^-] + \text{R.c.} \right. \\ & \left. + i\delta_a^{(u)} ([S_{\mu}^- b^\dagger X, S_{\mu}^z] - [S_{\mu}^+ bX, S_{\mu}^z]) + \text{R.c.} \right\}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

ただし

$$\kappa = \kappa_0' - \kappa_1', \quad \Delta = \kappa_0'' + \kappa_1'', \quad \Delta_a = \frac{1}{2}(\gamma_{10}'' - \gamma_{01}''), \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{2} \gamma_{10}(\epsilon) = \int_0^\infty d\tau \langle \Gamma_a(\tau) \Gamma_a^\dagger(0) \rangle_R e^{i\epsilon\tau}, \quad \frac{1}{2} \gamma_{01}(\epsilon) = \int_0^\infty d\tau \langle \Gamma_a^\dagger(\tau) \Gamma_a(0) \rangle_R e^{-i\epsilon\tau}, \quad (3.19a)$$

$$\frac{1}{2} \delta_a = \int_0^\infty d\tau \langle \Theta_a(\tau) \Theta_a(0) \rangle_R, \quad \delta_a^{(u)} = \int_0^\infty d\tau \tau \langle \Theta(\tau) \Theta(0) \rangle_R, \quad (3.19b)$$

$$\kappa_0(\omega) = \int_0^\infty d\tau \langle \Gamma(\tau) \Gamma^\dagger(0) \rangle_R e^{i\omega\tau}, \quad \kappa_1(\omega) = \int_0^\infty d\tau \langle \Gamma^\dagger(\tau) \Gamma(0) \rangle_R e^{-i\omega\tau}, \quad (3.19c)$$

$$\delta = \int_0^\infty d\tau \langle \Theta(\tau) \Theta(0) \rangle_R, \quad \delta^{(u)} = \int_0^\infty d\tau \tau \langle \Theta(\tau) \Theta(0) \rangle_R, \quad (3.19d)$$

とおいっている。原子に対する熱浴は すべて同等なものとし

て $\Gamma_a = \Gamma_\mu$, $\Theta_a = \Theta_\mu$ ($\mu = 1, 2, \dots, N$) とおいた。また

$$\bar{n} = (e^{\omega/k_B T_L} - 1)^{-1}, \quad (3.20)$$

であり、 T_L は レーザ光の熱浴の温度とあるゆす。(3.19) において

$$\langle \dots \rangle_R = \text{tr}_R \rho_R \dots, \quad (3.21)$$

$$\rho_R = Z_R^{-1} e^{-\mathcal{H}_{R2}/k_B T_L} e^{-\mathcal{H}_{R1}/k_B T_A}, \quad (3.22)$$

$$Z_R = \text{tr}_R e^{-\mathcal{H}_{R2}/k_B T_L} e^{-\mathcal{H}_{R1}/k_B T_A}, \quad (3.23)$$

である。 $\delta_a, \delta_a''', \delta, \delta''$ は 実数であるが、 $\gamma_{10}, \gamma_{01}, \kappa_0, \kappa_1$ は 複素数であるので 実数部と虚数部を次のように分離している。

$$\gamma_{10} = \gamma'_{10} + i\gamma''_{10}, \quad \gamma_{01} = \gamma'_{01} + i\gamma''_{01}, \quad (3.24a)$$

$$\kappa_0 = \kappa'_0 + i\kappa''_0, \quad \kappa_1 = \kappa'_1 + i\kappa''_1. \quad (3.24b)$$

(3.22) に出てくる T_A は、原子系の熱浴の温度であるが

$$\sigma_0 \equiv \frac{\gamma'_{01} - \gamma'_{10}}{\gamma'_{01} + \gamma'_{10}} = -\text{th}(\epsilon/2k_B T_A), \quad (3.25)$$

で定義され、 σ_0 のことを “ポンピング” = パラメータと呼んでいる。 $\sigma_0 > 0$ のとき $T_A < 0$ となる (反転分布)。

式 (3.12) を用いると ^{7), 12)}

$$\begin{aligned} \langle \dot{S}_\mu^z \rangle &= -\gamma_\mu (\langle S_\mu^z \rangle - \frac{1}{2} \sigma_0) \\ &\quad - i g \left(1 + \frac{\partial \Delta_a}{\partial \epsilon} \right) (\langle S_\mu^+ b \rangle - \langle S_\mu^- b^\dagger \rangle) \\ &\quad - \frac{1}{2} g \frac{\partial \gamma_\mu}{\partial \epsilon} (\langle S_\mu^+ b \rangle + \langle S_\mu^- b^\dagger \rangle), \end{aligned} \quad (3.26a)$$

$$\langle \dot{S}_\mu^+ \rangle = i(\epsilon + \Delta_a) \langle S_\mu^+ \rangle - \gamma_\perp \langle S_\mu^+ \rangle$$

$$ig(1 + \delta_a^{(u)}) \langle S_\mu^z b^+ \rangle$$

$$- \frac{1}{2} g \left\{ \frac{\partial}{\partial \epsilon} (\gamma_{10}' - \gamma_{01}') - i \frac{\partial}{\partial \epsilon} (\gamma_{10}'' + \gamma_{01}'') \right\} \langle b^+ \rangle, \quad (3.26b)$$

$$\langle \dot{b}^+ b \rangle = -2\kappa (\langle b^+ b \rangle - \bar{n})$$

$$+ ig(1 + \frac{\partial \Delta}{\partial \omega}) \sum_\mu (\langle S_\mu^+ b \rangle - \langle S_\mu^- b^+ \rangle)$$

$$- g \frac{\partial \kappa}{\partial \omega} \sum_\mu (\langle S_\mu^+ b \rangle + \langle S_\mu^- b^+ \rangle), \quad (3.26c)$$

$$\langle \dot{b} \rangle = -i(\omega + \Delta) \langle b \rangle - (\kappa + \delta) \langle b \rangle$$

$$- ig(1 - \frac{\partial \Delta}{\partial \omega} + \delta_a^{(u)} - i \frac{\partial \kappa}{\partial \omega}) \sum_\mu \langle S_\mu^- \rangle, \quad (3.26d)$$

などの モーメントの運動方程式が得られる。(3.26)中の $\gamma_\parallel$,

$\gamma_\perp$ は 縦及び横緩和率をあらわし

$$\gamma_\parallel = \gamma_{10}' + \gamma_{01}', \quad \gamma_\perp = \frac{1}{2} (\gamma_{10}' + \gamma_{01}' + \delta_a), \quad (3.27)$$

で定義される。また $\langle \dots \rangle$ の意味は

$$\langle \dots \rangle = \text{tr } W_S(t) \dots, \quad W_S(t) = e^{-i\mathcal{H}_F t} \overline{W_S(t)}, \quad (3.28)$$

で、 tr は スピンとボーズ演算子についてのトレースを意味する。(3.26)の波線の部分が 従来の近似に対する補正項である。係数の補正ばかりでなく 新しい項が付け加わっていることがわかる。これらの補正項は g について 1 次のオーダー (つまり 可逆的な項と同じオーダー) であり、 $O(g^2)$ を無視する近似においては 一般には省略できないものである。補正項が無視できるかどうかは、熱浴の性質によって決まるのである。

さて レーザー系を ランジュバン方程式で扱う場合、
 (3.26) の $\langle \dots \rangle$ を取り除いて 右辺に ランジュバン力を付け加えたものから出発するわけである。従来は 波線の部分に対応する項は 省略しているのであるが、§2 のパラメトリック発振器の例でもわかるように 注目している物理量（たとえば レーザー = オーダーパラメータ $\langle b \rangle$ ）によっては 問題があり注意を要するのである。

式 (3.12) から さらに 原子系の変数（スピン演算子）を消去し、発振臨界点近傍で レーザー光の場に対する Fokker-Planck 方程式（ボーズ = コヒーレント表示で）を導くことができるが、その際 発振臨界値及び拡散係数に対する補正項が得られる。くわしくは 文献(7,12)を参照していただきたい。

式 (3.12) を直接扱って 補正項の影響をみるのは 今後の問題である。

References

- 1) R. Kubo, in "Lectures in Theoretical Physics", ed. W.E. Brittin and L. G. Dunham (Lectures Delivered at the Summer Institute for Theoretical Physics, University of Colorado, Boulder, 1958), vol. I, pp. 120-203.
- 2) S. Nakajima, Prog. Theor. Phys. 20 (1958) 948.
- 3) R. Zwanzig, J. Chem. Phys. 33 (1960) 1338.
- 4) W. H. Louisell and A. Yariv, Phys. Rev. 124 (1961) 1646.
- 5) B. R. Mollow and R. J. Glauber, Phys. Rev. 160 (1967) 1076 and 1097.
- 6) P. N. Keating, Phys. Rev. A3 (1971) 180.
- 7) T. Arimitsu, Ph.D. Thesis (University of Tokyo, 1980).
- 8) T. Arimitsu, Y. Takahashi and F. Shibata, Physica 100A (1980) 507.
- 9) W. Weidlich and F. Haake, Z. Physik 185 (1965) 30.
- 10) W. Weidlich and F. Haake, Z. Physik 186 (1965) 203.
- 11) H. Haken, H. Risken and W. Weidlich, Z. Physik 206 (1967) 355.
- 12) T. Arimitsu, Physica (1980).