数理解析研究所講究録
409巻 1980年 128-134

一般化されたクンマー曲面について

横浜市大 文理　桂 利行

標数正の体上定義された有理的ではない単有理曲面の研究は，1958年に Zariski が例を発見して以来，多くの数学者によって行なわれてきた。本稿では，有理的ではない楕円曲面のある類について，それらが単有理曲面になるための必要十分条件を与える。

§1. 一般化されたクンマー曲面

Aを，標数pの代数的閉体k上定義されたアーベル曲面とし，群GをAに忠実に作用する有限群とする。ω_AをA上の零ではない正則2型式とする。群GがAの inversion $(\iota(u)=-u)$ で生成されるとき，$p\neq 2$なら，商曲面A/Gの非特異極小モデルがK3曲面になることはよく知られている。本章では，この事実を一般化する。

定義1. CをAの被約で既約な曲線とする。Gの，単位元ではない元gがあって，C上恒等写像を誘導するとき，C

は G の固定曲線であるという。

定理1. $p \neq 2$ とする。商曲面 A/G の相対極小モデルがK3曲面になるための必要十分条件は，G が次の4条件を満たすことである。

(1) G は固定曲線を持たない。

(2) G の単位元以外の元で，固定点を持つものが存在する。

(3) A/G の特異点はすべて有理二重点である。

(4) G の任意の元 g に対して $g^*\omega_A = \omega_A$ が成立する。

定義2. G を (1)−(4) を満たす群とする。A/G の非特異極小モデルを 一般化されたクンマー曲面という。

例0. $p \neq 2$ とする。A を体 k 上のアーベル曲面，ι を inversion (ι: $u \mapsto -u$, $u \in A$) とする。ι で生成された群 $G = \langle \iota \rangle$ は，条件 (1)−(4) をみたす。A/G の非特異極小モデルをクンマー曲面という。

例1. $p \neq 2$ とし，次のような2つの楕円曲線を考える。

$$E_1 : y_1^2 = x_1^4 - 1 \ , \quad E_2 : y_2^2 = x_2^4 - 1 \ .$$

$A = E_1 \times E_2$ とおき，群 G を

$$g : \begin{cases} x_1 \longmapsto i x_1 \ , & y_1 \longmapsto y_1 \\ x_2 \longmapsto -i x_2 \ , & y_2 \longmapsto y_2 \end{cases}$$

によって生成される位数4の群とする。ただし，i は1の原始4乗根である。群 G は条件 (1)−(4) を満たす。

例2. $p \neq 2, 3$ とする。次のような2つの楕円曲線を考える。 $E_1 : y_1^2 = x_1^3 - 1$, $E_2 : y_2^2 = x_2^3 - 1$。

$A = E_1 \times E_2$ とおき，群 G を

$$g : \begin{cases} x_1 \longmapsto \omega x_1, & y_1 \longmapsto y_1, \\ x_2 \longmapsto \omega^2 x_2, & y_2 \longmapsto y_2, \end{cases}$$

によって生成される位数3の群とする。ただし，ω は1の原始3乗根である。群 G は 条件 (1)-(4) を満たす。

例3. $p \neq 2, 3$ とする。次のような2つの楕円曲線を考える。 $E_1 : y_1^2 = x_1^3 - 1$, $E_2 : y_2^2 = x_2^3 - 1$.

$A = E_1 \times E_2$ とおき，群 G を

$$g : \begin{cases} x_1 \longmapsto \omega x_1 & y_1 \longmapsto -y_1 \\ x_2 \longmapsto \omega^2 x_2 & y_2 \longmapsto -y_2 \end{cases}$$

によって生成される位数6の群とする。ただし，ω は1の原始3乗根である。群 G は 条件(1)-(4) を満たす。

注意. Ueno [5] で，標数0のさらに一般のクンマー多様体について，高次元の場合をも含めて研究されている。

§2. 単有理曲面

定義3. 2次元射影空間 $\mathbb{P}^2$ からの支配的な有理写像を持つような代数曲面を単有理曲面という。支配的な有理写像を次数 p の純非分離的写像にとれるとき，その代数曲面を Zariski 曲面という。

定理２．例１（resp 例２，例３）で与えられた一般化されたクンアー曲面について，次の４条件は同値である。

(1)　S は　単有理曲面である。

(2)　S は　Zariski 曲面である。

(3)　S は　超特異曲面である。即ち，ピカール数と第２ベッチ数が等しい。

(4)　$p \equiv 3 \mod 4$　(resp. $p \equiv 2 \mod 3$)。

注意．条件(4)は　もとのアーベル曲面 A が超特異になるための必要十分条件である。例０の場合，すなわち，クンアー曲面の場合には，アーベル曲面 A が超特異であることと　クンアー曲面が単有理であることが同値であることは，Shioda[4] に示されている。

さて，体 k の標数 p が５以上であると仮定する。t を射影直線 $\mathbb{P}^1$ の座標とし，次のような２つのクラスの楕円曲面の Weierstraß モデルを考える。

(I)　$y^2 = 4x^3 - t^3(t-1)^3(t-\alpha)^3 x$,

(II)　$y^2 = 4x^3 - t^4(t-1)^5(t-\alpha)^5$.

ただし，α は体 k の任意の元である。t をパラメータとして，(I)(II) が定める非特異相対的極小楕円曲面を $\pi : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ と書く。ディスクリミナントの計算から，S は有理曲面にはならない。また，(I)(II) を函数体 $k(t)$ 上の楕円曲線と考えたもの

をE_tと書く。

定義4．楕円曲面$\pi : S \longrightarrow C$が底変換型単有理曲面であるとは，適当な曲線$C'$と正則写像$f : C' \longrightarrow C$があって，ファイバー積$S \times_C C'$が有理曲面になるものをいう。

このとき，曲線C，C'がどちらも有理曲線$\mathbb{P}^1$になることは容易にわかる。

注意．Kをk上の一変数代数函数体とする。K上の曲線Cの函数体$K(C)$は，k上のある曲面Xの函数体と考えうる。曲線Cの種数gが0のときには，Xは線織面に他ならない。$g \geqq 1$のときを考えよう。有限次代数拡大K'/Kに対して，曲線CをK'上の曲線と考えた時の函数体を$K'(C)$とすれば，$K'(C)$は再びk上の曲面の函数体と考えうる。そこで，$K'(C)$が有理函数体ならば，Xは単有理曲面となる。そこで，適当な有限次代数拡大K'/Kをとって，$K'(C)$が有理函数体になったと仮定する。$g = 1$の場合には，次の2つの場合が可能である。

1)　Kの拡大となる適当なk上の一変数有理函数体K'があって，$K'(C)$はk上の二変数有理函数体である。しかし，どのような拡大$\tilde{K}/K$に対しても，Cが$\tilde{K}$上有理曲線になることはない。

2)　Kの拡大となる適当なk上の一変数有理函数体$\tilde{K}$があ

って，C は $\bar{K}$ 上有理曲線になる。

2) の場合は，C が K 上有理点を持つという仮定の下に，Miyanishi [3] で研究されている。1) の場合が底変換型の楕円曲面に対応するもので，C が K 上有理点を持つという仮定の下に，Katsura [1] で研究されている。上記 (Ⅰ)(Ⅱ) にあらわれる楕円曲面は，後者の研究の際にあらわれる楕円曲面の部分類である。

定理 3．上記の記号を用いて，次の 6 条件は同値である。

(1) S は底変換型の単有理楕円曲面である。

(2) (Ⅰ)の場合 $p \equiv 3 \mod 4$，(Ⅱ)の場合 $p \equiv 2 \mod 3$.

(3) E_t は $k(t)$ 上の超特異楕円曲線である。

(4) S は超特異曲面である。

(5) S は Zariski 曲面である。

(6) S は単有理曲面である。

証明は，文献 [2] にある。

注意 1．定理 1 をみたすような群 G の分類はまだ未解決である。

注意 2．文献 [1] にある楕円曲面 $y^2 = 4x^3 - t^5(t-1)^5(t-\alpha)^5(t-\beta)^5(t-\gamma)^5$ について，定理 3（条件 (2) については (Ⅱ) の場合）が成立するかどうかも未解決である。

References

[1] T. Katsura, Unirational elliptic surfaces in characteristic p, forthcoming.

[2] T. Katsura, Generalized Kummer surfaces and unirational surfaces in characteristic p, forthcoming.

[3] M. Miyanishi, Unirational quasi-elliptic surfaces, Japan. J. Math., 3 (1977), 395-416.

[4] T. Shioda, Some results on unirationality of algebraic surfaces, Math. Ann., 230 (1977), 153-168.

[5] K. Ueno, Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces, Lecture Notes in Math., 439, Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1975.