

確率過程における変数の縮約 II
(古典開放系の模型化)

京大理 長谷川 洋

まず、表題の意味を Ornstein-Uhlenbeck のブラウン運動の
 実例によって説明する。これは厂史的なもので、Einstein =
 Smoluchowski のブラウン運動(ブラウン粒子の位置の拡散)
 が O-U ブラウン運動(位置および速度の確率過程)の“時間
 的粗視化”であることはよく知られているが、これが OU
 過程における速度変数の縮約という実例である。すなわち
1次元 O-U 過程 単位質量のブラウン粒子に関し、その位置
 および速度をそれぞれ x, u で表わすと

$$\dot{x} = u \tag{a}$$

$$\dot{u} = -\gamma u - \frac{\partial \phi}{\partial x} + f(t) \quad \gamma > 0 \tag{b}$$

γ : 粘性定数, $\phi(x)$: ポテンシャル, $f(t)$: ランダム力

これは明らかにニュートンの法則に従う粒子の運動がさうに
 速度に比例する抵抗およびランダム力(ガウス型白色ノイズ)
 によっても支配されて乱雑に運動するというモデルに基づいて
 いるが、時間のスケールの十分粗い範囲($t \gg 1/\gamma$)では、

運動は事実上速度 u を含まない次の方程式

$$\dot{x} = \frac{-1}{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{\gamma} f(t) \quad (c)$$

で十分よく記述される。[1][2] この事実をもつて「確率過程 (c) は、確率過程 (a)(b) の変数 u の縮約である」と呼ぶ。ここで特に γ が定数ではなくて一般に変数 x の (正值) 関数、 $\gamma(x)$, であるとするとき新しい問題が生ずる。すなわち (c) において $\frac{1}{\gamma(x)} f(t)$ はいわゆる “掛け算された白色ノイズ” (multiplicative white noise) とまり その正確な定義を与えなければならぬ。われわれの主張点の一つは、これが Stratonovich の意味の対稱積 [3] $\frac{1}{\gamma(x)} \circ f(t)$ であるべきでないといふものである。このように、縮約すべき変数の係数が一般に定数でない場合への拡張、さらには多変数と同時に縮約する問題への拡張など、出来るだけ一般的をかたちで確率過程の方程式 (ランジュバン方程式—確率微分方程式 (SDE)) からの変数の縮約を定式化して具体的解を与える、というのがオーの問題である (森氏の稿参照)。また、縮約過程 (c) はその分布 (Fokker-Planck 方程式の解) として、 f に関する揺動散逸定理 [4] のもとに、定常分布 $p_{st}(x) \propto e^{-\beta \phi(x)}$ をもつことが示されるが、一般の場合にそのような条件を明らかにして熱力学を構成する、というのがオーの問題である。

以下、確率微分方程式論に従って問題を設定する。

2種類の(実)確率変数 $\{x_\mu, u_i; \mu=1, \dots, d, i=d+1, \dots, d+m\}$ に関する $d+m$ 次元 (Itô) SDE (以下通常のテンソル和法を使う)

$$dx_\mu(t) = (v_\mu(x(t)) + \alpha_{\mu i}(x(t)) u_i(t)) dt + dX_\mu(t) \quad (1a)$$

$$du_i(t) = (-\gamma_{ij}(x(t)) u_j(t) + b_i(x(t))) dt + dU_i(t) \quad (1b)$$

を考察する。ここで $\{dX_\mu, dU_i\}$ は n 次元標準ブラウン運動 $B(t)$ ($E dB(t) = 0, E dB(t) dB(t) = I dt, I: n \times n$ 単位行列)

$$\begin{aligned} \text{よ} \text{)} \quad dX_\mu(t) &= \sigma_\mu(x(t)) \cdot dB(t), \\ dU_i(t) &= \sigma_i(x(t)) \cdot dB(t) \end{aligned} \quad (\sigma: n\text{次元横ベクトル})$$

と表わされるものとし、従って

$$E dX_\mu(t) dX_\nu(t) = 2 L_{\mu\nu}(x(t)) dt \quad L_{\mu\nu} = L_{\nu\mu} \quad (2a)$$

$$E dX_\mu(t) dU_i(t) = 2 L_{\mu i}(x(t)) dt \quad L_{\mu i} = L_{i\mu} \quad (2b)$$

$$E dU_i(t) dU_j(t) = 2 L_{ij}(x(t)) dt \quad L_{ij} = L_{ji} \quad (2c)$$

のように与えられる。係数 v, α, γ, b および L はすべて x の有界・滑らかな関数であるとするが u は含まないので、従って SDE (1a, b) は u に関し線型である。さらに γ が $(m \times m)$ 正値行列であればそれは安定なブラウン運動を意味するが、ここでは強い正値性

$$\gamma_{ij} \xi_i \xi_j \geq 0, \quad \gamma_{ij} \xi_i \xi_j = 0 \rightarrow \xi = 0 \quad (3)$$

を仮定する。SDE理論よりさらに v, σ に関する Lipschitz 条件があれば解の存在・一意性が保証される。これらのもとに

問題1 方程式 (1a, b) において変数 u を縮約し, x だけの Itô SDE を求めること (縮約の厳密な定義および具体的手続きは後述)。

次に, 方程式 (1a) に関係して, x の決定論的運動方程式

$$\dot{x}_\mu(t) = v_\mu(x(t)) \quad (4)$$

が運動の積分 (ハミルト=アン) $H(x(t))$, $\frac{d}{dt}H(x(t)) = 0$, をもつとする。 (4) は *autonomous* (v は $x(t)$ のみを通じ t の関数) という前提で, それは

$$v_\mu(x) \frac{\partial H}{\partial x_\mu} = 0 \quad (\text{grad } H \text{ が速度 } v \text{ に直交}) \quad (5)$$

で条件付けられる。さらに

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} v_\mu(x) = 0 \quad (\text{div } v = 0) \quad (6)$$

として, この力学系を *quasi-hamiltonian system* と呼ぶ。

問題2 *quasi-hamiltonian system* $\{x_\mu\}$ と含む $d+m$ 次元次の Itô SDE

$$dx_\mu(t) = (v_\mu(x(t)) + \alpha_{\mu i}(x(t))u_i(t))dt \quad (7a)$$

$$du_i(t) = (-\gamma_{ij}(x(t))u_j(t) + b_i(x(t)))dt + dU_i(t), \quad (7b)$$

$$\text{ただし } \gamma_{ij} \text{ は強正值(3), } EdU_i dU_j = (\gamma_{ij} + \gamma_{ji})kT dt, \quad (8)$$

より u を縮約し, 縮約された確率過程 $x(t)$ の定常分布が正準分布, $p(x) = Z_\beta^{-1} e^{-\beta H(x)}$, $\beta = 1/kT$, をもつための条件を求めること。(この結果を用い熱力学法則が定式化される)

縮約の定義と手続き (1) 問題の経緯 統計物理において、

複雑な方程式から必要なだけの情報を保ちつつそれ以外の変数を消去して単純化することはしばしば必要になる(情報の縮約[4])。その手段としてよく用いられるのは Zwanzig, Mori に始まる「射影演算子の方法」[5][6]であるが、確率過程論の専門家の間にそのような発想はないであろうか。Papanicolaou, Stroock, Varadhan によって論ぜられた一般的な極限定理[7]がこれに該当することがわかった。[†] ここでは縮約変数 u は y という記号で扱われ y に関する「線型」の制約を設けず一般的な ergodicity の仮定だけで縮約過程 $x(t)$ の存在(および x の拡散過程の存在)が証明されている。 y が x に比し速い過程である、という前提も物理的なものであり、 y は “driving process” x は “driven process” と呼ばれている。従って本研究の基礎をこの文献に求めることが出来る。われわれの結果は縮約過程 u に関する線型性を仮定していて[7]の特別な場合に相当しているが、その代償として縮約結果の Itô SDE を係数関数によって具体的に表示し得たものである。その結果、「断熱消去法」((1b)において $du=0$ より u を求め(1a)に代入する)の当否を明らかにし、合わせて「非対称性」を含む森氏の結果[‡]を考察する。

[†] 本研究会における伊藤清教授の御注意、および大和・小谷内氏からの御連絡による。

[‡] 森肇「確率過程における変数の縮約」(前稿)

(2) Papanicolaou, Stroock, Varadhan 極限定理の適用 (1a, b)

の代りに 4 次元因子 ε の入った $d+m$ 次元 Itô SDE

$$dx_\mu^\varepsilon(t) = (v_\mu(x^\varepsilon(t)) + \frac{1}{\varepsilon} \alpha_{\mu i}(x^\varepsilon(t)) u_i^\varepsilon(t)) dt + dX_\mu(t) \quad (1a')$$

$$du_i^\varepsilon(t) = \left(-\frac{1}{\varepsilon^2} \gamma_{ij}(x^\varepsilon(t)) u_j^\varepsilon(t) + \frac{1}{\varepsilon} b_i(x^\varepsilon(t)) \right) dt + \frac{1}{\varepsilon} dU_i(t) \quad (1b')$$

($dX_\mu(t), dU_i(t)$ は変数が x^ε である点を別として前と同じ)

の $\varepsilon \rightarrow 0$ 極限を考察する。driving process $u^\varepsilon(t)$ に関する

ergodicity は γ の強正值性 (3) が相当している。各 x に対し

$u^\varepsilon(t)$ はガウス過程であり $\varepsilon \rightarrow 0$ で分布は定常分布 $\varphi_0(u)$

$= (2\pi \det V)^{-1} e^{-\frac{1}{2} u V^{-1} u}$ という極限分布に近づく。 V は $m \times m$

対称行列で、(一般に x の関数として)

$$V(x) = \int_0^\infty e^{-t} \gamma(x, L) e^{-t} \gamma'(x) dt ; \quad \gamma V + V \gamma' = 2L \quad (\gamma: \gamma \text{ の transpose})$$

から求められる共分散行列である。この分布は u の平均 $\langle u \rangle_{\varphi_0}$

$= 0$ で特徴付けられ、従って (1a') の ε^{-1} の項に対し

$$\frac{1}{\varepsilon} \langle \alpha_{\mu i}(x^\varepsilon(t)) u_i(t) \rangle_{\varphi_0} = 0$$

となる。これは定理の成立にとって必要な "centering condition"

が満足されていることを示す。以上により極限定理が適用さ

れて $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x^\varepsilon(t)$ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(t)$ は存在し、それぞれ $x(t)$ $u(t)$ と

すると $u(t) = 0$ および $x(t)$ の従う Itô SDE が定められる。

また、 $x(t)$ の任意の C^∞ 関数 $f(x(t))$ に対する Itô 公式も導か

れ (martingale approach!), これは $\varepsilon=1$ すなわち (1a, b) に対し射

影演算子の方法 (分布を φ_0 に射影する) を適用した結果と一致する。

問題1の解

縮約された
Itô SDE

$$dx_\mu(t) = \left(\begin{array}{l} v_\mu(x) + \alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1} b_j(x) \\ + ((\alpha V)_{\nu j}(x) + 2L_{\nu j}(x)) \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1}) \end{array} \right)_{x=x(t)} dt + \alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1}(x) \frac{dU_j(t)}{x=x(t)} + dX_\mu(t) \quad (9)$$

Itô公式 ($f(t, x) \equiv E(f(x(t)) | x(t)=x)$)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (v_\mu + \alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1} b_j) \frac{\partial f}{\partial x_\mu} + ((\alpha V)_{\nu j} + 2L_{\nu j}) \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1}) \frac{\partial f}{\partial x_\mu} + L_{\mu\nu} \frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \quad (9a)$$

(Fokker-Planck方程式はこの adjoint form として書かれる)

Remark 1 conventional の "adiabatic elimination" の当否

1次元 O-U process の u の縮約 (c) は明らかに始めの連立方程式 (a) と (b) において $\dot{u} = 0$ より u を求め (a) に代入して得られるものである。この手段を adiabatic elimination (断続消去) と呼ぶことがある。この手段が一般的に正しい結果を与えるものか、もし正しくないとするればそれはどういう場合か、が上の結果から調べられる。すなわち (1b) に対しこれを形式的に実行してみよう

$$u_i dt = \gamma_{ij}^{-1} b_j dt + \gamma_{ij}^{-1} \circ dU_j \quad (\text{stratonovich 対稱積!})$$

$$\text{よ) } dx_\mu = (v_\mu + \alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1} b_j) dt + \underbrace{\alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1} \circ dU_j}_{\text{stratonovich}} + dX_\mu$$

$$(\Upsilon \circ dX = \frac{1}{2} d\Upsilon dX + \Upsilon dX \rightarrow) \quad + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1} \right) dU_j dx_\nu + \alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1} dU_j$$

この変換で $dU_j dx_\nu$ の dx_ν に再び上の dx_μ の式を用い dt の係数に対する補正項を見出すと, (2b, c) を用いることにより

$$dx_\mu = \left(\begin{array}{l} v_\mu + \alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1} b_j \\ \underline{\underline{+ (L_{ej} \alpha_{vk} \gamma_{kl}^{-1} + L_{vj}) \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1})}} \end{array} \right) dt + \alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1} dU_j + dX_\mu \quad (10)$$

が得られる。2重アンダーラインの部分に正解(9)の dt の係数括弧内第2項と比較すべきものである(それ以外の部分では(9)と(10)とは完全に一致している)。ガウス過程に関する分散行列と拡散係数行列の関係式 $L = \frac{1}{2}(qV + Vq')$ より2重アンダーライン部分は次のように比較される:

correct	conventional
$\alpha_{vk} V_{kj} + 2L_{vj}$	$\frac{1}{2} \alpha_{vk} (V_{kj} + \gamma_{kl}^{-1} V_{el} q'_{je}) + L_{vj}$

若し $q^{-1} V q' = V$ すなわち $qV = Vq' =$ 対称行列ならば始め部分だけ両者一致する。それから後の部分については factor 2 だけ異なる (L_{vj} は dX, dU の cross correlation!) このことより次の結論に達する。

[定理] 方程式 (1 a, b) から driving process u を節約するのに conventional を断熱消去を行って如何なる α に対しても正しい結果が得られるためには

- (i) 対称性 $qV = Vq'$ (詳細均合の条件)
- (ii) $L_{vj} = 0$ (x に対するノイズと u に対するノイズの独立性)

が必要かつ十分である。そして、この条件のもとに、断熱消

去はホワイト・ノイズに対する掛け算を Stratonovich の意味にとつて行われる。

条件 (i) が「詳細均合」の条件であるとは ガウス過程 $du_i = -\gamma_{ij} u_j \times dt + dU_i$ の条件確率 $P(u_2, t_2 | u_1, t_1) = P(u_2, u_1; t_2 - t_1)$ に関する対称性

$$P(u_2, u_1; t_2 - t_1) \varphi_0(u_1) = P(u_1, u_2; t_1 - t_2) \varphi_0(u_2) \quad (11)$$

— 微視的可逆性 (microscopic reversibility) — と同等である。従つて $\gamma V \neq V \gamma'$ は Onsager 相関関係の破れを意味するもので $\gamma V - V \gamma'$ は富田教授により 非可逆循環 (irreversible circulation) と名付けられたものに相当している。これが 0 でない時の方程式 (1a, b) の縮約過程には ノイズ補正として γV と $V \gamma'$ の平均値ではなく γV だけが寄与する、というのが正しい結果である。前稿 森氏の所説に現れる「非対称性」はこのことを指すものである。

Remark 2 われわれの結果 (9) は前稿 森氏の結果と詳細に比較されるべきものである。上記の条件 (i) (ii) 特に「非対称性」に関する 森氏の所説とは完全な一致を表明する。しかしながら別の点で無視出来ない不一致点があることを附記しないわけにはゆかない。(9) のドリフト項 (dt の係数括弧部分) は、森氏の $H_i = V_i + [\partial \varepsilon_{ij} / \partial b_j]_{b=a}, V_i$; (14) 式, と比較されるがその具体形 [] 中の { } を 0 としたものと一致する。すなわち、この { } 部分が両者の不一致点である。(補遺参照)

問題 2 の解

公式 (9) において, $v_\mu \frac{\partial H}{\partial x_\mu} = 0$, $\frac{\partial v_\mu}{\partial x_\mu} = 0$ および

$$L_{\mu i} = 0 \quad (12)$$

$$V = \beta^{-1} I \quad \left(\beta = \frac{1}{kT} \right) \quad (13)$$

の場合である。(13) は, α の定常分散 V が x によらなければ, 適当な 1 次変換により一般性を失うことなくこのように仮定出来る。その結果

$$dx_\mu(t) = \left(v_\mu(x) + \alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1} b_j(x) + \beta^{-1} \alpha_{\nu j} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1}) \right) dt_{x=x(t)} + \alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1}(x)_{x=x(t)} dU_j(t) \quad (14)$$

これに対する Fokker-Planck 方程式は, 条件 (8) のもとに,

$$b_i(x) = \beta^{-1} \frac{\partial \alpha_{\nu i}}{\partial x_\nu}(x) - \alpha_{\nu i} \frac{\partial H}{\partial x_\nu}(x) \quad (15)$$

の場合に限り次の形式にまとめられる。

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_\mu} (-v_\mu p) + \frac{\partial}{\partial x_\mu} (D_{\mu\nu} (\beta \frac{\partial H}{\partial x_\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}) p) \quad (16)$$

$$D_{\mu\nu}(x) = \beta^{-1} \alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1} \alpha_{\nu j}(x) \quad (16a)$$

この時の定常解は熱平衡分布

$$p_{eq}(x) = \frac{1}{Z_\beta} e^{-\beta H(x)} \quad (17)$$

となる。

Remark 3 条件(15)の物理的意義 (7a, b) および(8)に

対しさらに(15)を用いると

$$dx_\mu(t) = (v_\mu(x(t)) + \alpha_{\mu i}(x(t))u_i(t))dt \quad (18a)$$

$$du_i(t) = (-\gamma_{ij}(x(t))u_j(t) - \frac{\partial H}{\partial x_\nu} \alpha_{\nu i}(x(t)) + \beta^{-1} \frac{\partial \alpha_{\nu i}}{\partial x_\nu}(x(t)))dt + dU_i$$

$$\text{又は} = (-\gamma_{ij}(x(t))u_j(t) - \frac{\partial H}{\partial x_\nu} \alpha_{\nu i}(x(t)))dt + \alpha_{\nu i}(x(t)) \circ dW_\nu \quad (18b)$$

ただし dW_ν は

$$E dx_\mu dW_\nu = 2\beta^{-1} \delta_{\mu\nu} dt \quad (19)$$

を満す Wiener 過程とすれば, $\alpha_{\nu i} \circ dW_\nu = \alpha_{\nu i} dW_\nu + \beta^{-1} \frac{\partial \alpha_{\nu i}}{\partial x_\nu} dt$

となり $\alpha_{\nu i} dW_\nu = dU_i$ として(7a, b)に一致する。(18a, b)

および(19)が縮約によって正準熱平衡を示す標準形である。

$$\text{又} \quad b_i = \beta^{-1} e^{\beta H(x)} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (e^{-\beta H(x)} \alpha_{\nu i}(x)) \quad (20)$$

$$\text{より} \quad \langle b_i \rangle_{eq} = 0 \quad (21)$$

これは線型方程式 $du_i = (-\gamma_{ij}u_j + b_i)dt + dU_i$ の

非同次項は熱平均=0の条件を満すことを意味する。

さらに, (18a, b)における αdt の項は driving process - driven

process 間の「相互作用」と意味するが, この相互作用に対し

「全エネルギー」 $\mathcal{H} = H(x) + \frac{1}{2}u_i u_i$ が「保存」される。

$$\text{すなわち} \quad d\mathcal{H} = \frac{\partial H}{\partial x_\mu} \circ dx_\mu + u_i \circ du_i$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial x_\mu} v_\mu + \frac{\partial H}{\partial x_\mu} \alpha_{\mu i} u_i - \gamma_{ij} u_i u_j - \frac{\partial H}{\partial x_\nu} \alpha_{\nu i} u_i \right) dt$$

$$= -\gamma_{ij} u_i u_j dt + \alpha_{\nu i} u_i \circ dW_\nu \quad + \text{ノイズ項}$$

(22)

縮約SDE (14) は条件 (15), (19) のもとで次のように簡単になる。

$$\begin{aligned} dx_\mu &= [v_\mu + \alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1} \alpha_{vj} (-\frac{\partial H}{\partial x_\nu}) + \beta^{-1} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1} \alpha_{vj})] dt \\ &\quad + \alpha_{\mu i} \gamma_{ij}^{-1} \alpha_{vj} dW_\nu \\ &= (v_\mu - D_{\mu\nu} \beta \frac{\partial H}{\partial x_\nu}) dt + \beta D_{\mu\nu} \circ dW_\nu \end{aligned}$$

これに対する拡散方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} = v_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\mu} + (-\beta \frac{\partial H}{\partial x_\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\nu}) (D_{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial x_\mu}) \quad (23)$$

と書かれるが, f として $H(x)$ および $\log p_t(x)$ を用いたものが熱力学第1 および第2法則を示す関係式である。

文 献

- [1] S. Chandrasekhar, Rev. Mod. Phys. 15 (1943) 1.
- [2] E. Nelson, Dynamical Theories of Brownian Motion (Princeton University Press, 1967) §10. p. 214.
- [3] K. Itô, Lecture Notes in Physics 39 (Springer 1975)
- [4] 久保亮五 "統計物理学" (岩波 1978) 第5章.
- [5] R. Zwanzig, Suppl. Prog. Theor. 64 (1974), 74.
- [6] H. Mori, Prog. Theor. Phys. 33 (1965), 423; 48 (1973), 764; 51 (1974), 109; 56 (1976) 754.
- [7] G. C. Papanicolaou, D. Strook and S. R. S. Varadhan Martingale Approach to Some Limit Theorems 1976 Duke Turbulence Conference.

補遺

Remark 2 で触れた森氏の結果との不一致について説明を追加しておく。われわれの出生率の方程式 (12, 6) は森氏の方程式

$$dA_i(t)/dt = v_i(A) - \alpha_{ij}(A) B_j + r_i^A(t) \quad (11)$$

$$dB_j(t)/dt = \beta_j(A) - \gamma_{jk}(A) B_k + r_j^B(t) \quad (12)$$

(前稿 森氏の稿よりそのまま引用)

と本質的に同じものであるが, driving 変数 $u \rightarrow B$, driven 変数 $x \rightarrow A$ という対応関係になっている。

1. 森氏の場合, 縮約方程式は二種の変数の速さの比 δ に関する展開になっている。 (11) 式の右辺と (12) のそれに比し $O(\delta)$ (すなわち $v_i, \alpha_{ij}, r_i^A = O(\delta)$) とし $O(\delta^2)$ の完全形式が森氏の結果である。一方われわれの結果 (9) は, 文献 [7] に従うものであるが, 森氏の展開と異なる。それは簡単に云って γ^{-1} (B の decay 行列 γ の逆) の展開であって (9) は $O(\gamma^{-1})$ の完全形式になっている。この立場から森氏の v_i の式 (14) を見るならば不一致の項は $O(\gamma^3)$ に属するものである。両者のいずれが正しいものであるかは, それぞれの方法の principle でみる限り判定出来ない。それは具体的な問題に適用した場合, ケースバイケースであるとも考えられる。そこで以下一つの实例についてみる。

2. Ornstein-Uhlenbeck 過程 (a) (b) の速度縮約
簡単のため $\gamma = \text{定数}$ とする。

われわれの結果 $\dot{x} = \frac{-1}{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{\gamma} f(t)$

森氏の式の通用 $\dot{x} = \frac{-1}{\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(1 + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{\gamma} f(t)$

このあとの縮約ランジュバン方程式に対する Fokker-Planck 方程式を作るとそれは定常解に $e^{-\beta\phi}$ を与えないという難問を含むことがわかる。われわれの立場からするとドリフトに $O(\gamma^3)$ の補正を考慮するのならば、それは consistent なノイズの補正を与える必要がある、ということである。この問題は最近 projection operator を用いた方法により Sam Miguel Samcho (J. Stat. Phys. 22 (1980) 605) が解答を与えている。それによれば、Fokker-Planck 方程式は

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\beta\gamma} \frac{\partial \phi}{\partial x} \left(1 + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \beta \frac{\partial \phi}{\partial x} P \right) \right)$$

となり、確かにドリフトは森氏の式を用いる結果と一致し、さらに拡散係数も γ^3 の補正を受け全体として $e^{-\beta\phi}$ を定常解として持つ形になっている。減衰調和振動子の例からこの結果は正しいと考えられ、これを導く projection の理論を検討中である。(1980 9月)