数理解析研究所講究録
408巻 1980年 13-30

極小部分多様体の次数について

筑波大 数学研究科 間下 克哉

序. (M^m, g) を既約なコンパクト対称空間とする。(M,g) のラプラシアン Δ の第 k 固有値を λ_k, $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$, λ_k に対応する固有空間を V^k で表わす。V^k の正規直交基底により, $(M, (\lambda_k/m)g)$ の V^k の単位球面内への極小はめこみ x_k が定められる。do Carmo and Wallach [2] は M が球面 S^n の場合に x_k の次数が k であることを示した。$M=S^n$ の場合 V^k の元は, $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の斉 k 次調和多項式を S^n 上に制限して得られる [1]。従って x_k のはめこみの次数は V^k の元を引き起こす多項式の次数と一致している。Wallach [9] は M が複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ $(n\geq 2)$ のとき x_1 の次数は 2 であると述べている。S^{2n+1} を $\mathbb{C}^{n+1}$ 内の単位球面とし, $\pi: S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ を Hopf fibration とする。$M=\mathbb{C}P^n$ のとき V^k の元は $\mathbb{C}^{n+1}$ 上の (k,k) 型の調和多項式を S^{2n+1} 上に制限したものから π によって引き起こされる [1]。よって $M=\mathbb{C}P^n$ のときも x_1 のはめこみの次数は, V^1 の元を引き起こす多項式の

次数と一致している。上述のことから$M=\mathbb{C}P^n$のときx_kのはめこみの次数は$2k$であることが予想される。一般に球面を除くコンパクトな階数1の対称空間について次の定理が得られる。

定理. Mを実射影空間$\mathbb{R}P^n$ $(n\geqq 1)$, 複素射影空間$\mathbb{C}P^n$ $(n\geqq 2)$, 四元数射影空間$\mathbb{Q}P^n$ $(n\geqq 2)$, またはケーリー射影平面$\mathbb{C}ayP^2$とする。このときx_kの次数は$2k$である。

四元数体$\mathbb{Q}$の直積$\mathbb{Q}^{n+1}$を自然な方法で$\mathbb{C}^{2n+2}$と同一視する。S^{4n+3}を$\mathbb{Q}^{n+1}$内の単位球面とし, $\pi: S^{4n+3}\longrightarrow \mathbb{Q}P^n$を Hopf fibration とする。$M=\mathbb{Q}P^n$のとき, V^kの元は$\mathbb{C}^{2n+2}$上の$Sp(1)$-不変な(k,k)型調和多項式をS^{4n+3}上に制限したものからπによって引き起こされるから, この場合にもx_kのはめこみの次数はV^kの元を引き起こす多項式の次数と一致している。

本稿では定理を$M=\mathbb{C}P^n$ $(n\geqq 2)$の場合について証明する。

§.1 標準的な極小はめこみ

(M^m, g)を既約なコンパクト対称空間とする。(M,g)のラプラシアンΔの第k固有値をλ_k, $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$, λ_kに対応する固有空間をV^kで表わす。自然数kを一つ固定する。$d\mu$をM上

の計量gから定まる自然な測度で，$\int_M d\mu = \dim. V^k = m(k)+1$ となるように正規化されたものとし，V^kの内積$\langle\ ,\ \rangle$を

$$\langle f, h\rangle = \int_M f\cdot h\, d\mu, \quad {}^\forall f, h \in V^k$$

により定義する。$f_0, f_1, \cdots, f_{m(k)}$を$V^k$の正規直交基底とすれば

$$x_k : M \longrightarrow \mathbb{R}^{m(k)+1}\ ;\ p \longmapsto (f_0(p), f_1(p), \cdots, f_{m(k)}(p))$$

は，$(M, (\lambda_k/m)g)$ の$\mathbb{R}^{m(k)+1}$の原点を中心とした単位球$S_1^{m(k)}$内への極小等長はめこみを引き起こしている[8]。x_kを<u>標準的な極小はめこみ</u>とよぶことにする。

(G, K) をMに対応する対称対とする。GはV^kに

$$(\sigma\cdot f)(p) = f(\sigma^{-1}\cdot p), \quad {}^\forall \sigma\in G, \quad {}^\forall p\in M,$$

により作用する。$v = \sum_{i=0}^{m(k)} f_i(eK) f_i$ (eはGの単位元) とおけばvはK-不変単位ベクトルである。$\mathbb{R}^{m(k)+1}$の標準的な基底$e_0, e_1, \cdots, e_{m(k)}$をとれば，$x_k$は($\mathbb{R}^{m(k)+1}$内への写像として) $x_k(p) = \sum_{i=0}^{m(k)} f_i(p) e_i$ と書ける。$A: \mathbb{R}^{m(k)+1} \longrightarrow V^k$を，$A(e_i)=f_i$ となる等長写像とすれば

$$A \circ x_k(\sigma K) = A(\Sigma_{i=0}^{m(k)} f_i(\sigma K) e_i)$$
$$= \Sigma_{i=0}^{m(k)} (\sigma^{-1} \cdot f_i)(eK) f_i \ .$$

σ が V^k 上に引き起こす直交変換の行列を (σ_{ij}) とすれば,

$$A \circ x_k(\sigma K) = \Sigma_{i=0}^{m(k)} \Sigma_{j=0}^{m(k)} \sigma_{ji} f_j(eK) f_i$$
$$= \Sigma_{j=0}^{m(k)} f_j(eK) \ \sigma \cdot f_j$$
$$= \sigma \cdot v \ .$$

A は $\mathbb{R}^{m(k)+1}$ 内の単位球 $S_1^{m(k)}$ と, V^k 内の原点を中心とした単位球 S_1 との等長同型をひき起こすから, 以下我々は x_k を S_1 内へのはめこみ

$$x_k : M \longrightarrow S_1 \ ; \ \sigma \cdot K \longmapsto \sigma \cdot v$$

と考えることにする。

§.2　はめこみの次数

この節では equivariant な等長はめこみの次数を定義し, 序で述べた定理を証明するための準備をする。

$x: M^m = G/K \longrightarrow \tilde{M}^N(c)$ を等質空間 M の定曲率空間 $\tilde{M}$ への equivaliant な等長はめこみとする。ここで x が equivariant であるとは，G から $\tilde{M}$ への等長変換群 $I(\tilde{M})$ への準同型 ρ で

$$x(\sigma \cdot p) = \rho(\sigma) \cdot x(p), \quad {}^\forall \sigma \in G, \ {}^\forall p \in M$$

をみたすものが存在するときにいう。前節で定義した標準的な極小はめこみは equivariant であることに注意しておこう。

∇ [resp. $\tilde{\nabla}$] を M [resp. $\tilde{M}$] の共変微分としよう。$x_{*}|_p(T_pM) = O_p^1(M)$ とし，$N_1|_p$ を $T_{x(p)}\tilde{M}$ から $T_{x(p)}\tilde{M}$ における $O_p^1(M)$ の直交補空間への直交射影 $N_1|_p : T_{x(p)}\tilde{M} \to (O_p^1(M))^\perp$ とする。このとき $p \in M$ における x の第 2 基本形式 $B_2|_p : T_pM \times T_pM \longrightarrow N_pM$ は次式で定められる：

$$B_2|_p(x, y) = [\tilde{\nabla}_x \ x_* Y]^{N_1|_p}, \quad {}^\forall x, y \in T_pM,$$

但 Y は y の M 上での局所的な拡張。この考え方を一般化して $p \in M$ における高次の基本形式 $B_j|_p$ を次のように帰納的に定義する。$B_j|_p : \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{j個} \longrightarrow N_pM$ が定義されているものとしよう。$O_p^j(M)$ を $B_j|_p$ の像の生成する線型空間とし，$N_j|_p$ を直交射影 $N_j|_p : T_{x(p)}\tilde{M} \longrightarrow (O_p^1(M) + \cdots + O_p^j(M))^\perp$ とする。このとき

$$B_{j+1|p}(u_0, u_1, \cdots, u_j) = [\tilde{\nabla}_{u_0}(B_j(U_1, \cdots, U_j))]^{N_j|p}, \quad {}^\forall u_0, u_1, \cdots, u_j \in T_pM$$

但 U_i $(1 \leq i \leq j)$ は u_i の M 上での局所的な拡張。B_j $(j \geq 2)$ が法束 N(M) に値を持つ (0, j)-テンソル場であることは帰納的に証明できる。さらに次のことがわかる。

<u>補題 1.</u> (1) $B_{j|p} : \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{j\text{-個}} \longrightarrow N_pM$, $j \geq 2$,

は対称な多重線型写像。

(2) B_j は G-不変, 即ち

$$B_{j|\sigma \cdot p}(\sigma \cdot u_1, \cdots, \sigma \cdot u_j) = \rho(\sigma) \cdot B_{j|p}(u_1, \cdots, u_j)$$
$$^\forall \sigma \in G, \quad ^\forall u_1, \cdots, u_j \in T_pM.$$

証明は省略する。例えば [5] P. 136 参照。

$O_p^d(M) \neq 0$, $O_p^{d+1}(M) = 0$ となる d が存在する。x が equivariant であることから d は $p \in M$ のとり方によらない。d をはめこみ x の <u>次数</u> とよぶ。次数の定義は $p \in M$ のとり方によらないから, 以下我々は原点 $o = eK$ における基本形式 $B_{j|eK}$ のみを考える。補題 1 (1) によって $B_{j|eK}$ は $T_{eK}M$ の対称積 $S^j(T_{eK}M)$ 上に拡張される。$T_{eK}M$ への K のイソトロピー作用を $S^j(T_{eK}M)$ 上に自然に拡張すれば補題 1 (2) から次の補題を得る。

<u>補題 2.</u> $B_{j|eK} : S^j(T_{eK}M) \longrightarrow O_{eK}^j(M)$ は K-準同型。

はめこみxがfull，即ち$x(M)$が$\tilde{M}$の全測地的な真の部分多様体には含まれないとする。このときErbacher [3] の定理を用いることによって次の補題を得る。

補題 3. dをfull，equivariantなはめこみxの次数とすれば，

$$T_{x(e_K)}\tilde{M} = O^1_{e_K}(M) + O^2_{e_K}(M) + \cdots + O^d_{e_K}(M). \tag{2.1}$$

ここで前節の標準的な極小はめこみがfull，equivariantであることに注意しておこう。

さらにxが極小はめこみであるとしよう。$E_1, E_2, \cdots, E_m$を原点のまわりの直交枠の場としよう。$E_i|e_K = e_i$とおく。xが極小だから$\sum_{i=1}^m B_2(E_i, E_i) = 0$。$X_j$ $(j = 1, 2, \cdots)$を0のまわりの任意のベクトル場とする。$\sum_{i=1}^m B_2(E_i, E_i) = 0$を逐次微分することにより次を得る：

$$\sum_{i=1}^m B_k(X_1, \cdots, X_{k-2}, X_i, X_i) = 0, \quad k \geqq 2. \tag{2.2}$$

(2.2) から直ちに次の補題が導かれる。

補題 4. xをequivariantな極小はめこみとする。$e_1, \cdots, e_m$をT_pMの直交枠とし，$r = \sum_{i=1}^m e_i \cdot e_i \in S^2(T_pM)$とする。このとき

$$\mathrm{Ker}\, B_j|e_K \supset r \cdot S^{j-2}(T_{e_K}M), \quad j \geqq 2. \tag{2.3}$$

$P_j(T_{e_K}M)$ $(j\geqq 0)$ を $T_{e_K}M$ 上の斉 j 次多項式全体のなす空間とする。K の $P_j(T_{e_K}M)$ への作用を次のように定める:

$$(\sigma\cdot P)(x) = P(\sigma^{-1}\cdot x), \quad {}^{\forall}\sigma\in G,\ {}^{\forall}x\in T_{e_K}M.$$

このとき $x\in T_{e_K}M$ に対して $P_j(T_{e_K}M)$ の元 P_x, $P_x(y)=g(x,y)$, を対応させる写像は K-同型である。この同型を拡張して $S^j(T_{e_K}M)$ と $P_j(T_{e_K}M)$ との K-同型を得る。$H_j(T_{e_K}M)$ を $T_{e_K}M$ 上の斉 j 次調和関数全体のなす空間とし、上の K-同型により、$r=\sum_{i=1}^{m} e_i\cdot e_i\in S^2(T_{e_K}M)$ に対応する多項式を $\tilde{r}$ で表わすことにする。このとき $\overbrace{P_j(T_{e_K}M)}^{(j\geqq 2)}$ は K-不変部分空間の直和

$$(2.4)\qquad P_j(T_{e_K}M) = \begin{cases} H_j(T_{e_K}M), & j=0,1 \\ H_j(T_{e_K}M)+\tilde{r}\cdot P_{j-2}(T_{e_K}M), & j\geqq 2 \end{cases}$$

に分解される。

§.3 調和多項式の空間 $S^j(T_{e_K}\mathbb{C}P^n)$ の分解

この節では M が複素射影空間のときの $H_j(T_{e_K}M)$ の分解について述べる。§.3, §.4 を通して次の記号を用いる。

$$G = SU(n+1)$$

$$K = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} 1/\det\sigma & 0 \\ \hline 0 & \sigma \end{array}\right] \;\middle|\; \sigma \in U(n) \right\}$$

$$L = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \sigma \end{array}\right] \;\middle|\; \sigma \in SU(n) \right\}$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n+1)$$

$$\mathfrak{k} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} -\mathrm{trace}\, X & 0 \\ \hline 0 & X \end{array}\right] \;\middle|\; X \in \mathfrak{u}(n) \right\}$$

$$\mathfrak{l} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & X \end{array}\right] \;\middle|\; X \in \mathfrak{su}(n) \right\}$$

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -\bar{z}_1 & \cdots & -\bar{z}_n \\ z_1 & & & \\ \vdots & & O & \\ z_n & & & \end{bmatrix} \;\middle|\; z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\mathfrak{f} = \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{-1}x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{-1}x_{n+1} \end{bmatrix} \;\middle|\; x_1, \cdots, x_{n+1} \in \mathbb{R},\ \Sigma_{i=1}^{n+1} x_i = 0 \right\}$$

$$\mathfrak{f}' = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \sqrt{-1}x_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \sqrt{-1}x_{n+1} \end{bmatrix} \;\middle|\; x_2, \cdots, x_{n+1} \in \mathbb{R},\ \Sigma_{i=2}^{n+1} x_i = 0 \right\}$$

ここで G/K は複素射影空間 $\mathbb{CP}^n$ と同型で、$\mathfrak{p}$ は $\mathbb{CP}^n$ の原点における接空間と自然に同一視される。$\mathfrak{f}$ [resp. $\mathfrak{f}'$] 上の1形

式 $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}$ [resp. $\lambda'_1, \cdots, \lambda'_n$] を次のように定める:

$$\lambda_i\left(\begin{bmatrix} \sqrt{-1}x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}x_{n+1} \end{bmatrix}\right) = x_i \quad \left[\text{resp. } \lambda'_i\left(\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \sqrt{-1}x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{-1}x_{n+1} \end{bmatrix}\right) = x_{i+1}\right].$$

$\mathfrak{h}$ [resp. $\mathfrak{h}'$] 上の1形式全体の空間に次のような辞書式順序を導入する。

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n > 0 > \lambda_{n+1} \quad [\text{resp. } \lambda'_1 > \lambda'_2 > \cdots > \lambda'_{n-1} > 0 > \lambda'_n]$$

$\mathfrak{p}$ の元 $\begin{bmatrix} 0 & -\bar{z}_1 & \cdots & -\bar{z}_n \\ z_1 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ z_n & & & \end{bmatrix}$ に $\mathbb{C}^n$ の元 $(z_1, \cdots, z_n)$ を対応させる写像は, K の $\mathfrak{p}$ へのイソトロピー作用が随伴作用に等しいことに注意すれば,

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \sigma \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 0 & -{}^t\bar{Z} \\ \hline Z & 0 \end{array}\right] \qquad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \sigma \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 0 & -{}^t\bar{Z} \\ \hline Z & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \sigma^{-1} \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} 0 & -{}^t\bar{Z}\,\sigma^{-1} \\ \hline \sigma Z & 0 \end{array}\right]$$

だから, $SU(n)$同型である。そこで我々は $H_j(T_{eK}\mathbb{C}P^n)$ のかわりに, $\mathbb{C}^n$ 上の調和多項式の空間 $H_j(\mathbb{C}^n)$ の $SU(n)$-既約分解を考える。

$\mathbb{C}^n$上の多項式Pが(p,q)型であるというのは

$$P(cz_1,\cdots,cz_n,\overline{cz_1},\cdots,\overline{cz_n}) = c^p\bar{c}^q P(z_1,\cdots,z_n,\bar{z}_1,\cdots,\bar{z}_n), \tag{3.1}$$
$$\forall z_1,\cdots,z_n \in \mathbb{C}, \quad \forall c \in \mathbb{C}$$

をみたすことである。$H_j(\mathbb{C}^n)$の元で(p,q)型であるものの全体を$H_j^{p,q}(\mathbb{C}^n)$とおこう。ここで明らかに$p+q=j$である。$W^{\mathbb{C}}$で実ベクトル空間Wの複素化を表わすことにする。

<u>補題 5.</u>　$(H_j^{p,q}(\mathbb{C}^n))^{\mathbb{C}}$は$SU(n)$-既約で，その最高ウェイトは$q\lambda_1' - p\lambda_n'$である。

証明は[7] §.14 参照。

$\mathbb{C}P^n$のラプラシアンの第k固有値に対応する固有空間V^kは，$\mathbb{C}^{n+1}$上の(k,k)型の調和多項式全体のなす空間$H_{2k}^{k,k}(\mathbb{C}^{n+1})$と$G$-同型[1]だから，$(V^k)^{\mathbb{C}}$は$G$-既約でその最高ウェイトは$k(\lambda_1 - \lambda_{n+1})$である。

$H_j^{p,q}(\mathbb{C}^n)$にL-同型な$H_j(T_{e_K}\mathbb{C}P^n)$の部分空間を$H_j^{p,q}(T_{e_K}\mathbb{C}P^n)$と書くことにしよう。このとき(2.4)と補題5から次を得る。

<u>補題 6.</u>　$(P_j(T_{e_K}\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}}$は，$L$-不変部分空間の直和

$$(P_j(T_{e_K}\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}} = \begin{cases} H_0^{0,0}(T_{e_K}\mathbb{C}P^n) & ,\ j=0 \\ H_1^{1,0}(T_{e_K}\mathbb{C}P^n) + H_1^{0,1}(T_{e_K}\mathbb{C}P^n) & ,\ j=1 \\ \sum_{p+q=j,\,p,q\geq 0} H_j^{p,q}(T_{e_K}\mathbb{C}P^n) + \tilde{r}\cdot(P_{j-2}(T_{e_K}\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}} & ,\ j\geq 2 \end{cases}$$

に分解される。但，$H_j^{p,q}(T_{ek}\mathbb{C}P^n)$ はL-既約でその最高ウェイトは $q\lambda_1' - p\lambda_n'$ である。

§.4　定理の証明

この節では序に述べておいた定理を複素射影空間の場合について証明する。

$S^j(T_{ek}\mathbb{C}P^n)$ と $P_j(T_{ek}\mathbb{C}P^n)$ とはK-同型であったからこの同型により我々は基本形式 $B_{j\,lek}$ を $P_j(T_{ek}\mathbb{C}P^n)$ から $O_{ek}^j(\mathbb{C}P^n)$ へのK-準同型と見なすことにする。以下我々はこれを複素化した $B_{j\,lek}:(P_j(T_{ek}\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}} \longrightarrow (O_{ek}^j(\mathbb{C}P)^n)^{\mathbb{C}}$ を考える。$(P_j(T_{ek}\mathbb{C}P_n))^{\mathbb{C}}$ は補題6に示したように，L-不変部分空間に分解されている。補題4から $B_{j\,lek}(\tilde{F}\cdot(P_{j-2}(T_{ek}\mathbb{C}P^n)^{\mathbb{C}})=0$ である。$(H_j^{p,q}(T_{ek}\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}}$ はL-既約だから，$B_{j\,lek}$ は $(H_j^{p,q}(T_{ek}\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}}$ 上恒等的に0かまたは $(O_{ek}^j(\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}}$ の中への同型写像。j が2以上の整数全体を動くときの，$B_{j\,lek}((H_j^{p,q}(T_{ek}\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}} \neq 0$ となる組 (p,q) の全体を I としよう。このとき I の定義から

$$(4.1)\qquad (O_{ek}^j(\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}} \cong \Sigma_{(p,q)\in I,\ p+q=j}(H_j^{p,q}(T_{ek}\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}},\ j\geq 2$$

となることがわかる。$O_{ek}^j(\mathbb{C}P^n)$，$j\geq 1$，は V^k 内の単位球 S_1

の $\underbrace{X_k(eK)}_{=v}$ における接空間の部分空間だから，これを自然に V^k の部分空間と見なせば，補題3から次が得られる：

$$(4.2)\qquad (V^k)^{\mathbb{C}} = \mathbb{C}v + (O^1_{ek}(\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}} + (O^2_{ek}(\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}} + \cdots + (O^d_{ek}(\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}}$$

但 d は X_k の次数とする。$(O^1_{ek}(\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}}$ は $(T_{ek}(\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}}$ と $X_{k*}|_{ek}$ によりL-同型だから，それはまた $(P_2(T_{ek}\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}}$ と同型。よって補題6により

$$(4.3)\qquad (O^1_{ek}(\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}} \cong (H^{1,0}_1(T_{ek}\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}} + (H^{0,1}_1(T_{ek}\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}}。$$

従って(4.1)，(4.2)．及び(4.3)から $(V^k)^{\mathbb{C}}$ のL-既約分解

$$(4.4)\qquad (V^k)^{\mathbb{C}} \cong (H^{0,0}_0(T_{ek}\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}} + (H^{1,0}_1(T_{ek}\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}} + (H^{0,1}_1(T_{ek}\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}} + \sum_{(p,q)\in I,\, p+q=j} (H^{p,q}_j(T_{ek}\mathbb{C}P^n))^{\mathbb{C}}$$

を得る。ここで $d = \mathrm{Max}_{(p,q)\in I}(p+q)$ であることは明らかである。Ikeda and Taniguchi [4] の結果によって $(V^k)^{\mathbb{C}}$ のK-既約分解を知ることができる。それによって $\mathrm{Max}_{(p,q)\in I}(p+q)$ を計算することができるが，ここでは別証明を与えよう。まず次の(*)を示そう。

(*) $$\mathrm{Max}_{(p,q)\in I}(p+q) \geqq 2k。$$

(*) の証明. $\exp tH$ を $H = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1}x_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{-1}x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{f}'$ の生成する L の 1 径数部分群とする。このとき $w = (\bar{z}^2)^k (z^{n+1})^k \in (V^k)^{\mathbb{C}}$ に対して

$$\begin{aligned} H\cdot w &= d/dt|_{t=0} (\exp tH \cdot w) \\ &= d/dt|_{t=0} (e^{\sqrt{-1}x_2 t}\,\bar{z}^2)^k (e^{\sqrt{-1}x_{n+1}t}\, z^{n+1})^k \\ &= \sqrt{-1}\, k(\lambda_1' - \lambda_n')(H)\, w。 \end{aligned}$$

$\pi_{p,q}$ を直和分解 (4.4) に関する射影 $\pi_{p,q} : (V^k)^{\mathbb{C}} \longrightarrow H_j^{p,q}(T_{e_K}\mathbb{CP}^n)$ とする。$\pi_{p,q}$ は L-準同型だから

(4.5) $$H\cdot \pi_{p,q}(w) = \pi_{p,q}(H\cdot w) = \sqrt{-1}\, k(\lambda_1' - \lambda_n')(H) W。$$

$W \neq 0$ だから $\pi_{p,q}(w) \neq 0$ となる $(p,q)\in I$ が存在する。この (p,q) に対する L-既約空間 $(H_j^{p,q}(T_{e_K}\mathbb{CP}^n))^{\mathbb{C}}$ の最高ウェイトは $\underbrace{q\lambda_1' - p\lambda_n'}_{= (p+q)\lambda_1' + p\lambda_2' + \cdots + p\lambda_{n-1}'}$ であった。(4.5) は $k(\lambda_1' - \lambda_n') = 2k\lambda_1' + k\lambda_2' + \cdots + k\lambda_{n-1}'$ が $(H_j^{p,q}(T_{e_K}\mathbb{CP}^n))^{\mathbb{C}}$ のウェイトであることを示しているから,

$$2k \leqq p+q \leqq \mathrm{Max}_{(p,q)\in I}(p+q)$$

よって(*)が示された。定理の証明のためには次の(**)を示せばよい。

$$(**) \qquad \mathrm{Max}_{(p,q)\in I}(p+q) \leqq 2k$$

(**)の証明. $(V^k)^{\mathbb{C}}$ の G-加群 [resp. L-加群] としてのウェイトの全体を Λ [resp. M] とし, $(V^k)^{\mathbb{C}}$ の G-加群 [resp. L-加群] としてのウェイト空間分解を

$$(V^k)^{\mathbb{C}} = \sum_{\lambda\in\Lambda} \tilde{V}_\lambda \qquad \left[\text{resp. } (V^k)^{\mathbb{C}} = \sum_{\mu\in M} \tilde{\tilde{V}}_\mu \right]$$

とする。かってな $\lambda\in\Lambda$ に対して $\lambda|\mathfrak{f}'\in M$ で, $\tilde{\tilde{V}}_{\lambda|\mathfrak{f}'}\supset\tilde{V}_\lambda$ は明らかである。逆にかってな $\mu\in M$ に対して $\mu=\lambda|\mathfrak{f}'$ となる $\lambda\in\Lambda$ が存在する。もしそうでないとすれば $\tilde{\tilde{V}}_\mu$ は $(V^k)^{\mathbb{C}}$ に含まれないことになり矛盾となる。

$\alpha_i=\lambda_i-\lambda_{i+1}$ $(1\leqq i\leqq n)$ とおけば, 任意の $\lambda\in\Lambda$ は非負整数 m_i を係数として

$$(4.6) \qquad \lambda=\lambda_0-\sum_{i=1}^{n} m_i\alpha_i \quad , \quad 但 \ \lambda_0=k(\lambda_1-\lambda_{n+1})$$

と一意的に書ける。任意にとった $(p,q)\in I$ に対して $\lambda\in\Lambda$ を

$$\lambda|\mathfrak{f}' = q\lambda_1' - p\lambda_n' = (p+q)\lambda_1' + p\lambda_2' + \cdots + p\lambda_{n-1}'$$

となるようにとる。(4.6)により

$$\lambda|\mathfrak{f}' = (\lambda_0 - \Sigma_{i=1}^{n} m_i\alpha_i)|\mathfrak{f}'$$
$$= (k+m_1-m_2-m_n)\lambda_1' + \Sigma_{i=2}^{n-1}(k+m_i-m_{i+1}+m_n)\lambda_i' 。$$

λのとり方から

$$(4.7) \qquad k+m_1-m_2-m_n = p+q 。$$

s_{α_1} を α_1 に関する $\mathfrak{f}^*$ の鏡映とする。s_{α_1} は $\mathfrak{g}$ のワイル群の元だから、$s_{\alpha_1}(\lambda)$ はまた Λ に含まれる。簡単な計算により

$$s_{\alpha_1}(\lambda) = \lambda_0 - (k-m_1+m_2)\alpha_1 - \Sigma_{i=2}^{n} m_i\alpha_i$$

を得る。$s_{\alpha_1}(\lambda)$ の上の表現における α_1 の係数 $k-m_1+m_2$ は、$s_{\alpha_1}(\lambda)\in\Lambda$ より $k-m_1+m_2 \geqq 0$。(4.7)とあわせて

$$p+q \leqq 2k-m_n \leqq 2k 。$$

(p.9) はＩの任意の元だから(**)が示された。

以上で序に述べた定理の複素射影空間の場合の証明が終わった。四元数射影空間及びケーリー射影平面についても同様な方法で証明できる。補題6に対応する分解はSmith [6]により与えられている。

参考文献

[1] Berger, M., Gauduchon, P. et Mazet, E., Le spectre d'une variété riemannienne. Lecture Notes in Math., 194, Springer, 1971.

[2] do Carmo, M. P. and Wallach, N., Minimal immersions of spheres into spheres. Ann. of Math., 93 (1971), 43-62.

[3] Erbacher, J., Reduction of the codimension of an isometric immersions. J. Diff. Geometry, 5 (1971), 333-350.

[4] Ikeda, A. and Taniguchi, Y., Spectra and eigenforms of the Laplacian on S^n and $P^n(C)$. Osaka J. Math., 15 (1978), 515-546.

[5] Mashimo, K., Degree of the standard isometric minimal immersions of complex projective spaces into spheres. Tsukuba J. Math., 4 (1980), 133-145.

[6] Smith, R. T., The spherical representations of groups transitive on S^n. Indiana Univ. Math. J. 24 (1974), 307-325.

[7] Takeuchi, M., 現代の球関数. 岩波書店, 1974.

[8] Takahashi, T., Minimal immersions of Riemannian manifolds. J. Math. Soc. Japan., 18 (1966), 380-385.

[9] Wallach, N., Minimal immersions of symmetric spaces into spheres. Pure and Applied Math. Series, 8, Marcel Dekker, 1972.