数理解析研究所講究録
408巻 1980年 79-103

Burago－Toponogov の定理について

北大　　酒井　陸

コンパクト連結 riemann 多様体 M の単射半径 (injectivity radius) $i(M)$ は

$i(M) := \mathrm{Sup}\{r>0 : \mathrm{Exp} | B_r(O_m)$ が $\forall m \in M$ に対して微分同型$\}$

によって定義される。ここで Exp は M の指数写像，$B_r(O_m)$ は m での接空間 T_mM の原点 O_m を中心，半径 r の開球である。$i(M)$ は正で最も短い（単純）閉測地線の長さの半分と，測地線に沿っての第一共役点までの最短距離の小さい方に一致することが知られている。$i(M)$ の M の幾何学的量による評価は重要な問題で，pinching problems や topological types の有限性定理において本質的な役割りを果している。

特に M が単連結コンパクト riemann 多様体でその断面曲率 K が正定数 δ に対して $(0<)\delta \leq K \leq 1$ をみたしているとする。M の次元 dimM が偶数のときは任意の $\delta>0$ に対して $i(M) \geq \pi$ が知られている (Klingenberg, [K], [C-E])。他方奇数次元の場合は $\delta \geq 1/4$ ならば $i(M) \geq \pi$ が知られている (Klingenberg, 最近二通りの方法で証明が与えられた [C-G], [K-S])。しかし $\delta < 1/9$ のときは $i(M) \geq \pi$ が成立しない M の例がある (Berger [C-E])。今のところ $\delta < 1/4$ のとき

の様子はよく分かっているとは云えない。さて Burago-Toponogov ([B-T]) は次を主張している：

Mを3次元コンパクト単連結 Riemann 多様体でその断面曲率が $K \leq 1$ をみたし，Ricci 曲率が各接ベクトル v に対して $\mathrm{Ricci}(v) \geq R\ (>0)$ をみたすとする。このとき $i(M) > 6e^{-6/R}$。

彼等の証明方法は非常に興味深いがそのままでは議論に本質的な gap がある様に思える。ここではその gap をうめて上の評価を次の様に改良しよう。

定理 Mを3次元コンパクト単連結 Riemann 多様体で

$$K \leq 1, \quad \mathrm{Ricci}(v) \geq R\ (>0)$$

をみたすものとする。このとき任意の $b > 1$ に対して

$$i(M) \geq \mathrm{Min}\left\{\frac{2b(b-1)\pi^2}{b^2\pi^2+(b-1)^2},\ \pi\left\{1+\frac{1}{\pi^2}(e^{b/R}-1)^4\right\}^{-1/2}\right\}.$$

注意1. これは定曲率の場合でも best possible からは程遠い。上の評価は次の様にも解釈できる：任意の $b>1$, $\log\left(1+\sqrt{\frac{b^2\pi^2-(b-1)^2}{2b(b-1)}}\right) > b/2$ に対して一意に $R_0 = R_0(b)\ (<2)$ が定まって

$$i(M) \geq \begin{cases} \dfrac{2b(b-1)\pi^2}{b^2\pi^2+(b-1)^2} & \text{if } \mathrm{Ricci}(v) \geq R\ (\geq R_0) \\ \pi\left\{1+\dfrac{1}{\pi^2}(e^{b/R}-1)^4\right\}^{-1/2} & \text{if } \mathrm{Ricci}(v) \geq R,\ R \leq R_0 \end{cases}$$

前者は R に依らない評価で上に述べた事実を反映している。

またたとえば $b=2$ ととると $R_0 = 2/\log(1+\frac{1}{2}\sqrt{4\pi^2-1})$ (<2) でかつ

$$\pi\{1+\frac{1}{\pi^2}(e^{2/R}-1)^4\}^{-1/2} > 7\cdot(6e^{-6/R}).$$

注意2 7次元の場合最早上の様な評価は期待できない。実際7次元コンパクト単連結等質空間の族$\{M\}$である$\delta>0$に対して $\delta \le K_M \le 1$ をみたすが $\mathrm{Inf}\; i(M) = 0$ となるものが存在する（[H], [S]）。

以下gapをうめるのに我々はFiala（[F]）とEhrlich（[E]）の結果を用いるのでこれらについても精しく述べることにする（§2, §5）。

§1. 問題のreduction

最初にMが実解析的な場合を考える。$K\le 1$の仮定から第一共役点までの距離はπ以上であり、閉測地線の長さの評価が問題となる。いまCを長さlの単純閉測地線とする。これはMの実解析的なJordan曲線であるが、Cに対してPlateau問題—すなわちCを境界とする面積最小の極小曲面を張る問題—を考える。これに対してDouglas-Morreyの解と呼ばれる$\mathbb{R}^2$の単位円板DからMへの実解析的な写像

$$F : D \longrightarrow M, \quad F|\partial D = C$$

による解がある。Mが3次元，実解析的な場合はFの分岐点が内部にも境界にもなく $F: D \to M$ がimmersionになっていることが知られている（[O1], [G], [G-L]）。そこでDに

MからFによって導かれるriemann計量を与えておく。

NFをFの法バンドルとしてFに沿っての単位法ベクトル場$\nu: D \to NF$を考える。fを$f|\partial D \equiv 0$をみたすD上の任意のH^1-級関数として、Fの境界を保つ変分

$$F_t : D \ni m \longrightarrow \mathrm{Exp}\, t f(m) \nu(m)$$

をとる。Fが面積最小の極小曲面だからF_tの面積の第2変分は非負である。すなわち

$$0 \leq \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} \mathrm{Area}\, F_t = \int_D \{ |\nabla f|^2 - f^2 \mathrm{Ricci}(\nu) - f^2 |B|^2 \} dS$$
$$\leq \int_D (|\nabla f|^2 - f^2 R) dS.$$

ここで∇fは上の計量に関するfのgradient, $|B|$はFの第二基本形式Bのnorm, dSはDの面積要素。この変分公式では3次元であることを本質的に用いている。したがって

$$\lambda_1(D) := \mathrm{Inf}\left\{ \int_D \frac{|\nabla f|^2}{f^2} dS \; ; \; f \in H^1(D),\; f|\partial D \equiv 0 \right\}$$ を

Dirichlet境界条件に関するDのLaplacianの第一固有値とするとき

$$(1,1) \qquad \lambda_1(D) \geq R$$

という不等式を得る。したがって問題は$\lambda_1(D)$を境界の閉測地線Cの長さに関する言葉で上から評価することに帰着される。そのためにBurago-Toponogovは境界からの距離函数のlevel circlesの長さの変化を考察し、特にD内の∂Dか

ら垂直に走る任意の測地線は長さ $\pi/2$ までは ∂D からの距離を実現する最短線であると主張している。しかし D が極小曲面のためその Gauss 曲率は正とは限らないのでこの事実は一般には成立しない。そこで D において ∂D の "cut locus" を定義して、∂D からの距離関数の level circles の長さの変化を精しく調らべよう。これは Fiala ([F]) によって最初に考察された。

§2. Fiala の結果.

D を解析的なリーマン計量を持った 2-disk とする。我々の場合境界 $c\,(=\partial D):[0,\ell]\to D$ は長さ ℓ の閉測地線である(この事実はこの節では本質的には用いられない)。以下で測地線は弧長で径数づけられているものとする。ここでの目的は [F] の結果を私なりに解釈して述べることにある。

X を c に沿って c に垂直な単位ベクトル場とすればこれは平行ベクトル場である。Fermi 座標 x を

$$x(\sigma,\tau):=\operatorname{Exp}\tau X(\sigma),\quad \sigma\in[0,\ell]/\{0,\ell\},\quad \tau\in\mathbb{R}^+$$

で定義すれば各 σ に対して $x_\sigma:\tau\to x(\sigma,\tau)$ は c から垂直に走る測地線である。$a(\sigma)$ を x_σ が再び c と最初に交わる τ ($+\infty$ を含む) の値とする。もし x_σ が c と交わればそこでは横断的に交わるから $a(\sigma)<\infty$ のところでは $a(\sigma)$ は σ の解析関数になる。よって $\mathcal{D}:=\{(\sigma,\tau):\sigma\in[0,\ell]/\{0,\ell\},\ 0\le\tau<a(\sigma)\}$ とお

くと $x: \mathcal{D} \to D$ は上への実解析的写像で $\{(\sigma, 0)\}$ の近傍では微分同型を与える。(任意の点 $m \in D$ に対して m と c の距離を実現する c に垂直な最短測地線が存在する)。定義より $\langle \frac{\partial x}{\partial \sigma}, \frac{\partial x}{\partial \tau} \rangle = 0$, $\langle \frac{\partial x}{\partial \tau}, \frac{\partial x}{\partial \tau} \rangle = 1$ である。

(2.1) 定義：測地線 x_σ に沿っての c の焦点とは $\frac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) = 0$ となる点 $x_\sigma(\tau)$ のこととする。x_σ に沿っての最初に現われる焦点全体の集合を c の焦跡 (focal locus) と呼んで $\mathcal{F}(c)$ で表わす。

$J_\sigma(\tau) := \frac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma, \tau)$ は Jacobi の方程式をみたすから陰関数定理より $\mathcal{F}(c)$ は局所的には解析関数 $\tau = g(\sigma)$ を用いてパラメーター表示できることが分かる。

(2.2) 定義：x_σ に沿っての c の cut point とは x_σ 上の点で c からの距離を実現する最後の点のことでその集合を c の cut locus と呼び $\mathcal{C}(c)$ で表わす。D がコンパクト故各 x_σ に沿って c の cut point が現われる。$\mathcal{C}(c)$ の x による $\mathcal{D}$ へのリフトを tangent cut locus と呼び $\hat{\mathcal{C}}(c)$ で表わす。$\hat{\mathcal{C}}(c) = \{(\sigma, g_1(\sigma)) : \sigma \in [0, \ell]/\{0, \ell\}\}$ と書ける。

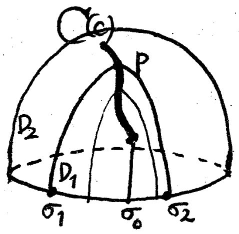
一点の cut locus の場合と同様に $g_1(\sigma) \leq g(\sigma)$ で $g_1(\sigma)$ は連続関数となる。特に $\hat{\mathcal{C}}(c)$ は S^1 に同相である。$\mathcal{D}_0 := \{(\sigma, \tau) : \sigma \in [0, \ell]/\{0, \ell\}, 0 \leq \tau < g_1(\sigma)\}$ とおくと、$x \mid \mathcal{D}_0$ は微分同型となり、$\partial \mathcal{D}_0 = \hat{\mathcal{C}}(c) \cup \{(\sigma, 0)\}$.

さてもし $\mathcal{F}(c)$ が一点になれば $\mathcal{F}(c)$ は $\mathcal{C}(c)$ と一致し、$g_1(\sigma)$

$=g(\sigma)=$定数となることが容易に示せる。そこで以下$\mathcal{C}(c)$は一点に帰着しないと仮定する。このとき次の事実がやさしい議論で成立することが分かる。

(2.3). x_σに沿っての焦点がまたcut pointにもなっている様なσの値は有限個しかない。

(2.4) $p\in\mathcal{C}(c)$とし異なる2本の最短線$x_{\sigma_1}|[0,\tau]$, $x_{\sigma_2}|[0,\tau]$がpで交わるとする。x_{σ_1}, x_{σ_2}はDを二つの領域D_1, D_2にわける。$0\le\sigma_1<\sigma_2\le l$とし$D_1$が$c|[\sigma_1,\sigma_2]$をふくめば$\forall\sigma\in(\sigma_1,\sigma_2)$に対して$x_\sigma$に沿っての$c$のcut pointは$D_1$にふくまれる。更に$\sigma_0\in(\sigma_1,\sigma_2)$で$x_{\sigma_0}$に沿っての$c$のcut pointが焦点になっているものがある。同様の結論がD_2に対しても成立する。



さて$p\in\mathcal{C}(c)$に対して次の3条件を考える。

(i) $p\in\mathcal{C}(c)$はあるx_σに沿ってのcの焦点.

(ii) cとpを結ぶ最短測地線は唯一本である。

(iii) $p\in\mathcal{C}(c)$に対して$\mathcal{C}(c)$の1-cellでpを端点とするものが丁度一つある。このときpを$\mathcal{C}(c)$の端点と呼ぶ。

このとき(2.4)を用いて

$$\begin{tikzcd} & \text{(i)} & \\ \text{(ii)} \arrow[ur] \arrow[rr, shift left] & & \text{(iii)} \arrow[ul] \arrow[ll, shift left] \end{tikzcd}$$

が成立することが分かる。(2.3)より$\mathcal{C}(c)$の端点は有限個である。Dがdiskだから$\mathcal{C}(c)$

は閉曲線を含み得ず $\mathcal{C}(c)$ は曲線論でいう"樹(tree)"となる。

同様の議論を用いて

(2.5) $p\in\mathcal{C}(c)$ に対して c から p への最短線の個数は有限で，p から出る $\mathcal{C}(c)$ の 1-cells の個数に等しい．これを p の位数と呼ぶ。*)

$p\in\mathcal{C}(c)$ は p が c の焦点ではなくかつその位数が 2 のとき regular cut point と云う．そうでない cut point は singular であると云う。regular (singular) cut points の $\widehat{\mathcal{C}}(c)$ への lift を regular (singular) tangent cut points と云う。

(2.6) 有限個の singular (tangent) cut points しか存在しない。これは (2.3) と無限個の位数が 3 以上の cut points があれば (2.4) より無限個の焦点が存在することになり証明される。次に $\mathcal{C}(c)$ での regular cut points の集合の連結成分は (2.6) より有限個で各々は正則な解析曲線となることを見よう．定義より丁度 2 個の最短線 $x_{\sigma_0}|[0,\tau_0]$，$x_{\sigma_1}|[0,\tau_0]$ で点 p に終るものがある．(σ_0,τ_0) (resp. (σ_1,τ_0)) の近傍で (σ,τ) (resp. (σ',τ')) は $p=x(\sigma_0,\tau_0)=x(\sigma_1,\tau_1)$ の局所座標系を定義し，実解析的な座標変換

$$\begin{cases}\sigma'=u(\sigma,\tau)\\ \tau'=v(\sigma,\tau)\end{cases}\qquad \left(\text{resp.}\ \begin{cases}\sigma=u'(\sigma',\tau')\\ \tau=v'(\sigma',\tau')\end{cases}\right)$$

*) [M]でこの事実は帰納法で証明を主張しているがその証明は正しくない。しかし $\overset{\text{自明}}{(2.5)}$ は正しい。

を得る。このとき $w(\sigma,\tau):=v(\sigma,\tau)-\tau=0$ なる方程式を考える。$w(\sigma_0,\tau_0)=0$ は明らかで x_{σ_0}, x_{σ_1} が異なることから $\frac{\partial w}{\partial \tau}(\sigma_0,\tau_0)\neq 0$ が従う。よって陰関数定理から σ_0 の近傍で定義された解析関数 $\tau=g_1(\sigma)$ で $\tau_0=g_1(\sigma_0)$, $v(\sigma,g_1(\sigma))=g_1(\sigma)$ なるものを得. これが cut locus の（局所的な）方程式を与えることはすぐ分かる。

注意. p の近傍で cut locus は cut point と C を結ぶ2個の最短線のなす角を2等分している。これは第一変分公式からでる。

更に regular cut points の連結成分を定義する解析関数 $\tau=g_1(\sigma)$ には高々有限個の危点しか存在しないことを示そう。まず $\tau=g_1(\sigma)$ の危点では対応する2本の C からの最短線が cut point で平角をなすことに注意する。実際 $\langle \frac{\partial}{\partial\sigma}x(\sigma,g_1(\sigma)), \frac{\partial x}{\partial\tau}(\sigma,g_1(\sigma))\rangle=0$. よってもし無限個の危点があれば, C から垂直に発し C に垂直に終る無限個の測地線でその長さが上に有界なものがある. 他方 p.5 で定義された $a(\sigma)$ は解析的であったから C から定るすべての測地線 x_σ は C に垂直に終ることになる. $a(\sigma)$ が最小値をとる σ の値を σ_0 とすれば $x(\sigma_0,a(\sigma_0))$ を通る2本の曲線 $\sigma\to x(\sigma,a(\sigma))$, $\sigma\to x(\sigma,a(\sigma_0))$ は共に測地線の場 x_σ に垂直で一致しなければならない。これより $a(\sigma)\equiv$ 定数 を得る。これより $F(C)$ が一点に帰着することが示せて矛盾を得る. 以上まとめて

(2.7) $\tilde{C}(C)=\{(\sigma,g_1(\sigma))\}$ は連続関数 $\tau=g_1(\sigma)$ によって径

数づけられる。$g_1(\sigma)$ は有限個の σ の値を除いて実解析的でその危点の個数はたかだか有限である。

次に $\rho(m) := \rho(m, c)$ を C からの距離関数とし、

$\Omega_t := \{m \in D : \rho(m) \geq t\}$, $S_t := \mathrm{Area}\,\Omega_t$, $S = S_0 = \mathrm{Area}\,D$

$\Lambda_t := \{m \in D : \rho(m) = t\}$, $l_t := \mathrm{length}\,\Lambda_t$, $\rho = \underset{m\in M}{\mathrm{Max}}\,\rho(m)$

とおく。このとき次が成立する。

(2.8) 定理（[F]） $t \to l_t$ $(\rho \geq t \geq 0)$ は連続で有限個の t の値を除いて実解析的である。さらに K_D を Gauss 曲率とするとき

$$\frac{d}{dt} l_t \leq \int_{\Omega_t} K_D\, ds - 2\pi$$

証明. $\widehat{\Lambda}_t$ を Λ_t の x による $\bar{\mathcal{D}}_0$ への lift とする。すなわち $\widehat{\Lambda}_t := \{(\sigma, t) \in \bar{\mathcal{D}}_0\}$. すると $\widehat{\Lambda}_t \cap \widetilde{C}(c)$ はたかだか有限個の点よりなる。さもなければ $\tau = g_1(\sigma)$ の無限個の危点が存在することになるから。そこで $E := \{(\sigma, \tau) : \sigma \in [0, l]/\{0, l\}, \tau \in \mathbb{R}\}$ 上

$$f(\sigma,\tau) := \begin{cases} \left|\dfrac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma,\tau)\right| & \text{if } (\sigma,\tau) \in \bar{\mathcal{D}}_0 \\ 0 & \text{if } (\sigma,\tau) \notin \bar{\mathcal{D}}_0 \end{cases}$$

とおく。

すると $l_t = \int_0^l f(\sigma,\tau)\,d\sigma$ である。l_t の連続性を示す。まず $M > 0$ で $0 \leq f \leq M$ on E をみたすものをとる。t を固定し $t_n \to t$ とする。$\varepsilon > 0$ を任意に与える。$\widetilde{C}(c)$ は区分的に滑らかで $\widehat{\Lambda}_t \cap \widetilde{C}(c)$ は（C の原点を必要なら取り換えることにより）有限個の点 $\{(\sigma_i(t), t) : 0 < \sigma_1(t) < \sigma_2(t) < \cdots < \sigma_k(t) < l\}$ で

与えられるから $\delta < \varepsilon/8kM$, $\frac{1}{2}\underset{1\le i\le k+1}{\mathrm{Min}}(\sigma_i(t)-\sigma_{i-1}(t))$ $(\sigma_0(t)\equiv 0, \sigma_{k+1}(t)\equiv \ell)$ と $(\delta>)\delta_1>0$ を

$$N_{\delta,\delta_1}:=\{(\sigma,\tau)\,;\,\sigma\notin\bigcup_{i=1}^{k}(\sigma_i(t)-\delta,\ \sigma_i(t)+\delta),\ |\tau-t|\le\delta_1\}$$

が $\widehat{C}(c)$ と交わらない様に選ぶことが出来る。N_{δ,δ_1} の連結成分上 f は一様連続だから正整数 N が存在して $n\ge N$ ならば

$$|f(\sigma,t)-f(\sigma,t_n)|<\varepsilon/2\ell \quad \text{for } (\sigma,t)\in N_{\delta,\delta_1}$$

とできる。すると

$$|\ell_{t_n}-\ell_t|\le\int_0^{\ell}|f(\sigma,t)-f(\sigma,t_n)|\,d\sigma\le\sum\int_{\sigma_i(t)-\delta}^{\sigma_i(t)+\delta}2M\,d\sigma+\int_0^{\ell}\frac{\varepsilon}{2\ell}\,d\sigma<\varepsilon。$$

これより ℓ_t の連続性が示された。次に $\tau=\overbrace{t_0}^{(0<t_0<\rho)}$ を $\widehat{\Lambda}_{t_0}\cap\widehat{C}(c)$ が空かあるいは(有限個の) regular tangent cut points $(\sigma(t_0), g_1(\sigma(t_0)))$ で $\sigma(t_0)$ が g_1 の危点でない様なものばかりから成る値とする。有限個の τ の値を除いて $\widehat{\Lambda}_\tau\cap\widehat{C}(c)$ はこの性質を持つ。特に後者の場合を考える。このとき tangent cut locus の定義方程式 $\tau=g_1(\sigma)$ は t_0 の近傍で $\sigma=\sigma(\tau)$ の形に解析関数を用いてとける。即ち t_0 の近傍において (c の原点を必要なら取り換えることにより) $0<\sigma_1^-(t)<\sigma_1^+(t)<\sigma_2^-(t)<\sigma_2^+(t)<\cdots<\sigma_k^-(t)<\sigma_k^+(t)<1$ を $\widehat{\Lambda}_t=\bigcup[\sigma_i^-(t),\sigma_i^+(t)]\times\{t\}$ をみたす様にとることが出来る。特に $x|(\sigma_i^-(t),\sigma_i^+(t))\times\{t\}$ は微分同型で各 tangent cut point $(\sigma_i^{\mp}(t),t)$ は丁度ひとつの $(\sigma_j^{\pm}(t),t)$ と x によって同一視される。更に (2.4), (2.6) の後の議論から $\sigma\longrightarrow$

$x(\sigma,t)$, $\sigma\in\bigcup[\sigma_i^-(t),\sigma_i^+(t)]$ は曲線 Λ_t に自然な向きを定めることがわかる。さて l_t は

$$l_t = \sum\int_{\sigma_i^-(t)}^{\sigma_i^+(t)}\left|\frac{\partial x}{\partial\sigma}(\sigma,t)\right|d\sigma$$

で与えられ，t_0 の近傍の t に対しては $\left|\frac{\partial x}{\partial\sigma}(\sigma,t)\right|\neq 0$ より l_t の解析性は明らかである。更に

$$(2.9)\quad \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} l_t = \sum\int_{\sigma_i^-(t_0)}^{\sigma_i^+(t_0)}\left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial\tau}}\frac{\partial x}{\partial\sigma},\frac{\partial x}{\partial\sigma}\right\rangle\Big/\left|\frac{\partial x}{\partial\sigma}\right|\cdot d\sigma$$

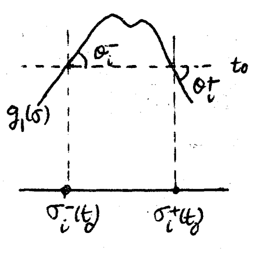
$$+\ \sigma_i^{+\prime}(t_0)\left|\frac{\partial x}{\partial\sigma}(\sigma_i^+(t_0),t_0)\right| - \sigma_i^{-\prime}(t_0)\left|\frac{\partial x}{\partial\sigma}(\sigma_i^-(t_0),t_0)\right|.$$

まず (2.9) の右辺第一項

$$= -\sum\int_{\sigma_i^-(t_0)}^{\sigma_i^+(t_0)}\left\langle\frac{\partial x}{\partial\tau},\nabla_{\frac{\partial}{\partial\sigma}/\left|\frac{\partial x}{\partial\sigma}\right|}\left(\frac{\partial x}{\partial\sigma}\Big/\left|\frac{\partial x}{\partial\sigma}\right|\right)\right\rangle\left|\frac{\partial x}{\partial\sigma}\right|d\sigma$$

$$= -\int_{\Lambda_{t_0}} k_g\,ds.$$

ここで $ds=\left|\frac{\partial x}{\partial\sigma}\right|d\sigma$ は Λ_{t_0} の弧長，k_g は Λ_{t_0} の測地的曲率である。次にベクトル $\frac{\partial x}{\partial\sigma}(\sigma_i^\pm(t_0),t_0)$ と曲線 $\varphi^\pm: t\longrightarrow x(\sigma_i^\pm(t),t)$ の $t=t_0$ における接ベクトルのなす角を $\theta_i^\pm$ とする。u を $\varphi^\pm$ の弧長とするとき



$$\left|\frac{\partial x}{\partial\sigma}(\sigma_i^\pm(t_0),t_0)\right|\sigma_i^{\pm\prime}(t_0) = \left|\frac{\partial x}{\partial\sigma}\right|\cdot\frac{d\sigma_i^\pm}{du}\Big/\frac{dt}{du}$$

$$=\left\langle\frac{\partial x}{\partial\sigma}\Big/\left|\frac{\partial x}{\partial\sigma}\right|,\frac{d\varphi^\pm}{du}\right\rangle\Big/\left\langle\frac{\partial x}{\partial\tau},\frac{d\varphi^\pm}{du}\right\rangle = \mp\cot\theta_i^\pm$$

を得る。幾何学的な意味から $0<\theta_i^\pm<\pi/2$。したがって

$$(2.10)\quad \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} l_t = -\int_{\Lambda_{t_0}} k_g\,ds - \sum\cot\theta_i^\pm$$

を得る。

Ω_{t_0} は有限個の互いに素な disk に分かれその境界の角点 (cut points) における接線の変化の総和は $\sum(\pi-\theta_i^- -\theta_i^+)$ で与えられるから，Gauss-Bonnet の定理を適用して

$$2\pi \leq \int_{\Omega_{t_0}} K_D\, dS + \int_{\Lambda_{t_0}} k_g\, ds + \sum\left(\pi/2 - \theta_i^{\pm}\right)$$

$$= \int_{\Omega_{t_0}} K_D\, dS - \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} l_t - \sum\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta_i^{\pm}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\theta_i^{\pm}\right)\right)$$

$$\leq \int_{\Omega_{t_0}} K_D\, dS - \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} l_t \quad .$$

(証明終り)。

注意　$\tilde{\Lambda}_{t_0} \cap \tilde{C}(c) = \phi$ であるか $F_1(c)$ が一点に帰着される場合でも同じ議論が明らかに成立する。また上の議論では解析性が本質的であり微分可能というだけでは一般に l_t の連続性も成立しない。

§3　定理の証明（解析的の場合）

$i(M)$ が定理で与えられた2つの数より小さいとして矛盾を出す。このとき $i(M) < \pi$ が容易に分かり $K \leq 1$ の仮定から長さ l $(< 2\pi)$ の単純閉測地線 c が存在する．§2 の議論により minimal immersion $F: D \to M$，$F|\partial D = c$ および 2-disk D 上 F により M から導入されたリーマン計量を考えることができる。$0 < \varepsilon \leq \rho\ (:= \underset{m\in M}{\mathrm{Max}}\ \rho(m))$ に対して $\varphi_\varepsilon : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ なる C^∞-級関数を $\varphi_\varepsilon(0) = 0$, $\varphi_\varepsilon(r) = 1$ for $r \geq \varepsilon$ をみたす様にとり

$$f_\varepsilon(m) := \begin{cases} \varphi_\varepsilon(\rho(m)) & \text{if } \rho(m) \le \varepsilon \\ 1 & \text{if } \rho(m) \ge \varepsilon \end{cases}$$

と定義すれば次を得る。

(3.1)補題 $\int_D |\nabla f_\varepsilon|^2 dS = \int_0^\varepsilon \varphi_\varepsilon'^2 l_t\, dt$

証明. cut locus $C(c)$ の近傍の列 $U_n := \{x(\sigma,\tau) : g_1(\sigma) \ge \tau > g_1(\sigma) - \frac{1}{n}\}$ $(n=1,2,\ldots)$ で $U_n \to C(c)$ なるものを選ぶ。$D_n := D \setminus U_n$, $E_n := \{m \in D_n : \rho(m) \le \varepsilon\}$ とおくと, ρ が $C(c)$ を除いたところで解析的で $|\nabla\rho| = 1$ という事実から $\varphi = \varphi_\varepsilon$ とおいて

$$\int_{D_n} |\nabla f_\varepsilon|^2 dS = \int_{D_n} (\varphi'\circ\rho)^2 dS = \int_{E_n} (\varphi'\circ\rho)^2 dS\text{。}$$

χ_t を $\nabla\rho$ で生成される flow とする。$\rho(\chi_t(m)) = t$ が $m \in \partial D$, $\chi_t(m) \notin C(c)$ に対して成立し, $X_n := \{(t,\sigma) : \sigma \in [0,l]/\{0,l\},\ 0 \le t \le g_1(\sigma) - \frac{1}{n}\}$ とおくとき $\Phi_n(t,\sigma) := \chi_t(c(\sigma))$ で定義される微分同型 $\Phi_n : X_n \to M$ を得る。$E_n \subset \Phi_n(X_n)$ に注意して $Y_n := \Phi_n^{-1}(E_n)$ とおく。ω_t で Λ_t の弧長要素を表わすとすれば Fubini の定理, Lebesgue の定理を用いて

$$\int_{E_n} (\varphi'\circ\rho)^2 dS = \int_{Y_n} (\varphi'\circ\rho\circ\Phi_n)^2\, \Phi_n^* dS = \int_{Y_n} \varphi'^2(t)\, dt \wedge \Phi_n^*\omega_t$$

$$= \int_0^\varepsilon \varphi'^2 \Big\{ \int_{\chi_t^{-1}(\Lambda_t \cap E_n)} \chi_t^*\omega_t \Big\} dt = \int_0^\varepsilon \varphi'^2\, \mathrm{length}(\Lambda_t \cap E_n)\, dt$$

$$\longrightarrow \int_0^\varepsilon \varphi'^2 l_t\, dt$$

(証明終り)。

さて我々の場合 F が極小で $K \le 1$ より D の Gauss 曲率 $K_D \le 1$

である。よって任意の $\sigma \in [0, \ell]/\{0, \ell\}$ に対して $x_\sigma | [0, \pi/2)$ にはCの焦点は現われない（Bergerの比較定理 [C−E]）。他方 $\mathcal{C}(c) \cap \mathcal{F}(c) \neq \phi$ であったから $\rho \geq \pi/2$。また前節の議論から $t < \pi/2$ に対しては $\ell_t > 0$ である。さて $\varepsilon < \pi/2$ に対し

$$\varphi_\varepsilon(t) := \begin{cases} \int_0^t \ell_t^{-1} dt \Big/ \int_0^\varepsilon \ell_t^{-1} dt & \text{if } 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 1 & t \geq \varepsilon \end{cases}$$

を選ぶ。すると (3.1) から

$$\int_D |\nabla f_\varepsilon|^2 dS = \left(\int_0^\varepsilon \ell_t^{-1} dt\right)^{-1}, \quad \int_D f_\varepsilon^2 dS \geq S_\varepsilon$$ を得る。

他方 (2.8) と $K_D \leqq 1$ より

(3.2) $\frac{d}{dt}\ell_t \leq S_t - 2\pi \leq S - 2\pi$ （有限個の t を除いて）

(3.2) で $t = 0$ とおくと c が測地線であることから $S \geq 2\pi$ を得る。と=3が等周不等式からこの事実から

$$S \geq 2\pi + \sqrt{4\pi^2 - \ell^2}$$ を得る（[O_2]）.

ℓ_t の連続性と (3.2) から $\ell_t \leq (S - 2\pi)t + \ell$ であるから

(3.3) $\lambda_1(D) \leq \frac{S - 2\pi}{S_\varepsilon}\left(\log \frac{(S-2\pi)\varepsilon + \ell}{\ell}\right)^{-1}$

が各 $\varepsilon < \pi/2$ に対して成立することになる。さて背理法の仮定から

$$\ell < \frac{4b(b-1)\pi^2}{b^2\pi^2 + (b-1)^2}, \; 2\pi\left\{1 + \frac{1}{\pi^2}(e^{b/R} - 1)^4\right\}^{-\frac{1}{2}}$$ であった。最初の不等式から $1 - \frac{1}{b} > \frac{\pi\ell}{2\pi + \sqrt{4\pi^2 - \ell^2}}$ が従う。次の2つの場合に別けて考えよう：

<u>Case 1</u> $S-2\pi = bS_{\varepsilon_0}$ をみたす $\varepsilon_0 \in (0, \pi/2)$ が存在する場合：

まず $t_0 \in (0, \varepsilon_0)$ で

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \ell_t \ge \frac{2S}{\varepsilon_0^2}\left(1-\frac{1}{b}\right) - \frac{2\ell}{\varepsilon_0}$$ をみたすものが存在することを主張する。実際そうでなければ ℓ_t は連続で有限個の $t \in (0, \varepsilon_0)$ を除いて $\frac{d}{dt}\ell_t < \frac{2S}{\varepsilon_0^2}\left(1-\frac{1}{b}\right) - \frac{2\ell}{\varepsilon_0}$ が成り立つ。2回積分して、$\int_{\Omega_t} dS = \int_0^t \ell_t \, dt$ に注意して

$$S - S_{\varepsilon_0} < S\left(1-\frac{1}{b}\right) = S\left(1-\frac{S_{\varepsilon_0}}{S-2\pi}\right) \le S\left(1-\frac{S_{\varepsilon_0}}{S}\right)$$ となり

矛盾を得る。したがって (3.2) より

(3.4) $$\frac{2\ell}{\varepsilon_0} + (S-2\pi) \ge \frac{2S}{\varepsilon_0^2}\left(1-\frac{1}{b}\right)。$$

次に $\frac{2\ell}{\varepsilon_0} < S-2\pi$ であることに注意する。実際そうでなければ

$$2\ell\varepsilon_0 \ge S\left(1-\frac{1}{b}\right) \ge \left(2\pi+\sqrt{4\pi^2-\ell^2}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right) \ge \pi\ell$$ となり

$\pi\ell > 2\ell\varepsilon_0$ に矛盾する。したがって

(3.5) $$S-2\pi > \frac{S}{\varepsilon_0^2}\left(1-\frac{1}{b}\right)$$

を得る。(3.3) から

$$\lambda_1(D) \le b\left\{\log\left(1+\frac{(S-2\pi)\varepsilon_0}{\ell}\right)\right\}^{-1}$$

を想い起こす。他方 (3.5) から

$$(S-2\pi)^2\varepsilon_0^2/\ell^2 > S(S-2\pi)/\ell^2 \cdot \left(1-\frac{1}{b}\right) \ge \pi\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2-1}$$

よって

$$R \le \lambda_1(D) < b\left\{\log\left(1+\sqrt{\pi\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2-1}}\right)\right\}^{-1}$$ すなわち

$$\ell > 2\pi\left\{1+\frac{1}{\pi^2}\left(e^{b/R}-1\right)^4\right\}^{-\frac{1}{2}}$$ を得る。矛盾。

<u>Case 2</u> もし Case 1 が起こらないならば $(S-2\pi)/S < 1 < b$

よりすべての $\varepsilon \in (0, \pi/2)$ に対して $(S-2\pi)/S_\varepsilon < b$ でなければならない。したがって

$$\lambda_1(D) \leq b\left\{\log\left(1+\frac{(S-2\pi)\varepsilon}{\ell}\right)\right\}^{-1} \quad \text{で } \varepsilon \to \pi/2 \text{ として}$$

$$R \leq \lambda_1(D) \leq b\left\{\log\left(1+\frac{S-2\pi}{\ell}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right\}^{-1}$$

$$< b\left\{\log\left(1+\sqrt{\pi\sqrt{(2\pi/\ell)^2-1}}\right)\right\}^{-1}$$

を得る。ここで

$$\sqrt{\pi\sqrt{\left(\tfrac{2\pi}{\ell}\right)^2-1}} < \sqrt{\left(\tfrac{2\pi}{\ell}\right)^2-1}\cdot\frac{\pi}{2} \quad \left(\leq \frac{(S-2\pi)}{\ell}\cdot\frac{\pi}{2}\right) \Longleftrightarrow$$

$\ell < 2\pi\cdot\pi/\sqrt{\pi^2+16}$ であり、後者の不等式は

$$\ell \leq 2\pi\cdot\frac{2b(b-1)\pi}{b^2\pi^2+(b-1)^2} < 2\pi\cdot\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+16}} \quad \text{より得られる。}$$

これより Case 1 と同様に矛盾が導かれ実解析的の場合の証明が終った。

4 定理の証明（一般の場合）.

(M, g_0) を C^3-級のコンパクト単連結リーマン多様体で

$$K_{g_0} \leq 1, \quad \mathrm{Ricci}_{g_0}(v) \geq R\ (>0)$$

をみたすものとする。Mは与えられた C^3-微分構造を導く様な実解析的構造を持つ。Nash の imbedding theorem から等長な C^3 級の imbedding $\Phi: M \to \mathbb{R}^N$ がある。すなわち G_0 を $\mathbb{R}^N$ の標準的計量とするとき $g_0 = \Phi^* G_0$. さて M から $\mathbb{R}^N$ への C^3 級写像全体の空間の中で M から $\mathbb{R}^N$ への実解析

的な imbeddings の全体は residual な集合を C^3-位相に関して作る。したがって induced metrics を考えることにより g_0 は C^2-位相に関して（G_0 から導かれた）実解析的なリーマン計量によって近似される。したがって M 上の実解析的なリーマン計量 g_n $(n=1,2,\cdots)$ で $g_n \to g_0$ (C^2-位相), $1+\delta_n \geq K_{g_n}$, $\mathrm{Ricci}_{g_n}(v) \geq R-\delta_n$, $\delta_n \to 0$ をみたすものがとれる。よって前節の結果より

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, i_{g_n}(M) \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\delta_n}} \mathrm{Min}\left\{\frac{2b(b-1)\pi^2}{b^2\pi^2+(b-1)^2}, \pi\left\{1+\frac{1}{\pi^2}\left(e^{\frac{b}{R-\delta_n}}-1\right)^4\right\}^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= \mathrm{Min}\left\{\frac{2b(b-1)\pi^2}{b^2\pi^2+(b-1)^2}, \pi\left\{1+\frac{1}{\pi^2}\left(e^{\frac{b}{R}}-1\right)^4\right\}^{-\frac{1}{2}}\right\},$$

ただし $i_g(M)$ は計量 g に関する単射半径を表わす。
他方 Ehrlich の結果で（[E]）

$$i_{g_0}(M) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, i_{g_n}(M)$$

を示すことが出来て証明が終ることになる。

<u>注意</u> Ehrlich による証明はかなり長いので $i_{g_0}(M) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, i_{g_n}(M)$ の簡単な証明を次節で与えておくことにする。

§5. Appendix

ここでは次を示す。

<u>(5.1) 命題</u> M をコンパクト連結な C^2-可微分多様体とする。M 上の C^2-リーマン計量の列 g_n が C^2-位相でリーマ

う計量 g_0 に収束するとき $i_{g_0}(M) \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, i_{g_n}(M)$ である。

この事実を示すためにいくつかの準備をする。まず常微分方程式の基本的な結果から。

<u>(5.2) 補題</u>　N を C^1 級リーマン多様体，X を N 上の C^1-ベクトル場，$x(t)$.$(0 \leq t \leq R)$ を X の積分曲線とする。このとき正定数 $M := M(N, X, x(0), R)$ で十分小さな $\varepsilon, \delta > 0$ に対して次が成立する様なものが存在する：$y(t)$ を $\sup_{x\in N} |X_x - Y_x| < \delta$ なる N 上の C^1-ベクトル場 Y の $\rho(x(0), y(0)) < \varepsilon$ をみたす積分曲線とすれば

$$\rho(x(t), y(t)) < M(\varepsilon + \delta t) \quad , 0 \leq t \leq R.$$

証明．$x(t), 0 \leq t \leq R$ を含む N の相対コンパクトな座標近傍 U で，U を $\mathbb{R}^{\dim N}$ の開集合とみたとき $\boxed{}$ で $x(t)$ が座標軸上にある様なものをとる。$\exists A > 1$ s.t. $\frac{1}{A}(\delta_{ij}) \leq (g_{ij}) \leq A(\delta_{ij})$ on U. euclid のノルムを $\| \ \|$ で書くことにすれば

$$\| X_x - Y_x \| < A\varepsilon \;, \quad \| x(0) - y(0) \| < A\delta.$$

X は C^1-級故 $\exists B > 0$ s.t. $\| X_x - X_y \| < B \| x - y \|$ on U.

さて $x(t), y(t)$ をそれぞれ X, Y の解曲線とすれば

$$\left\| \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right\| = \| X_{x(t)} - Y_{y(t)} \| \leq \| X_{x(t)} - X_{y(t)} \| + \| X_{y(t)} - Y_{y(t)} \|$$

$< A\delta + B \| x(t) - y(t) \|$．よって $x(t) \neq y(t)$ ならば

$$\left\{ \| x(t) - y(t) \| e^{-Bt} \right\}' \leq \left\| \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \right\| e^{-Bt} - B \| x(t) - y(t) \| e^{-Bt}$$
$$< A\delta e^{-BR} \leq A\delta.$$

$0 \leq t \leq R$ に対して $t_0 < t$ で $x(t_0) = y(t_0)$ だが $(t_0, t]$ で $x(t) \neq y(t)$ なる t_0 があれば

$$\| x(t) - y(t) \| e^{-Bt} \leq A\delta (t - t_0) \leq A\delta t$$

その様な t_0 がなければ

$$\| x(t) - y(t) \| e^{-Bt} \leq A\delta t + \| x(0) - y(0) \| .$$

いずれにしても $\rho(x(t), y(t)) \leq A\{ A\delta t + A\rho(x(0), y(0)) \} e^{Bt}$

$\leq A^2 e^{BR} (\varepsilon + \delta t)$ (証明終り).

<u>(5.3) 補題.</u> (M, g_0) を C^2-級コンパクトリーマン多様体, (TM, σ_0) を接バンドル TM 上の佐々木計量とする。M 上の C^2-リーマン計量の族 $\{g\}$ を考え $\varphi_t^g : TM \to TM$ を g に関する geodesic flow とする. $R > 0$ と g_0 に関する単位接ベクトル V_0 を固定する。このとき任意の $\varepsilon_1 > 0$ に対して g_0 の C^1-位相に関する近傍 $\mathcal{U}(g_0)$ が存在して $g \in \mathcal{U}(g_0)$ ならば

$$\rho_{\sigma_0}(\varphi_t^g (V_0 / |V_0|_g), \varphi_t^{g_0}(V_0)) < \varepsilon_1$$

$$\rho_{g_0}(\pi \circ \varphi_t^g (V_0 / |V_0|_g), \pi \circ \varphi_t^{g_0}(V_0)) < \varepsilon_1 \qquad 0 \leq t \leq R.$$

証明 $K^g : TTM \to TM$ を g に関する接続写像とする。(例えば [G-K-M] 参照. 局所座標系で書くと $K^g(\sum u^i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum v^i \frac{\partial}{\partial a_i}) = \sum (v^i + \sum \Gamma^i_{jk}(x) u^j a^k) \frac{\partial}{\partial x_i}$)。特に geodesic spray S^g は TM 上 $\pi_* S^g_v = v$, $K^g \cdot S^g_v = 0$, $v \in TM$ で特徴づけられる C^1-級ベクトル場である。geodesic flow φ_t^g は S^g から生成されることを注意しておこう。また $\sigma_0(\hat{X}, \hat{Y}) = g_0(\pi_* \hat{X}, \pi_* \hat{Y}) + g_0(K^{g_0}\hat{X}, K^{g_0}\hat{Y})$

である。いま $\varepsilon, \delta > 0$ を $M(TM, S^{g_0}, V_0, R)(\varepsilon+\delta R) < \varepsilon_1$ をみたす様にとる。すると C^1―位相に関する g_0 の近傍 $\mathcal{U}(g_0)$ で $g \in \mathcal{U}(g_0)$ に対して $|S_V^g - S_V^{g_0}|_{G_0} = |(K^g - K^{g_0})S_V^g|_{g_0}$ $(= |\sum(\Gamma_{ij}^{(g)k}(\pi v) - \Gamma_{ij}^{(g_0)k}(\pi v))v^i v^j \frac{\partial}{\partial x^k}|_{g_0}) < \delta$ と $\rho_{G_0}(V_0/|V_0|_g, V_0)$ $(\leq |1 - 1/|V_0|_g|) < \varepsilon$ が単位接 bundle $U(M, g_0)$ のある近傍に属する任意の V に対して成立する様なものがとれる。(5.2) より最初の結論が従う。第2の結論は $\pi : (TM, G_0) \to (M, g_0)$ がリーマン submersion で距離を減少させることからでる。 (証明終り).

次に $P := \{(v, w) \in TM \times TM : \pi v = \pi w\}$ を考える。これは $TM \times TM$ の部分多様体で $G_0 \times G_0$ から導かれる計量を持っているものとする。M上の C^2―計量 g に対して P上の C^1―級ベクトル場 Y^g を $Y^g_{(v,w)} := (S_v^g, T_{v,w}^g)$ ― ただし $T_{v,w}^g$ は $K^g T_{v,w}^g = 0$, $\pi_* T_{v,w}^g = v$ で定義されるもの ― で与える。P の曲線 $t \to (\varphi_t^g(v), A_{v,w}^g(t)) \in P$ ― $A_{v,w}^g(t)$ は w の測地線 $t \to \pi \circ \varphi_t^g(v)$ に沿っての平行移動 ― が Y^g の積分曲線である。

<u>(5.4) 補題</u> (M, g_0) コンパクトな C^2―級リーマン多様体. $V_0 \in U(M, g_0)$ と $\pi V_0 = \pi W_0$ なる $W_0 \in TM$ および $R > 0$ を固定する。すると $^\forall \varepsilon_1 > 0$ に対して g_0 の C^1―位相に関する近傍 $\mathcal{U}(g_0)$ で $g \in \mathcal{U}(g_0)$ ならば

$$\rho_{G_0}(A_{V_0,W_0}^{g_0}(t), A_{V_0/|V_0|_g, W_0}^g(t)) < \varepsilon_1, \quad 0 \leq t \leq R$$

をみたすものが存在する。

証明. $\varepsilon, \delta > 0$ を $M(P, Y^{g_0}_{\cdot}(v_0, w_0), R)\cdot(\varepsilon+\delta R) < \varepsilon_1$ なる様にとる。$P_a := \{(v,w) \in P : |v|_{g_0} < 1+a,\ |w|_{g_0} < |w_0|_{g_0}+a\}$ とおくとき ($a>0$). g_0 の近傍 $\mathcal{U}(g_0)$ が存在して

$$|Y^{g}_{(v,w)} - Y^{g_0}_{(v,w)}|_{G_0} = |S^g_v - S^{g_0}_v|_{G_0} + |T^g_{v,w} - T^{g_0}_{v,w}|_{G_0} < \delta$$

($|T^g_{v,w} - T^{g_0}_{v,w}|_{G_0} = |\sum(\Gamma^{(g)i}_{jk} - \Gamma^{(g_0)i}_{jk}) w^j v^k \frac{\partial}{\partial x^i}|_{g_0}$ に注意) かつ

$\rho_p((v_0, w_0), (v_0/|v_0|_g, w_0)) < \varepsilon$ が $(v,w) \in P_a$ に対して成立する様にできる。$(TM \times TM, G_0 \times G_0)$ の距離に対して Pythagoras の定理が成立し, P での距離は $TM \times TM$ の距離より小さくはないから (5.2) を用いて

$$\varepsilon^2 \geq \rho_p^2(\varphi^g_t(v_0/|v_0|_g), A^g_{v_0/|v_0|_g, w_0}(t)), (\varphi^{g_0}_t(v_0), A^{g_0}_{v_0,w_0}(t))$$

$$\geq \rho^2_{G_0}(\varphi^g_t(v_0/|v_0|_g), \varphi^{g_0}_t(v_0)) + \rho^2_{G_0}(A^g_{v_0/|v_0|_g, w(t)}, A^{g_0}_{v_0,w_0}(t))$$

$$\geq \rho^2_{G_0}(A^{g_0}_{v_0,w_0}(t), A^g_{v_0/|v_0|_g, w_0}(t)), \quad 0 \leq t \leq R. \quad (\text{証明終り}).$$

さて (5.1) の証明に戻る。必要なら部分列を考えることによって $g_n \to g_0$ (C^2-位相), かつ $i_{g_n}(M) \geq i_{g_0}(M) + \varepsilon$ がある $\varepsilon > 0$ に対して成立しているとして矛盾を出せばよい。$R = i_{g_0}(M) + \varepsilon$ とおく。$p \in M$ と p を始点とする g_0-測地線 $c_v : t \to \pi \circ \varphi^{g_0}_t(v)$ $(v \in U_p(M, g_0))$ を $c_v|[0, i_{g_0}(M)]$ は最短だが $\forall \delta > 0$ に対して $c_v|[0, i_{g_0}(M)+\delta]$ は最早最短でない様に選べる。最初に $q := c_v(i_{g_0}(M))$ が c_v に沿っての第一共役点になっている場合を考える。$\{e_i\}_{i=1}^n$ を T_pM の基底, $E_i(t)(:= A^{g_0}_{v,e_i}(t))$ を e_i の c_v に沿っての g_0-平

行移動とする．すると C^1-ベクトル場 $U(t)=\sum f^i(t)E_i(t)$,
$0 \leq t \leq R$ で $U(0)=U(R)=0$ で指数形式 $D^2E(c_v)$ を負にするものがある。すなわち $D^2E(c_v)(U,U)=$
$$\sum\int_0^R\{g^0_{ij}f^{i\prime}(t)f^{j\prime}(t)-K_{g_0}(U(t),\varphi^{g_0}_t(v))\,g^0_{ij}f^i(t)f^j(t)\}\,dt<0,$$
ただし $g^0_{ij}:=g_0(E_i(t),E_j(t))-g_0(E_i(t),\varphi^{g_0}_t(v))\,g_0(E_j(t),\varphi^{g_0}_t(v))$ ($=$ const.), $K_{g_0}(U(t),\varphi^{g_0}_t(v))$ はふたつのベクトルで張られる平面の断面曲率を表わす。他方 $E^g_i(t)$ を e_i の g-測地線 $c^g_{v/|v|_g}: t \to \pi\circ\varphi^g_t(v/|v|_g)$ に沿っての平行移動とし、$U^g(t)=\sum f^i(t)E^g_i(t)$ とおく．このとき第二変分公式は $D^2E(c^g_{v/|v|_g})(U^g,U^g)=$
$$\sum\int_0^R\{g^{(g)}_{ij}f^{i\prime}(t)f^{j\prime}(t)-K_g(U^g(t),\varphi^g_t(v/|v|_g))\,g_{ij}f^i(t)f^j(t)\}\,dt,$$
ただし $g^{(g)}_{ij}=g(E^g_i(t),E^g_j(t))-g(E^g_i(t),\varphi^g_t(v/|v|_g))\,g(E^g_j(t),\varphi^g_t(v/|v|_g))$ ($=$ const.) である。さて (5.3), (5.4) より $g_n \to g$ (C^1-位相) であれば $|g^{(g_n)}_{ij}-g^0_{ij}|\to 0$ かつ $[0,R]$ 上一様に
$$|U^{g_n}(t)-U(t)|_{g_0}\to 0,\quad |\varphi^{g_n}_t(v/|v|_{g_n})-\varphi^{g_0}_t(v)|_{g_0}\to 0.$$
他方断面曲率 K_g を TM の 2-planes の空間 $G_2(M)$ 上の関数と考えれば $g_n \to g_0$ (C^2-位相) のとき K_{g_n} は K_{g_0} に一様収束する。すると $D^2E(c^{g_n}_{v/|v|_{g_n}})(U^{g_n},U^{g_n}) \to D^2E(c_v)(U,U)<0$ となり十分大きな n に対しては $c^{g_n}_{v/|v|_{g_n}}|[0,R]$ は最早最短線には成り得ない。すなわち $i_{g_n}(M)<R=i_g(M)+\varepsilon$ となり矛盾。したがって q は p の共役点でないと仮定してよい。このとき長さ $l=2i_{g_0}(M)$ の p を基点とする g_0-閉測地線 $c^{g_0}_v$ ($v\in$

$U_p(M, g_0))$がある。$(\varepsilon >) \delta > 0$を$2\delta < i_{g_0}(M) < i_{g_n}(M)$なる様にとる。まず十分大きな$n$に対して$Exp^{(g_0)} B_\delta^{(g_0)}(0_p) \subset Exp^{(g_n)} B_{2\delta}^{(g_n)}(0_p)$が成立することに注意する。これは$\varepsilon_n \to 0$を$\rho_{g_0}(q, r) \geq (1-\varepsilon_n)\rho_{g_n}(q, r)$ $^\forall q, r \in M$が成立する様にとれることから明らか。さて(5.3)から十分大きなnに対して、$q_n := c^{g_n}_{v/|v|g_n}(\ell) \in Exp^{(g_0)} B_\delta^{(g_0)}(0_p) \subset Exp^{(g_n)} B_{2\delta}^{(g_n)}(0_p)$である。よって$q_n$と$p$を結ぶ最短$g_n$-測地線$\tau_n$を取ることが出来て閉曲線$c^{g_n}_{v/|v|g_n}|[0, \ell] \cup \tau_n$でその$g_n$に関する長さ$\ell_n$が$\ell_n < \ell + 2\delta$をみたすものがとれる。すると$c^{g_n}_{v/|v|g_n}|[0, t]$, $t > \ell_n/2$は最短線には成り得ない。実際十分小さな$\alpha > 0$に対して

$$\rho_{g_n}\left(p, c^{g_n}_{v/|v|g_n}\left(\frac{\ell_n}{2}+\alpha\right)\right) \leq g_n\text{-length of } c^{g_n}_{v/|v|g}\Big|\left[\frac{\ell_n}{2}+\alpha, \ell\right] \cup \tau_n$$

$$= \ell - \left(\frac{\ell_n}{2}+\alpha\right) + (\ell_n - \ell) = \frac{\ell_n}{2} - \alpha .$$

したがって$i_{g_n}(M) < \dfrac{\ell_n}{2} < i_g(M) + \varepsilon$ (矛盾)．で(5.1)の証明が終わった。

<u>注意</u> 同様の考え方で$\underline{\lim}_{n\to\infty} i_{g_n}(M) \geq i_{g_0}(M)$，すなわち上と合わせて．単射半径を$M$上の$C^2$-リーマン計量全体に$C^2$-位相を入れた空間上定義された関数とみたときの連続性を示すことができる。

References

[B-T] Yu.D.Burago-V.A.Toponogov., On 3-dimensional riemannian spaces with curvature bounded above, Math.Zametic, 13 (1973), 881-887.

[C-E] J.Cheeger-G.Ebin., comparison Theorems in Riemannain Geometry, North Holland-American Elsever, New-York, 1975.

[C-G] J.Cheeger-D.Gromoll., On the injectivity radius of 1/4-pinched manifolds, Preprint (1979).

[E] P.Ehrlich., Continuity properties of the injectivity radius function, Comp. Math., 29 (1974), 151-178.

[F] F.Fiala., Le problème les isopèrimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive, Comment.Math.Helv. 13 (1940/41), 297-346.

[G-K-M] D.Gromoll-W.Klingenberg-W.meyer., Riemannsche Geometrie in Grossen, Lecture Notes in Math., 55, Berlin-Heidelberg -New York, Springer, 1968.

[G] R.Gulliver., Regularity of minimizing surfaces of prescribed mean curvature, Ann.Math., 97 (1973), 275-305.

[G-L] R.Gulliver-F.Lesley., On boundary branch points of minimizing surfaces, Arch.Rat.Mech.and Anal., 52 (1973), 20-25.

[H] H.M.Huang., Some results on the pinching problem, Ph.D. Thesis, State Univ. of New York at Stony Brook, 1976.

[K] W.Klingenberg., Contributions to Riemannian geometry, Ann. of Math., 69 (1959), 654-666.

[K-S] W.Klingenberg-T.Sakai., Injectivity radius estimate for 1/4-pinched manifolds, Preprint (1980).

[M] S.B.Myers., Connections between differential geometry and topology, I, simply connected surfaces, Duke Math.J., 1 (1935), 376-391.

[O_1] R.Osserman., A proof of the regularity everywhere of the classical solutions to Plateau's problem, Ann. of Math. 91 (1970), 550-569.

[O_2] R.Osserman., The isoperimetric inequality, Bull.A.M.S., 84 (1978), 1182-1238.

[S] T.Sakai., Cut loci of Berger's spheres, Preprint (1980).