数理解析研究所講究録
410巻 1980年 108-145

調和方程式としての Yang-Mills 方程式

名大・理　村瀬元彦

0. はじめに

研究集会では，上の題のもとに任意の向きづけられた compact Riemann 多様体 M 上に Yang-Mills 方程式の解を構成する試みについてお話しさせて戴いた．これは，その後存在定理として一応の解決を見た．即ち，具体的構成という点ではよく判らないものの，任意の M と，M 上の任意の主 $SU(2)$ 束 P_M を与えた時，P_M には Yang-Mills 方程式を満たす connection が存在することが判る．それは極めて幾何学的な話であり，いづれ幾何学の研究会等で紹介する機会があるので，ここで述べることはせずむしろ標題に直接従って，Yang-Mills 方程式の「調和性」がどのように現われてくるかを，いくつかの例をとって見ることにしたい．

1. 問題の由来

扱うのは $\mathbb{R}^4$ 上の Yang-Mills 方程式である．その形を

書いておこう．$(x_1, \cdots, x_4)$ を $\mathbb{R}^4$ の直交座標系とする．

$$A = \sum_{i=1}^{4} A_i \, dx_i \quad \in \quad su(2) \otimes \Lambda^1$$

を Lie 環 $su(2)$ に値を持つ $\mathbb{R}^4$ 上の 1-form とする．A についての2階非線型方程式

$$(1) \qquad d*\left(dA + \tfrac{1}{2}[A, A]\right) + \left[A, *\left(dA + \tfrac{1}{2}[A, A]\right)\right] = 0$$

を Yang-Mills 方程式という．ここで $[A, A]$ は，係数に関しては Lie 環の $[\,,\,]$ 積をとり，form の方は外積をとったものを示す．従ってともに反可換であることから 0 にはならず，

$$\tfrac{1}{2}[A, A] = \sum_{\mu<\nu} [A_\mu, A_\nu] \, dx_\mu \wedge dx_\nu$$

と計算される．

(1)は極めて扱いにくい．そこでもう少し易しい方程式になおすことを考えよう．まず

$$(2) \qquad d\left(dA + \tfrac{1}{2}[A, A]\right) + \left[A, dA + \tfrac{1}{2}[A, A]\right] = 0$$

なる恒等式がある．実際

(2)の左辺 $= \tfrac{1}{2}\left([dA, A] - [A, dA]\right) + [A, dA] + \tfrac{1}{2}[A, [A, A]]$

$= \frac{1}{2}[A,[A,A]]$，これは Jacobi律により$=0$となる．そこで，(1)のかわりに方程式

$$(3) \qquad *\left(dA + \frac{1}{2}[A,A]\right) = dA + \frac{1}{2}[A,A]$$

を考えよう．これを Self-Dual 方程式と呼ぶ．今度は1階の方程式である．(2)により (3)$\Longrightarrow$(1) となることに注意．

ここで，はじめに$\mathbb{R}^4$の直交座標をとったこと（従って$*$もまたEuclid的metricに関して定義されたHodge作用素であること）に注意したい．物理的背景を「少し」知っておられる方は$\mathbb{R}^4$ではなくてmetric $\begin{bmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{bmatrix}$ のMinkowski空間上で(1)や(3)を考えるべきではないか，と思われることであろう．確かにgauge場の理論に於けるoperatorと見たときのAが満たすべき方程式はMinkowski空間上の(1)である．しかしそのときのAはもはや有限個の函数から作られたものではなく，Hilbert空間の無限個のtensor積に作用するoperatorsの組なのである．従って(1)は無限連立方程式ということになる．そういうものを「解く」とは何かを意味することなのだろうか．しかし，少しでも量子化された場を扱おうとして，例えばFeynmanのpath integralを使うことにしたとすると，真

空から真空へのtransitionや場のoperatorsの真空期待値に，metricをpositive definiteに変えたLagrangeanが現われる．詳しい話は大変長いのでここでは述べられないが，結論を述べれば，普通のEuclid空間 $\mathbb{R}^4$ 上での(1)の古典解がすべて判れば，量子化出来たことになるのである．

Minkowski空間で $\mathfrak{su}(2)$ に値を持つ函数として(1)の解を求めても何にもなりはしない．量子化された場はもっと高級であって，そんな解で何かが判るようなシロモノではないのだ．もちろん，例えば重力場や電磁場のように，もし古典gauge場なるものがあるのなら，Minkowski空間上での話も意味を持つだろうが，そんなものありはしない．従って，少なくとも物理的には，(1)や(3)は $\mathbb{R}^4$ 上で考えてはじめて意味を持つのである．

量子論というのは無限連立方程式を扱う訳だから，path integralになおしてみても決して話が有限のところで終わる訳ではない．Minkowski空間上のSU(2)-gauge場の量子論は，3次元射影空間 $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ 上のrank 2のalgebraic vector束Eであって $c_1(E)=0$, $H^0(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, E)=0$ を満たすもののmoduli spaceをすべての $c_2(E)\in\mathbb{Z}_+$ に対して同時に決定することとほぼ同値である．(ここで $c_i(E)=E$ の第 i Chern

類.) $c_2 \in \mathbb{Z}_+$ を与えたときに $c_2 = c_2(E)$ となる上のような束の moduli space を $\mathcal{M}_{c_2}$ とでも書けば，局所有限次元多様体 $\mathcal{M} = \bigsqcup_{c_2=0}^{\infty} \mathcal{M}_{c_2}$ 上である函数をパラメタつきで定積分し，無限和の形で与えられる $\sum_{c_2=0}^{\infty} f_{c_2}$(パラメタ) を，パラメタについて解析的に表示して，はじめて量子化された問題に応用出来る，という具合である．(この無限和を有限和で近似することはほとんどナンセンスである．というのは，パラメタに関する解析的依存を知る必要があるから．)

(1)や(3)を $\mathbb{R}^4$ 上で扱うのは，hyperbolic だと難かしそうだから elliptic になおしてやった，などという理由によるのではなく，上のような積極的理由による．即ち物理への応用を目指したからに他ならぬ．だから，物理を「よく」知った人ならば「なぜ Minkowski space で(1)を解かないのか」とは言わないであろう．

近年では quarks の閉じこめを説明することが最大の話題とされており(7)，(1)や(3)の解が色々とりさたされた．今ではそれらが閉じこめにどれ程役立つのか疑問視されているようだが，しかし次のような話がある．

2次元 non-linear σ-model というのがあって，それが最近 path integral でほとんど exact に解けたというのであ

る．（筑波大の物理学者岩崎氏が解かれた．[0]）この場合には，2次元Minkowski空間をlatticeで近似し，Computor計算をすることで，金さえかければいくらでもよい精度で量子化された問題が解けるのである．岩崎氏が示されたのは，2次元Euclid空間$\mathbb{R}^2$上の古典解をすべて調べてpath integralを用いれば，Computorが出した結果を実際解析的にも出せる，ということである．この場合の古典解は（おおよそ）S^2からS^2へのharmonic mapにあたる．従って，$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$上のmeromorphic functionを用いることによってすべての古典解を表示することが出来る．こうして，この場合に量子論は解けてしまった．

従って，現実のquarksにどう応用出来るか，はとにかく，4次元Minkowski空間上の$SU(2)$-gauge modelというものを考えるならば，それは（先のσ-modelと同じように）(1)や(3)の古典解（instanton解）を用いてpath integralで解けてもおかしくはないであろう．さっきは1変数の有理型函数が出て来たが，それに対応するのが今度は$\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$上のalgebraic vector束なのである．しかし，代数幾何学に於てもmoduli spaceを具体的に決定するのはとてつもなく難しい仕事である．手にとるように判る例なんてほとんどない．また Drinfeld－Manin によってinstanton解はすべて求め

られたとは言っても，彼等の方法は群$SU(2)$をどんどん拡大して$SU(2c_2)$にしてゆくものなので，実際に$SU(2)$-解だけをとり出すのは容易でない．

だからこそ(1)をもっと解析的に扱うことを考えねばならないのである．都合のよいことに，Bourguignon-Lawson[1]によって(1)と(3)とは群が$SU(2)$（$SU(3)$でもよい）であればあまり差がないことが判っているので，(3)だけ考えればよいだろう．

そこで以下では(3)をくわしく見てゆくことにしよう．

2．球対称解

問題．(3)の球対称解をすべて決定せよ．

これはE. Witten [2]が扱っている．彼に従ってやってみよう．

球対称というのは，$\mathbb{R}^4$の直交座標$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, t)$に対し$SO(3)$を$(x_1, x_2, x_3)$に作用させたとき不変に保たれる，という意味である．従って球対称なconnectionの成分は$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$と$t$の函数になると期待される．具体

的な形をおめてみよう.

SO(3) の元を a で表わす. 以下記号を定める:

$$A = A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + A_3 dx_3 + A_4 dt$$

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \qquad dx = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

このとき $A = {}^t\mathbb{A} \cdot dx + A_4 dt$ と書かれる. a の $\mathbb{R}^3$ への作用により A は a^*A に変換される;

$$a^*A = {}^t\mathbb{A}(ax, t) \cdot d(ax) + A_4(ax, t)dt.$$

Connection が球対称ということは $a^*A = A$ を意味するものではない. Gauge 変換 (束自己同型) の自由度が残されている. g を $\mathbb{R}^4$ 上の SU(2)-valued 函数とするとき A の Gauge 変換 $g(A)$ は,

$$g(A) = g \cdot A \cdot g^{-1} - dg \cdot g^{-1}$$

で与えられる.

<u>定義</u>. Connection A が球対称

$$\Longleftrightarrow \quad \forall a \in SO(3) \ \exists g_a : \text{gauge 変換 s.th.}$$

$$a^*A = g_a(A).$$

直交変換 a は変数 x, t によらないので, g_a も constant にとれる. ここで, 局所同型 $SO(3) \approx SU(2)$ によって g_a を SO(3)-valued と思うことにしよう. ($\mathbb{R}^4$ 上の主束を考える限りはいつでも可能なことである.) 条件式は

$$a^*A = g_a \cdot A \cdot g_a^{-1} \qquad a,\ g_a \in SO(3)$$

となる.

$\mathfrak{so}(3)$ の base $\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3$ を

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} & & \\ & & 1 \\ & -1 & \end{bmatrix},\quad \tau_2 = \begin{bmatrix} & & -1 \\ & & \\ 1 & & \end{bmatrix},\quad \tau_3 = \begin{bmatrix} & 1 & \\ -1 & & \\ & & \end{bmatrix}.$$

で与える. この base によって $SO(3)$ の $\mathfrak{so}(3)$ での adjoint 表現を表わしたものは通常の3次表現と一致する; 即ち

$$a \in SO(3) \Rightarrow a \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{-1}\tau_1 a \\ a^{-1}\tau_2 a \\ a^{-1}\tau_3 a \end{bmatrix}.$$

$$A_\mu = {}^t\vec{A}_\mu \cdot \boldsymbol{\tau}, \qquad \vec{A}_\mu = \begin{bmatrix} A_\mu^1 \\ A_\mu^2 \\ A_\mu^3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}$$

と形式的に表わしておく.

$A = {}^tA \cdot dx + A_4 dt$ に対して

$$g_a(A) = {}^t\begin{bmatrix} {}^t\vec{A}_1 (g_a \boldsymbol{\tau} g_a^{-1}) \\ {}^t\vec{A}_2 (g_a \boldsymbol{\tau} g_a^{-1}) \\ {}^t\vec{A}_3 \cdot (g_a \boldsymbol{\tau} g_a^{-1}) \end{bmatrix} \cdot dx + {}^t\vec{A}_4 \cdot (g_a \boldsymbol{\tau} g_a^{-1})\, dt$$

$$= {}^t\begin{bmatrix} {}^t\vec{A}_1 \cdot g_a^{-1}\boldsymbol{\tau} \\ {}^t\vec{A}_2 \cdot g_a^{-1}\boldsymbol{\tau} \\ {}^t\vec{A}_3 \cdot g_a^{-1}\boldsymbol{\tau} \end{bmatrix} \cdot dx + {}^t\vec{A}_4 \cdot (g_a^{-1}\boldsymbol{\tau}) \cdot dt$$

となる. 一方 a^*A の方は,

$$a^*A = {}^tA(ax, t) \cdot d(ax) + A_4(ax, t)\, dt$$

$$= {}^t\begin{bmatrix} {}^t\vec{A}_1(ax,t)\cdot\mathbb{T} \\ {}^t\vec{A}_2(ax,t)\cdot\mathbb{T} \\ {}^t\vec{A}_3(ax,t)\cdot\mathbb{T} \end{bmatrix} a\cdot dx + {}^t\vec{A}_4(ax,t)\cdot\mathbb{T}\cdot dt$$

であるから,

$$a^*A = g_a(A)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} {}^t\begin{bmatrix} {}^t\vec{A}_1\cdot g_a^{-1}\mathbb{T} \\ {}^t\vec{A}_2\cdot g_a^{-1}\mathbb{T} \\ {}^t\vec{A}_3\cdot g_a^{-1}\mathbb{T} \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} {}^t\vec{A}_1(ax,t)\cdot\mathbb{T} \\ {}^t\vec{A}_2(ax,t)\cdot\mathbb{T} \\ {}^t\vec{A}_3(ax,t)\cdot\mathbb{T} \end{bmatrix} a \\ {}^t\vec{A}_4\cdot g_a^{-1} = {}^t\vec{A}_4(ax,t) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} {}^t a\cdot\begin{bmatrix} {}^t\vec{A}_1(ax,t) \\ {}^t\vec{A}_2(ax,t) \\ {}^t\vec{A}_3(ax,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^t\vec{A}_1(x,t) \\ {}^t\vec{A}_2(x,t) \\ {}^t\vec{A}_3(x,t) \end{bmatrix}\cdot g_a^{-1} \\ \vec{A}_4(ax,t) = g_a\vec{A}_4(x,t). \end{cases}$$

はじめに $\vec{A}_4(ax,t) = g_a\vec{A}_4(x,t)$ を調べてみよう.

$a_1, a_2 \in SO(3)$ に対し,

$$\begin{aligned} \vec{A}_4(a_1a_2x,t) &= g_{a_1}\cdot\vec{A}_4(a_2x,t) \\ &= g_{a_1}\cdot g_{a_2}\vec{A}_4(x,t) \end{aligned}$$

であるから, g は $SO(3)$ の3次表現を与えている. g が trivial 表現の場合を調べてみなければならないが, 易しいの

で省略する．それは $a^*A = A$ を意味し，結局 A に対応する curvature $F = dA + \frac{1}{2}[A, A]$ は恒等的に 0 になってしまう．従って gauge 変換ではじめから $A \equiv 0$ に出来てしまうので，つまらない．

そこで g が kernel を持たない場合をやってみよう．g_a は，$b \in O(3)$ によって $g_a = b^{-1} a b$ と表わされる．不変式をさがすのだから，$\vec{A}_4$ のかわりに $b\vec{A}_4$ をとればよく，結局 $g_a = a$ であるとして一般性を失なわない．

問題は，$\vec{A}_4(ax, t) = a\vec{A}_4(x, t)$ を満たす $\vec{A}_4$ をおめることになる．$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ とおく．$x \in \mathbb{R}^3$ に対し，

$ax = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ となる $a \in SO(3)$ をとろう．$\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ の stabilizer

$S \ (\cong SO(2))$ の元 b に対し，

$$\vec{A}_4(ax, t) = \vec{A}_4(b \cdot ax, t) = b\vec{A}_4(ax, t)$$

ゆえ，$\vec{A}_4\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t\right)$ は S で固定される．従って

$$\vec{A}_4\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t\right) = \begin{bmatrix} A_0(r, t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ と表わされる．

$a\vec{A}_4(x, t) = \begin{bmatrix} A_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $ax = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とを合わせて，

$$\boxed{\vec{A}_4(x, t) = \frac{1}{r} A_0(r, t) \cdot x}$$ を得る．

次に $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3$ を調べよう．以下変数 t は省略する．

$$\left[A_i{}^j(x) \right]_{ij} = \begin{bmatrix} {}^t\vec{A}_1(x) \\ {}^t\vec{A}_2(x) \\ {}^t\vec{A}_3(x) \end{bmatrix} = M(x)$$ とおく．

$g_a = b^{-1} a b$ であることを調べておいたが，余計な b は実は $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \vec{A}_4$ を一斉に $b\vec{A}_i$ $(i=1,2,3,4)$ にすることを意味するので本質的ではない．そこで，$\vec{A}_4$ を決定した時と同様 $g_a = a$ としてよい．条件式は $\forall a \in SO(3)$ に対し ${}^t a M(ax) a = M(x)$ である．

前と同様に $x \in \mathbb{R}^3$ に対し $ax = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ となる a をとっておく．${}^t a M\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) a = M(x)$．

$S \cong SO(2) \subset SO(3)$ の同型を決めて，

$S \ni b = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right] \in SO(3)$ のように表わせば，

$$M\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \left[\begin{array}{c|c} m & {}^t n \\ \hline n & N \end{array}\right]$$ とおいて

$$\begin{aligned} M\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= M\left(b\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = b M\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right){}^t b \\ &= \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} m & {}^t n \\ \hline n & N \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & {}^t b \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} m & {}^t n\, {}^t b \\ \hline bn & bN\,{}^t b \end{array}\right]. \end{aligned}$$

従って　$n = 0$,　$bN{}^{t}b = N$　となる．$b \in SO(2)$ だから，結局

$$M\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t\right) = \left[\begin{array}{c|cc} m(r,t) & 0 & 0 \\ \hline 0 & \varphi(r,t) & \psi(r,t) \\ 0 & -\psi(r,t) & \varphi(r,t) \end{array}\right].$$

$a x = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$　なる a として，例えば

$$a = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{r} & \frac{x_2}{r} & \frac{x_3}{r} \\ -\frac{s}{r} & \frac{x_1 x_2}{r s} & \frac{x_1 x_3}{r s} \\ 0 & -\frac{x_3}{s} & \frac{x_2}{s} \end{bmatrix} \qquad s = \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$$

をとれば，

$M(x) = {}^{t}a \cdot M\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \cdot a$　によって $M(x)$ が計算される；

$$\boxed{M(x) = \frac{m}{r^2}\, x \cdot {}^{t}x + \frac{1}{r^2}\left(r^2 I - x \cdot {}^{t}x\right)\varphi + \frac{\psi}{r}\, {}^{t}x \cdot \tau}$$

但し　$I = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$,　${}^{t}x \cdot \tau = x_1 \tau_1 + x_2 \tau_2 + x_3 \tau_3$．

以上をまとめて，

$$(4)\quad \boxed{\begin{aligned} A_1 &= \left(\frac{x_1^2}{r^2} m + \frac{r^2 - x_1^2}{r^2}\varphi\right)\tau_1 + \left(\frac{x_1 x_2}{r^2} m - \frac{x_1 x_2}{r^2}\varphi + \frac{x_3}{r}\psi\right)\tau_2 + \left(\frac{x_1 x_3}{r^2} m - \frac{x_1 x_3}{r^2}\varphi - \frac{x_2}{r}\psi\right)\tau_3 \\ A_2 &= \left(\frac{x_1 x_2}{r^2} m - \frac{x_1 x_2}{r^2}\varphi - \frac{x_3}{r}\psi\right)\tau_1 + \left(\frac{x_2^2}{r^2} m + \frac{r^2 - x_2^2}{r^2}\varphi\right)\tau_2 + \left(\frac{x_2 x_3}{r^2} m - \frac{x_2 x_3}{r^2}\varphi + \frac{x_1}{r}\psi\right)\tau_3 \\ A_3 &= \left(\frac{x_1 x_3}{r^2} m - \frac{x_1 x_3}{r^2}\varphi + \frac{x_2}{r}\psi\right)\tau_1 + \left(\frac{x_2 x_3}{r^2} m - \frac{x_2 x_3}{r^2}\varphi - \frac{x_1}{r}\psi\right)\tau_2 + \left(\frac{x_3^2}{r^2} m + \frac{r^2 - x_3^2}{r^2}\varphi\right)\tau_3 \\ A_4 &= \frac{x_1}{r} A_0 \tau_1 + \frac{x_2}{r} A_0 \tau_2 + \frac{x_3}{r} A_0 \tau_3 \end{aligned}}.$$

これが $a^*A = g_a(A)$ を満たす 1-form $A = \sum_{i=1}^{4} A_i dx_i$ の一般式である.

この形のもとで方程式(3)を扱う為に，曲率形式

$dA + \frac{1}{2}[A, A] = F$ をもとめておこう. F も Lie 環 $\mathfrak{so}(3)$ に値を持つ 2-form なので，

$$\begin{cases} F = \sum_{\mu<\nu} F_{\mu\nu}\, dx_\mu \wedge dx_\nu \\ \\ F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^1 \tau_1 + F_{\mu\nu}^2 \tau_2 + F_{\mu\nu}^3 \tau_3 \end{cases}$$

と表わす. 定義に従って計算してゆくと，

$$\boxed{(5)\quad \begin{bmatrix} F_{14}^1 & F_{14}^2 & F_{14}^3 \\ F_{24}^1 & F_{24}^2 & F_{24}^3 \\ F_{34}^1 & F_{34}^2 & F_{34}^3 \end{bmatrix} = \frac{x\cdot{}^t x}{r^2}(A_0' - \dot{m}) + \frac{r^2 I - x\cdot{}^t x}{r^2}\left(\frac{A_0}{r} - \dot{\varphi} - A_0\psi\right) + \frac{{}^t x\cdot\tau}{r}(-\dot{\psi} + A_0\varphi)}$$

$$\boxed{(6)\quad \begin{bmatrix} F_{23}^1 & F_{23}^2 & F_{23}^3 \\ -F_{13}^1 & -F_{13}^2 & -F_{13}^3 \\ F_{12}^1 & F_{12}^2 & F_{12}^3 \end{bmatrix} = \frac{I}{r}\psi + \frac{r^2 I - x\cdot{}^t x}{r^2}(\psi' - m\varphi) + \frac{x\cdot{}^t x}{r^2}\left(\frac{\psi}{r} - \varphi^2 - \psi^2\right) - \frac{{}^t x\cdot\tau}{r}(\varphi' + m\psi) + \frac{{}^t x\cdot\tau}{r^2}(m - \varphi)}$$

であることが判る. 但し $\frac{\partial}{\partial r}$ を $'$ で表わし，$\frac{\partial}{\partial t}$ を $\dot{}$ で示した.

(即ち $\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \varphi'$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \dot{\varphi}$, etc.)

Self-dual 方程式(3) は，3行3列の matrix として (5) と (6) とが等しいことを意味している．即ち (4) の仮定のもとに

$$(3) \iff (5) = (6).$$

その式を簡単な形で表わす為に

$$\begin{cases} A_0(r,t) = B_t(r,t) \\ m(r,t) = B_r(r,t) \\ \varphi(r,t) = \frac{1}{r}\varphi_0(r,t) \\ \psi(r,t) = \frac{1}{r}\varphi_1(r,t) + \frac{1}{r} \end{cases}$$

と書きかえておくと，方程式は

$$(7) \quad \boxed{\begin{aligned} \partial_r\varphi_0 - \partial_t\varphi_1 &= -(B_r\varphi_1 + B_t\varphi_0) \\ \partial_r\varphi_1 + \partial_t\varphi_0 &= B_r\varphi_0 - B_t\varphi_1 \\ \partial_r B_t - \partial_t B_r &= \frac{1}{r^2}(1 - \varphi_0^2 - \varphi_1^2) \end{aligned}}$$

となる．r は $\{ s \in \mathbb{R}^1 \mid s > 0 \} = \mathbb{R}^1_+$ を動く変数だが，形式的に $\mathbb{R}^1$ の変数と見，$\mathbb{R}^2$ の volume element を $dr\,dt$ と思って $\begin{cases} * dr = dt \\ * dt = -dr \end{cases}$，$*^2 = -1$ によって2次元の $*$ を定めるなら，(7) は微分形式を用いて次のように表わされる；

$$\begin{cases} B = B_r\,dr + B_t\,dt \\ \varphi = \varphi_1\,dr + \varphi_0\,dt \end{cases} \qquad v = dr \wedge dt$$

$$(8) \qquad \boxed{\begin{aligned} d\varphi &= *B \wedge \varphi \\ d*\varphi &= *B \wedge *\varphi \\ dB &= \frac{1}{r^2}(v - \varphi \wedge *\varphi). \end{aligned}}$$

かくして，球対称の場合には方程式(3)は4つの2変数未知函数に対する3つの方程式(7)に帰着されることが判った．ところで，(3)はもともとgauge変換不変であったから，(7)にはなお(r,t)空間上の3函数分の不定性が残っている．

まずその1つ分をへらす為に条件

$$d*B = 0$$

を課す．このとき　$\beta = \beta(r,t)$　によって

$$*B = d\beta$$

と表わされる．

$$\chi = \chi_1\,dr + \chi_0\,dt$$

によって

$$\varphi = e^{\beta}\cdot\chi$$

とおくと，(8)のはじめの2式からB（即ちβ）を消去することが出来て，

$$(9) \qquad d\chi = 0 \ , \quad d*\chi = 0 \ .$$

$$\begin{cases} z = r + it \\ f(z) = \chi_1(r,t) - i\chi_0(r,t) \end{cases}$$

とおく．このとき，

$$\chi + i*\chi = f(z)\,dz \ .$$

従って

(9)より $d(\chi + i*\chi) = d(f\,dz) = 0$，即ち

$$(10) \qquad \bar\partial f(z) = 0$$

が判る．

最後に，(8)の第3式から φ を消去する為に

$$\beta = \log r - \frac{1}{2}\log f\cdot\bar f + \rho$$

とおく．方程式は

$$d(-**B) = \frac{1}{r^2}(v - \varphi\wedge*\varphi)$$

$$\Longleftrightarrow \ -d*d\beta = \frac{1}{r^2}(v - e^{2\beta}\chi\wedge*\chi) \ .$$

左辺は，

$$\begin{aligned} -d*d\beta &= -2i\partial\bar\partial\beta \\ &= -2i\partial\bar\partial\left(\log r - \frac{1}{2}\log f\bar f + \rho\right) \\ &= \frac{1}{r^2}v - \Delta\rho\cdot v \end{aligned}$$

となる．但し $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$，また $\partial\bar\partial\log f\cdot\bar f = 0$ を用いた．右辺は

$$\frac{1}{r^2}\left(v - e^{2\log r} e^{-\log f\bar{f}} e^{2\rho} \cdot f \cdot \bar{f}\, v\right)$$

$$= \frac{v}{r^2} - \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \cdot \frac{1}{f\bar{f}} \cdot e^{2\rho} \cdot f \cdot \bar{f} \cdot v$$

$= \frac{v}{r^2} - e^{2\rho} \cdot v$. であるから，結局

(11) $$\boxed{\Delta\rho = e^{2\rho}} \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

になおってしまう．つまり，1つの2変数函数についての単独方程式になる訳である．これはちょうどはじめのgauge変換の自由度を消したことにあたる．なぜなら，(8)をβとfとで表わした式は

(8)$'$ $$\bar{\partial} f = 0, \quad -\Delta\beta = \frac{1}{r^2}\left(1 - e^{2\beta} \cdot f \cdot \bar{f}\right)$$

であるが，この方程式は $r>0$ で0点を持たない正則函数 h によって

$$\begin{cases} f \longmapsto f \cdot h \\ \beta \longmapsto \beta - \frac{1}{2}\log h \cdot \bar{h} \end{cases}$$

と変換しても不変である．

従って，上で行なったことは，f自体をgauge変換と思い，$f \equiv 1$ に固定することで (8)$'$ から $\Delta\beta = e^{2\beta}$ を出した，とも考えられる．いづれにせよこうしてgaugeを固定して，もはや余計な自由度のない方程式にしたものが(11)

である．(11) の形によって，「調和方程式としての Yang-Mills 方程式」たるゆえんが判るであろう．以上で，

定理

Self-dual 方程式の球対称解をもとめる問題，

$\Longleftrightarrow$ Liouville 方程式 $\Delta\rho = e^{2\rho}$ $\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)$ を解くこと．

が判る．

方程式 (3) の古典解をさがす場合は，$F = dA + \frac{1}{2}[A, A]$ の norm を有限にする，という条件でさがすので（しかもちろん $\mathbb{R}^4$ で non-singular なものを扱う），(11) を解く場合でも特異点や増大度の条件をつけねばならない．例えば，ρ は $r>0$ に特異点を持ってはならない，等．

(11) の一般解法は知られているので，これで§3．の問題は完全に解決する．

4 変数の Yang-Mills 方程式では難かしいので，2 変数にして調べてみる為に球対称，という条件をおいたのである．もちろん 2 次元 Yang-Mills 方程式というのもあることはあるが，それはあまりに易くて解析的な性質を色々調べられるような豊さを持っていない．だから 4 次元で他の条件をおいて調べてみた訳である．

4. 't Hooft 解 —— 即ち「向き」のそろった解.

ここでも $\mathbb{R}^4$ 上の解を考える. 記号を定めておこう.

$$
\begin{cases}
\Lambda^1 = \mathbb{R}^4 \text{ 上の 1-forms の空間.} \\
\Lambda^2 = \mathbb{R}^4 \text{ 上の 2-forms の空間} \\
\{e_1, e_2, e_3, e_4\} = \Lambda^1 \text{ の orthonormal base} \\
* : \Lambda^2 \longrightarrow \Lambda^2 \quad \text{Hodge star operator} \\
\Lambda^2_{\pm} = * \text{ の固有値} \pm 1 \text{ に属する固有空間.}
\end{cases}
$$

記号 s.s. で skew-symmetric を表わすことにして,

$$\Lambda^2 \underset{def}{=} \mathrm{Hom}_{s.s}(\Lambda^{1*} \otimes \Lambda^{1*}, \mathbb{R}) \cong \Lambda^1 \underset{s.s.}{\otimes} \Lambda^1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{metric による}}}{\cong} \Lambda^{1*} \underset{s.s.}{\otimes} \Lambda^1 \cong \mathrm{Hom}_{s.s.}(\Lambda^1, \Lambda^1).$$

ここで, $\mathbb{R}^4$ の直交計量によって $\Lambda^1 \cong \Lambda^{1*}$ なる同型を固定し, 用いた.

$\mathrm{Hom}_{s.s.}(\Lambda^1, \Lambda^1) \cong \mathfrak{so}(4)$ であるから, $\Lambda^2 \cong \mathfrak{so}(4)$ であることが判る. この同型を base で表現しておこう:

$$
e_1 \wedge e_2 = \left[\begin{array}{cc|cc} & 1 & & \\ -1 & & & \\ \hline & & & \\ & & & \end{array}\right]
\qquad
e_3 \wedge e_4 = \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & & \\ \hline & & & -1 \\ & & 1 & \end{array}\right]
$$

$$
e_1 \wedge e_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & \\ \hline -1 & & & \\ & & & \end{array}\right]
\qquad
e_2 \wedge e_4 = \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & & -1 \\ \hline & & & \\ & 1 & & \end{array}\right]
$$

$$
e_1 \wedge e_4 = \left[\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & & \\ \hline & & & \\ -1 & & & \end{array}\right]
\qquad
e_2 \wedge e_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} & & & \\ & & -1 & \\ \hline & 1 & & \\ & & & \end{array}\right].
$$

$\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ である．おのおのの base を与えておく：

$$
\Lambda^2_+ : \begin{cases}
e_1\wedge e_2 + e_3\wedge e_4 = \left[\begin{array}{cc|cc} & 1 & & \\ -1 & & & \\ \hline & & & -1 \\ & & 1 & \end{array}\right] = 2\sigma_1 \\[2ex]
e_1\wedge e_3 - e_2\wedge e_4 = \left[\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline -1 & & & \\ & -1 & & \end{array}\right] = 2\sigma_2 \\[2ex]
e_1\wedge e_4 + e_2\wedge e_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & -1 & \\ \hline & 1 & & \\ -1 & & & \end{array}\right] = 2\sigma_3
\end{cases}
$$

$[\sigma_1, \sigma_2] = \sigma_3$
cyclic.

$$
\Lambda^2_- : \begin{cases}
e_1\wedge e_2 - e_3\wedge e_4 = \left[\begin{array}{cc|cc} & 1 & & \\ -1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & -1 & \end{array}\right] = 2\tau_1 \\[2ex]
e_1\wedge e_3 + e_2\wedge e_4 = \left[\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & -1 \\ \hline -1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right] = 2\tau_2 \\[2ex]
-e_1\wedge e_4 + e_2\wedge e_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} & & & -1 \\ & & -1 & \\ \hline & 1 & & \\ 1 & & & \end{array}\right] = 2\tau_3 .
\end{cases}
$$

$[\tau_1, \tau_2] = \tau_3$
cyclic.

Λ^2_+, Λ^2_- はおのおの $\mathfrak{so}(3)$ に同型である．特に Λ^2_+ の方は，

$$
\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc|cc} & 1 & & \\ -1 & & & \\ \hline & & & -1 \\ & & 1 & \end{array}\right] \longleftrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & \\ & -i \end{bmatrix}, \quad
\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline -1 & & & \\ & -1 & & \end{array}\right] \longleftrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} & 1 \\ -1 & \end{bmatrix}, \quad
\frac{1}{2}\left[\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & -1 & \\ \hline & 1 & & \\ -1 & & & \end{array}\right] \longleftrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} & i \\ i & \end{bmatrix}
$$

によって $\mathfrak{su}(2)$ との同型を定めることが出来る．これらは，

$\mathfrak{so}(4) \cong \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$，　$\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$　なる Lie 環の同型を base で表示したものである．

以上の準備のもとで，Yang-Mills 方程式（特に，(3)の符号を一にした anti-self-dual 方程式 (-3)：$*(dA+\frac{1}{2}[A,A])+dA+\frac{1}{2}[A,A]=0$）を解いてみよう．2-form f に対し，$(f)_+$ で Λ^2_+-成分をとることを示す．従って $\Lambda^2 \ni f \longmapsto (f)_+ \in \mathfrak{so}(3)$ である．

$$(12) \qquad A = \sum_{\mu=1}^{4} e_\mu \otimes (e_\mu \wedge a)_+ \quad , \quad a \in \Lambda^1.$$

上の形に表わされる A は $\Lambda^1 \otimes \mathfrak{so}(3)$ の元である．(12)のような形の解をもとめよう，という訳だが，ひとつ注意しておこう．

Atiyah-Singer により (3)（あるいはその符号をかえた (-3)）の解は，instanton number k に対し $8k-3$ 次元あることが判っている．（Instanton number の定義については，例えば [3] 参照．）これは，直観的には次のように理解し得る；

1°. Instanton の場所を与えるのに $4k$ 次元．

2°. Instanton の大きさを与えるのに k 次元．

3°. 各点での Instanton の方向を与えるのに $3k$ 次元．
（なぜなら A は 3次元 Lie 環に値を持つ．）

4°. すべての Instanton を一斉にまわす自由度が -3 次元．

合計して instanton の configuration は $8k-3$ 次元．

方程式は非線型だから，足し上げることが正しいかどうか問題点なしとはしないが，Atiyah-Singer index theorem にした所で

線型近似をして次元を出している訳だから，と思って目をつぶる．すると，次のような思いが心にうかぶ；

『 R^4 上の $so(3)$－値函数 ρ に対する方程式（系） $L(\rho)=0$ が存在して，$L(\rho)=0$ の解と (3) or (-3) との解が1対1に対応するのではないか？ 』

現在のところこのような方程式系は知られていない．しかしそれが見つかれば大変重要になるであろう．おそらくは，

$\Delta \rho = F(\rho)$ という形で見つかるだろうと思われる．

一般のままではよく判らないので，instantons の向きがすべてそろっている場合に調べてみよう．この場合には ρ は実数値函数と思ってよい．

という訳で，(12) から出発しようというのである．従って，すべての解が (12) の形で書ける訳ではない．はじめから向きがそろったものに限ってしまっているから．しかしそれでも (12) の形で5次元の解をつくることは期待出来る．

$so(3)$ の base σ_i を用いて (12) を書き直しておく：

$$
(12')\quad \left\{\begin{aligned}
A = {}& dx_1 \otimes (a_2\sigma_1 + a_3\sigma_2 + a_4\sigma_3)\\
&+ dx_2 \otimes (-a_1\sigma_1 - a_4\sigma_2 + a_3\sigma_3)\\
&+ dx_3 \otimes (a_4\sigma_1 - a_1\sigma_2 - a_2\sigma_3)\\
&+ dx_4 \otimes (-a_3\sigma_1 + a_2\sigma_2 - a_1\sigma_3)\\
a = {}& a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3 + a_4dx_4 \in \Lambda^1
\end{aligned}\right.
$$

$$F = dA + \tfrac{1}{2}[A, A]$$ に対し

(−3) $$*F = -F$$

としたが，(12′) の形の A に対しては，(−3) は次の式と同値；

(13) $$\begin{cases} d*a = a \wedge *a \\ da = *da. \end{cases}$$

ここで，さっきの ρ を

$$a = -d\log\rho$$

という形で入れてみよう．すると，$da = 0$ となるから，方程式は単独になり

$$\begin{aligned} 0 &= d*a - a\wedge *a \\ &= -d*d\log\rho - d\log\rho \wedge *d\log\rho \\ &= -d\left(\frac{*d\rho}{\rho}\right) - \frac{d\rho\wedge *d\rho}{\rho^2} \\ &= -\frac{1}{\rho}\, d*d\rho, \end{aligned}$$ 即ち

(14) $$\boxed{\rho \text{ の pole 以外で } \quad \Delta\rho = 0, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{4}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.}$$

となる．5k 次元の解はすぐに作られて，

$$\begin{cases} \rho = 1 + \dfrac{\lambda^{(1)}}{(x-y^{(1)})^2} + \cdots + \dfrac{\lambda^{(k)}}{(x-y^{(k)})^2}. \\ \lambda^{(1)}, \cdots, \lambda^{(k)} > 0, \quad y^{(1)}, \cdots, y^{(k)} \in \mathbb{R}^4, \quad (x-y)^2 = \sum_{i=1}^{4}(x_i - y_i)^2 \end{cases}$$

とすればよい．$y^{(j)}$ が場所，$\lambda^{(j)}$ が大きさを表わしている．

さて，ここでも調和方程式（文字通りの！）に遭遇した．この場合問題となるのは $\frac{1}{x^2}$ type の特異点をどうするか，ということである．F の norm を計算すると，ちゃんと収束するので特異点があっても問題ない，という立場もあろうし，また各特異点のまわりで gauge 変換して，ちゃんと非特異に出来るからよい，という正当化もあろう．ついでにいえば，A が連続になるように gauge 変換するのは易しい．その gauge 変換が S^4 上の $c_2 = k$ なる $\mathbb{C}^2$-vector 束を定めるのである．だがここでは幾何の話には深入りしない．

(12) の形には盛り込めなかった instanton の方向をどうとらえるか．これが今後の課題である．

最も易しい 1-instanton solution を考えてみよう．それは，$\rho = 1 + \frac{1}{x^2}$，$x^2 = x_1^2 + \cdots + x_4^2$ で与えられる．(12′) に代入すべき a_μ は，

$$a_\mu = 2\frac{x_\mu}{x^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} = 2\frac{x_\mu}{x^2} - 2x_\mu + 2x_\mu \cdot x^2 - \cdots$$

である．ところで，$\rho_0 = \frac{1}{x^2}$ のときには $a^0_\mu = \frac{2x_\mu}{x^2}$ であり，この 1-instanton solution の特異部分と一致しているが，ρ_0 から作った connection を A_0 とすると，$F_0 \underset{\mathrm{def}}{=} dA_0 + \frac{1}{2}[A_0, A_0]$ は恒等的に 0 になることが判る．従って，g を

$$dg + A_0 g = 0$$

の解であるような SU(2) − 値函数とすれば, gauge 変換 g^{-1} をほどこした ($\rho = 1 + \frac{1}{x^2}$ に対応する 1-instanton) A の主要部は 0 になる. 実際 $(g^{-1})^* A = A_1 +$ real analytic, $A_1 = \frac{x\text{の3次式}}{x^2}$, かつ A_1 は原点で連続, という形になる.

もちろん完全に real analytic な表示も可能で, 例えば

$$
\begin{aligned}
A = \ & dx_1 \otimes \frac{2}{1+x^2}\left(-x_2\sigma_1 - x_3\sigma_2 - x_4\sigma_3\right)\\
& + dx_2 \otimes \frac{2}{1+x^2}\left(x_1\sigma_1 - x_4\sigma_2 + x_3\sigma_3\right)\\
& + dx_3 \otimes \frac{2}{1+x^2}\left(x_4\sigma_1 + x_1\sigma_2 - x_2\sigma_3\right)\\
& + dx_4 \otimes \frac{2}{1+x^2}\left(-x_3\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_1\sigma_3\right)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

は (−3) を満たす 1-instanton solution である. こういう表示をとった場合に $dx_\mu \otimes \sigma_i$ の係数として出て来ているのは, $d\log\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ の係数である. この $\frac{1}{1+x^2}$ はもはや調和函数ではないが,

$$\Delta\varphi = -8\varphi^3$$

の解である. この方程式は特徴的なものなので, 少しその origin をさぐってみたい.

5. φ^4 − model とは関係するのか?

実のところ計算が十分進んでいないので, 答はよく判らない. F. Wilczek は関係あり, と言うが [4], どうも [4]

で言ってることはサッパリ判らぬ.

さて, massless φ^4-model というのは, Lagrangean が

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\, d\varphi \wedge * d\varphi - \frac{c}{4}\varphi^4 * 1$$

で与えられる場の model である. 但し例によって $\mathcal{L}$ は Euclid 空間で考えている. Euler-Lagrange 方程式は

(16) $$\boxed{\Delta\varphi = -c\,\varphi^3}$$

である. 上の $\mathcal{L}$ が表わしているのは自分自身と相互作用する質量のない最も簡単な場である. Gauge 場も自分自身と相互作用する massless 粒子であるが, φ^4 に比べればはるかにむづかしい. しかしそれでも尚, Euclidian field では両者はつながっているのではないか, と思われるフシがある.

(15) 式に現われた $\frac{1}{1+x^2}$ を思い出そう. これは一体何か? それは, $\mathbb{R}^4$ を 1 点 compact 化して S^4 にするときに, metric にかかってくる係数である. 即ち $\mathbb{R}^4$ の conformal 変換なのである. そして, conformal 変換は確かに φ^4-model と関係を持っている.

命題

Flat metric を, 函数 φ^2 で conformal に変えたとき, 新しい metric が constant scalar curvature を持つ為の必要十分条件は, (4次元では) (16) 式で与えられる.

Riemann 幾何について少し記号を復習しておこう．

$$g_{ij} = \text{Riemann metric}, \qquad g^{ij} = (g_{ij})^{-1}_{ij}$$

$$\Gamma^k_{ij} : \sum_{l=1}^{4} g_{lk}\Gamma^l_{ji} = \frac{1}{2}(\partial_j g_{ki} + \partial_i g_{jk} - \partial_k g_{ij}) \text{ で定める}$$

$$R^i_{jkl} = \partial_k \Gamma^i_{lj} - \partial_l \Gamma^i_{kj} + \sum_{m=1}^{4}(\Gamma^m_{lj}\Gamma^i_{km} - \Gamma^m_{kj}\Gamma^i_{lm})$$

$$R_{ijkl} = \sum_{m=1}^{4} g_{im} R^m{}_{jkl}$$

$$R_{jl} = \sum_{i,k} g^{ik} R_{ijkl}$$

$$R = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij}$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{etc.}$$

このRのことを scalar curvature と呼ぶ．証明したいことは，「$g_{ij} = \varphi^2 \delta_{ij}$ のとき，$R = \text{const} \Longleftrightarrow (16)$」である．とにかくRを φ で書いてみよう．

$$R = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij} = \frac{1}{\varphi^2}\sum_{i,j}\delta^{ij}R_{ij} = \frac{1}{\varphi^2}\sum_i R_{ii}$$

$$= \frac{1}{\varphi^2}\sum_i\Big(\sum_{k,l} g^{kl} R_{kili}\Big)$$

$$= \frac{1}{\varphi^2}\sum_i \frac{1}{\varphi^2}\sum_{kl}\delta^{kl} R_{kili}$$

$$= \frac{1}{\varphi^4}\sum_{i,j} R_{ijij}$$

$$\Gamma^k_{ji} = \frac{1}{\varphi}(\partial_j\varphi\cdot\delta_{ki} + \partial_i\varphi\cdot\delta_{jk} - \partial_k\varphi\cdot\delta_{ij})$$

$$R_{ijij} = \varphi^2 R^i{}_{jij}$$

$$R^i_{jij} = \partial_i \Gamma^i_{jj} - \partial_j \Gamma^i_{ij} + \sum_m (\Gamma^m_{jj}\Gamma^i_{im} - \Gamma^m_{ij}\Gamma^i_{jm})$$

代入して計算すると

$$R_{ijij} = 2\varphi \cdot \partial_i \partial_j \varphi \cdot \delta_{ij} - \varphi(\partial_i^2 \varphi + \partial_j^2 \varphi) - 4(\partial_i \varphi)(\partial_j \varphi)\delta_{ij}$$
$$+ 2(\partial_i \varphi)^2 + 2(\partial_j \varphi)^2 - L + L \cdot \delta_{ij}$$

但し $L = \sum_{m=1}^{4} (\partial_m \varphi)^2$.

従って,

$$R = \frac{1}{\varphi^4} \sum_{i,j} R_{ijij}$$
$$= \frac{1}{\varphi^4} \sum_i \Big(2\varphi\, \partial_i^2 \varphi - 4\varphi\, \partial_i^2 \varphi - \varphi \Delta \varphi - 4(\partial_i \varphi)^2$$
$$+ 8(\partial_i \varphi)^2 + 2L - 4L + L \Big)$$
$$= \frac{1}{\varphi^4} \sum_i \Big(-2\varphi\, \partial_i^2 \varphi - \varphi \Delta \varphi + 4(\partial_i \varphi)^2 - L \Big)$$
$$= \frac{1}{\varphi^4} \big(-2\varphi \Delta \varphi - 4\varphi \Delta \varphi + 4L - 4L \big)$$
$$= -\frac{6}{\varphi^3} \Delta \varphi .$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{R = \text{constant} \iff \Delta \varphi = -\frac{R}{6} \varphi^3 .}}$$

もし sectional curvature k が constant なら,

$$R_{ijkl} = k(g_{ik} g_{jl} - g_{jk} g_{li}) ,$$
$$R_{ijij} = \varphi^4 k (1 - \delta_{ij})$$
$$R = k \sum_{i,j} (1 - \delta_{ij})$$
$$= 12k$$

により, $\underline{\Delta \varphi = -2k \cdot \varphi^3}$ となる.

こうして (16) は Riemann 幾何学に関係した方程式であることが判った．そこで，次に Riemann 幾何に於ける instanton を考えてみよう．

これまでと同様に conformally flat space を考える．従って metric は

(17) $$\boxed{g_{\mu\nu} = \rho^2 \delta_{\mu\nu}}$$

で与えておく．（以下都合により φ のかわりに ρ とかく．）

Riemann curvature R_{ijkl} は，i, j については 2-form の係数であり，k, l については反対称になっているので，

$$\sum_{i<j} \left[R_{ijkl}\, dx_i \wedge dx_j \right]_{kl}$$

は $\mathfrak{so}(4)$-値 2-form になる．そこで，考えている空間上の SO(4)-gauge field theory を展開してみよう．まず，gauge field $F \in \Lambda^2 \otimes \mathfrak{so}(4)$ を

(18) $$\boxed{F_{ijkl} = \frac{1}{\rho^2} R_{ijkl}}$$

によって定義する．もちろん

$$F \underset{\mathrm{def.}}{=} \left[\sum_{i<j} F_{ijkl}\, dx_i \wedge dx_j \right]_{kl}.$$

このとき，構造方程式　$F = dA + \frac{1}{2}[A, A]$　を解いて connection A を作ることが出来る．(17) の仮定のもとで A と F との具体的な形を与えておこう．

$$A \underset{\text{def}}{=} \Big[\sum_{\mu} A_{\mu ab}\, dx_{\mu} \Big]_{ab} \in \Lambda^1 \otimes \mathfrak{so}(4)$$

とするとき，

(19) $$\boxed{A_{\mu ab} = -\frac{1}{\rho}\left(\partial_a\rho \cdot \delta_{\mu b} - \partial_b \rho \cdot \delta_{\mu a} \right)}$$

(20) $$\boxed{\begin{aligned} &F_{\mu\nu ab} \\ &= \frac{2}{\rho^2}\big(\partial_a\rho \cdot \partial_\mu\rho \cdot \delta_{\nu b} - \partial_b\rho \cdot \partial_\mu\rho \cdot \delta_{\nu a} - \partial_a\rho\, \partial_\nu\rho\, \delta_{\mu b} \\ &\qquad\qquad + \partial_b\rho \cdot \partial_\nu\rho \cdot \delta_{\mu a} \big) \\ &\quad + \frac{1}{\rho}\big(-\partial_a \partial_\mu \rho \cdot \delta_{b\nu} + \partial_b \partial_\mu \rho \cdot \delta_{a\nu} \\ &\qquad\qquad + \partial_a \partial_\nu \rho \cdot \delta_{b\mu} - \partial_b \partial_\nu \rho \cdot \delta_{a\mu} \big) \\ &\quad + \frac{L}{\rho^2}\left(\delta_{\nu a}\delta_{\mu b} - \delta_{\nu b}\delta_{\mu a} \right). \quad \text{但し } L = \sum_c (\partial_c \rho)^2. \end{aligned}}$$

先程(18)式で Riemann curvature を改めて gauge field と思ったが，その時次のことが成り立つ：

> **定理** (17), (18) の仮定のもとに，
>
> Scalar curvature R = constant
>
> $\Longleftrightarrow$ Gauge field F が Yang-Mills 方程式(1)を満たす.

この定理も，今のところなぜそうなるのかよく判らないが，

証明は計算すれば出来る．みてゆこう．

まず，$R = \text{constant} \iff \Delta\rho = -C\rho^3$ を前に証明しておいた．そこで次に

$$d*F + [A, *F] = 0 \iff \Delta\rho = -C\rho^3$$

を証明しよう．その為には，とにかく全部を ρ で表わさねばならぬ．

$$(d*F + [A, *F])_{\nu ab}$$
$$= \sum_\mu \partial_\mu F_{\mu\nu ab} + \sum_\mu\sum_c (A_{\mu ac}F_{\mu\nu cb} - F_{\mu\nu ac}A_{\mu cb}).$$

第1項から $\underbrace{}_{}$順に (20), (19) を用いて計算してゆくと，

$$\sum_\mu \partial_\mu F_{\mu\nu ab} = -\frac{2L}{\rho^3}(\partial_a\rho\cdot\delta_{\nu b} - \partial_b\rho\cdot\delta_{\nu a})$$
$$+\frac{1}{\rho^2}(\partial_\nu\partial_a\rho\cdot\partial_b\rho - \partial_\nu\partial_b\rho\cdot\partial_a\rho)$$
$$+\frac{2}{\rho^2}\Delta\rho(\partial_a\rho\cdot\delta_{\nu b} - \partial_b\rho\cdot\delta_{\nu a}) + \frac{1}{2\rho^2}(\partial_a L\cdot\delta_{b\nu} - \partial_b L\cdot\delta_{a\nu})$$
$$-\frac{1}{\rho}(\partial_a\Delta\rho\cdot\delta_{\nu b} - \partial_b\Delta\rho\cdot\delta_{a\nu}), \quad \Delta = \sum_c \frac{\partial^2}{\partial x_c^2} = \sum_c \partial_c^2.$$

$$\sum_\mu\sum_c A_{\mu ac}F_{\mu\nu cb}$$
$$= \frac{1}{\rho^3}(-2\,\partial_a\rho\cdot\partial_b\rho\cdot\partial_\nu\rho + 2L\,\partial_a\rho\cdot\delta_{\nu b} - L\,\partial_\nu\rho\cdot\delta_{ab})$$
$$+\frac{1}{\rho^2}(\partial_a\rho\cdot\Delta\rho\cdot\delta_{b\nu} + \partial_a\rho\cdot\partial_\nu\partial_b\rho + \partial_\nu\rho\cdot\partial_a\partial_b\rho)$$
$$+\frac{1}{2\rho^2}(\partial_\nu L\cdot\delta_{ab} - \partial_a L\cdot\delta_{b\nu}),$$

$$\sum_\mu \sum_c F_{\mu\nu ac} A_{\mu cb} = \sum_\mu \sum_c A_{\mu bc} F_{\mu\nu ca}$$

$$= \frac{1}{\rho^3}\left(-2\,\partial_a\rho\cdot\partial_b\rho\cdot\partial_\nu\rho + 2L\cdot\partial_b\rho\cdot\delta_{\nu a} - L\cdot\partial_\nu\rho\cdot\delta_{ab}\right)$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\left(\partial_b\rho\cdot\Delta\rho\cdot\delta_{a\nu} + \partial_b\rho\cdot\partial_\nu\partial_a\rho + \partial_\nu\rho\cdot\partial_a\partial_b\rho\right)$$

$$+\frac{1}{2\rho^2}\left(\partial_\nu L\cdot\delta_{ab} - \partial_b L\cdot\delta_{a\nu}\right).$$

これを全部足し上げると，大巾な打ち消し合いが生じて

$$\sum_\mu \partial_\mu F_{\mu\nu ab} + \sum_\mu \sum_\nu \left(A_{\mu ac} F_{\mu\nu cb} - F_{\mu\nu ac} A_{\mu cb}\right)$$

$$= \frac{3}{\rho^2}\Delta\rho\left(\partial_a\rho\cdot\delta_{b\nu} - \partial_b\rho\cdot\delta_{a\nu}\right) - \frac{1}{\rho}\left(\partial_a\Delta\rho\cdot\delta_{b\nu} - \partial_b\Delta\rho\cdot\delta_{a\nu}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{\rho^2}\Delta\rho\cdot\partial_a\rho - \frac{1}{\rho}\,\partial_a\Delta\rho\right)\delta_{b\nu} - \left(\frac{3}{\rho^2}\Delta\rho\cdot\partial_b\rho - \frac{1}{\rho}\partial_b\Delta\rho\right)\delta_{a\nu}$$

と計算される．従って，

$$d{*}F + [A, {*}F] = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall a \quad \frac{3}{\rho^2}\Delta\rho\cdot\partial_a\rho - \frac{1}{\rho}\,\partial_a\Delta\rho = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall a \quad 3\cdot\frac{\partial_a\rho}{\rho} = \frac{\partial_a\Delta\rho}{\Delta\rho}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3\,d\log\rho = d\log|\Delta\rho|$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Delta\rho = \pm C\rho^3.$$

こうして (16) が回復された！

もう一度まとめておこう.

$g_{\mu\nu} = \rho^2 \delta_{\mu\nu}$ によって metric を定め, それから作った Riemann curvature を用いて gauge field F を $$F_{ijkl} = \frac{1}{\rho^2} R_{ijkl}$$ で与えるならば, F が Yang-Mills 方程式 (1) を満たすことと ρ が φ^4-方程式 (16) を満たすこととは同値である.

尚, F は (3) も (−3) も満たさない. それは群が simple ではない為におこったことであり, $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ によって F を分解してしまえば, 実は (3) の解と (−3) の解の直和になることが判る.

かくして Yang-Mills と φ^4-model とが (少なくともある程度) 関係することが判った.

今度も, (16) の最も易しい解である

$$\rho = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x^2 = \sum_\mu x_\mu^2$$

について調べておこう. §.4 で $\Lambda^2 \cong \mathfrak{so}(4)$ なる同型を具体的に base をとって与えておいたので, 以下 2-form は Lie 環の元だと見為す. また, $\Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ の分解も用いて, 2-form を $\mathfrak{so}(3)$ の 2 種類の bases $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ と $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ を用いて表示することにする. (19) により,

$$
\left\{
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{2}{1+x^2}\left(-x_2\, e_1\wedge e_2 - x_3\, e_1\wedge e_3 - x_4\, e_1\wedge e_4\right) \\
&= \frac{2}{1+x^2}\left(-x_2\sigma_1 - x_3\sigma_2 - x_4\sigma_3\right) \oplus \frac{2}{1+x^2}\left(-x_2\tau_1 - x_3\tau_2 + x_4\tau_3\right) \\
A_2 &= \frac{2}{1+x^2}\left(x_1\, e_1\wedge e_2 + x_3\, e_2\wedge e_3 + x_4\, e_2\wedge e_4\right) \\
&= \frac{2}{1+x^2}\left(x_1\sigma_1 - x_4\sigma_2 + x_3\sigma_3\right) \oplus \frac{2}{1+x^2}\left(x_1\tau_1 + x_4\tau_2 + x_3\tau_3\right) \\
A_3 &= \frac{2}{1+x^2}\left(x_1\, e_1\wedge e_3 - x_2\, e_2\wedge e_3 + x_4\, e_3\wedge e_4\right) \\
&= \frac{2}{1+x^2}\left(x_4\sigma_1 + x_1\sigma_2 - x_2\sigma_3\right) \oplus \frac{2}{1+x^2}\left(-x_4\tau_1 + x_1\tau_2 - x_2\tau_3\right) \\
A_4 &= \frac{2}{1+x^2}\left(-x_3\, e_3\wedge e_4 - x_2\, e_2\wedge e_4 + x_1\, e_1\wedge e_4\right) \\
&= \frac{2}{1+x^2}\left(-x_3\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_1\sigma_3\right) \oplus \frac{2}{1+x^2}\left(x_3\tau_1 - x_2\tau_2 - x_1\tau_3\right).
\end{aligned}
\right.
$$

これの Λ^2_+-part，即ち σ_i で展開されている部分は，(15)式の 1-instanton にぴたりと一致している．(15) に $\frac{1}{1+x^2}$ が出て来たタネあかしは，まさにこういう訳だったのだ．

また，上の Λ^2_--part で，$x_4 \mapsto -x_4$，$A_4 \mapsto -A_4$ のように orientation をかえると，それは Λ^2_+-part と同じ形になることが判るから，Λ^2_--part そのものは (3) の解である．(注．(3) と (−3) とは orientation を入れかえることで移り合う．) 即ち，上の A を，$\mathfrak{so}(4) = \Lambda^2 = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$ に応じて分解して

$$A = A^+ \oplus A^-$$

と書けば，A^+ は (−3) の 1-instanton solution であり，A^- は (3) の 1-instanton solution であることが判る．

真空中での Einstein 方程式は $R_{\mu\nu} = 0$ であるから，特に $R = 0$ である．従って (16) の意味する $R = \text{const.}$ は弱められた Einstein 方程式という解釈が出来る．（過去にそういうものが研究されたこともあったようである．"Perspectives in Geometry and Relativity" Ed. by B. Hoffmann, Indiana Univ. Press (1966) に収められている C.W. Kilmister の論文参照．題は「別の場の方程式」である！）

[3] の中で筆者は Yang-Mills 方程式を非線型調和方程式ととらえたが，ある場合には

$$\text{Yang-Mills eq.} \iff \Delta \rho = -\rho^3, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{4} \partial_i^2$$

となるあたり，まさに「非線型」調和方程式である．ところで，φ^4- 方程式 (16) の解は，実はあまり知られていない．定数の部分は適当に調整出来るので，-1 とすると，

(21) $\boxed{\varphi = \dfrac{2\sqrt{2}\,\lambda}{\sum_{i=1}^{4}(x_i - a_i)^2 + \lambda^2} \quad \text{は} \quad \Delta\varphi = -\varphi^3 \ \text{を満たす．}}$

但し $a = (a_1, \cdots, a_4) \in \mathbb{R}^4$, $\lambda \in \mathbb{R}$ は任意パラメタ．

§5 で見てきたように，(21) は (3) or (−3) の 1-instanton solution に関係した解である．では，一般に n-instanton solution に

関係した $\Delta\varphi=-\varphi^3$ の解はあるのだろうか？ 今の所その答を知る人はいない．もともと Instanton number というのは空間の cohomology の元なのであるが，$\Delta\varphi=-\varphi^3$ に cohomology が出てくる余地はあるのだろうか？

Yang-Mills 方程式 (1) と φ^4-方程式 (16) のつながり具合は，(16) $\Rightarrow$ (1) というものであった．何等かの制限つきでもよいから逆向きが判ると φ^4-model の解析に役に立つのだが，今のところ何とも言えない．

∞. おわりに．

幾何学の応用で (±3) の解については色々なことが判ってきているが，方程式そのものの性質・解析はまだほとんど出来ていない，という印象を受ける．また，(3) は何等かの意味で Quaternion structure の integrability になっているような印象も持つのだが，どう定式化したらよいかよく判らない．重力場との関連が出てきたように，これからも思いもかけない発展があるかも知れぬ．Yang-Mills への興味は（仲々）尽きない．

5節の内容に関して，東北大学の山岸賢吾氏に色々と御教示戴いた．深く感謝の意を表する．また，所属がかわったりして多忙だった為，原稿を書くべきことを失念してしまい，

こんなにもおそくなってしまった事に対し小松彦三郎先生にお詫び申し上げたい。　　　　(1980年　11月)

文献

[0] Y. Iwasaki : Instanton Contributions in 2d non-linear O(3) σ-model. Tsukuba preprint n°. UTHEP-73 (1980)

[1] Bourguignon & Lawson : to appear in Commun. Math. Phys.

[2] E. Witten : Phys. Rev. Letters <u>38</u>. n°. 3 121-124 (1977)

[3] 村瀬 元彦 : 科学 <u>50</u>. n°. 10 . 668-673 (1980)

[4] F. Wilczek : Geometry and Interactions of Instantons. in "Quark Confinement and Field Theory" Ed. by Stump & Weingarten, Rochester 会議報告集 J. Wiley & sons (1976).