数理解析研究所講究録
410巻 1980年 76-87

ϑ函数の超局所解析についての一，二の注意

京大・数理研　　河合隆裕

佐藤先生がϑ函数，或いはその零値（ϑ-Nullwerte），の大域的性質を超局所的に捉える試みを発表されて（Sato, M.: Pseudo-differential equations and theta functions, Astérisque, 2-3 (1973) pp. 286-291）からかなりの年月が経ったけれども，この論文は余り世の注意を惹いていないように見える。併乍，アーベル多様体の変形と云う主題を解析的に考えて行く際，もう一度見直してみるべき方向を指し示した重要な論文と思われる。

本稿では，この論文の定式化（Definitions in p. 289 and p. 290）に於いてやや不親切に思われる点があるので，それに関する注意を与える。

まず，最初に，上述の論文の定式化を復習しておこう。

話は，次の条件 (1), (2) を満たす (micro-) differential operators（の行列）$P_j(t, \partial/\partial t)$ $(j=1, \cdots, 2n)$ $(t \in U \subset \mathbb{R}^{n'})$ の組を考えることから始まる。

(1)　$[P_j, P_k]$ $(\underset{\mathrm{def}}{=} P_jP_k - P_kP_j) = -2\pi\sqrt{-1}\, e_{jk}$ $(1 \leqq j, k \leqq 2n)$

　　但し $e_{jk} \in \mathbb{Z}$, $\det(e_{jk}) \neq 0$.

(2)　$\operatorname{ord} P_j < 1$ $(1 \leqq j \leqq 2n)$

以下．$E \underset{\mathrm{def}}{=} (e_{jk})_{1\leqq j,k\leqq 2n}$ ，$\langle Ey, x\rangle = \sum_{j,k} e_{jk}\, y_k x_j$ ，$(Ey)_j = \sum_k e_{jk} x_k$ なる記法を用いることとする。

ここで，条件（1）により，

(3) $[\exp(P_j), \exp(P_k)] = 0 \quad (1\leqq j,k \leqq 2n)$

が成立する。更に，条件（2）により

(4) $\exp(P_j) \in \mathcal{E}^\infty$（無限階擬微分作用素の層）

が成立する。（1）なる代数的条件を合わせれば，より一般に，

(4′) $\exp(\sum_j c_j P_j) \in \mathcal{E}^\infty \quad (c_j \in \mathbb{C})$

が成立することも容易に判る。

（3），（4）より，$\{\exp(P_j)\}_j$ の同時固有（超）函数を考えることが出来る。これを<u>ヤコビ（超）函数</u>と名付けることとする。即ち，ヤコビ（超）函数とは，適当な $c_j \in \mathbb{C}$ が存在して

(5) $[\exp(P_j)]\, h(t) = c_j h(t) \quad (j = 1, \cdots, 2n)$

を満たす超函数（又は，microfunction）$h(t)$ のことを謂う。

さて，<u>テータ函数</u> $\vartheta(x|t)$ は上の条件（1），（2）を満たす (micro-)differential operators の組 (P_j)（それ，或いはより正確には，それ等の線型結合の全体を，以下<u>ヤコビ構造</u>と呼ぶことがある。）を用いて次のように定義される。

(6) $\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \pi\sqrt{-1}\,(Ex)_j\right)\vartheta(x|t) = P_j\left(t, \frac{\partial}{\partial t}\right)\vartheta(x|t) \quad (1\leqq j \leqq 2n)$

(7) 任意の $\nu \in \mathbb{Z}^{2n}$ に対して，或る $c(\nu) \in \mathbb{C}$ が存在して

$$\vartheta(x+\nu|t) = c(\nu)\,\varepsilon(\langle E\nu, x\rangle)\,\vartheta(x|t)$$

が成立する。但し、ここで $\varepsilon(\varphi)=\exp(\pi\sqrt{-1}\,\varphi)$ とした。

なる2条件を満たす $\mathbb{R}^{2n}\times U$ 上の超函数（又は、microfunction）$\vartheta(x|t)$ をテータ函数と呼ぶ。

ここで条件(1)により、方程式系(6)は閉じていることに注意。以下条件(7)を<u>擬周期性</u>の条件と呼ぶ。

さて、佐藤先生の主要な論点の一つは、次の定理（上述論文 p.290）であった。

> <u>THEOREM</u>.- If $\theta(x|t)$ is a theta function associated to the Jacobi structure then the 'zero-value' $\theta(0|t)$ is a Jacobi function. Conversely, any Jacobi function $f(t)$ on W determines uniquely a theta function $\theta(x|t)$ with the property $\theta(0|t) = f(t)$ uniquely.

なお、この定理に言うテータ函数とヤコビ函数を具体的に書き下せば

(8) $\quad \vartheta(x|t) = \exp\left(\sum_j x_j P_j\right) f(t)$

であり、又、$c(\nu)$ と c_j の間には、

(9) $\quad c(\nu) = \varepsilon(\langle E\nu, \nu\rangle)\prod_{j=1}^{2n} c_j^{\nu_j}$

なる関係があることは、直接計算により容易に確め得る。

さて、上の意味でのテータ函数の例として最も基本的なものは、リーマンのテータ函数 $\Theta(z|\tau)$ を用いて与えられるであろう、と期待される。（以下通常の記号と合わせる為に t

τと記す。ここでτは$n\times n$実対称行列[*]，$\Theta(z|\tau) \underset{\text{def}}{=} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \varepsilon(2\langle\nu,z\rangle+\langle\tau\nu,\nu\rangle)$とする。)

以下では，レルチのツェータ函数の考察と関係して，Θを少し変形した

(10) $\vartheta(x,y|\tau) \underset{\text{def}}{=} \varepsilon(\langle x,\tau x+y\rangle)\,\Theta(\tau x+y|\tau)$

を考えることとする。又，

(11) $\vartheta_\ell(x,y|\tau) = \left(\frac{\partial}{\partial y_\ell}+\pi\sqrt{-1}\,x_\ell\right)\vartheta \quad (\ell=1,\cdots\cdots,n)$

と定める。(別に楕円テータ函数の記号と関係がある訳ではない。)以下$\vec{\vartheta} = {}^t(\vartheta,\vartheta_1,\cdots,\vartheta_n)$と記すこととする。

ここで，$n=1$の時は，$\vec{\vartheta}$は既述の意味でテータ函数となり，その零値の保型性(所謂ヤコビの虚変換)が(5)なる無限階の方程式系に翻訳されることを確め得る。(上述の論文では触れられていないが，これが佐藤先生の最も重要な論点であったと私には思われる。)併乍，$n>1$の時，上の定式化を余りに文字通りに解釈すると，$\vec{\vartheta}$は，一見，テータ函数とはならないことになってしまう。勿論，佐藤先生は，この例については十分御計算になられたはずで，多分，超局所化した陳述においては，それは重要な論点ではない，と御判断になられた物と思われる。ここでは，その

(*) 以下ϑ etc.は$\mathrm{Im}\,\tau \gg 0$方向からの境界値を取って考えた超函数と考える。

間の事情について，一，二の計算を示して議論を行いたい。

$n>1$ の場合を論じるに先立ち，$n=1$ の時の結果を復習しておこう。この時，

$$(12)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1} - \pi\sqrt{-1}\, y_1\right)\vec{\vartheta} = P_1\vec{\vartheta} \\[2ex] \left(\dfrac{\partial}{\partial y_1} + \pi\sqrt{-1}\, x_1\right)\vec{\vartheta} = Q_1\vec{\vartheta} \end{cases}$$

$$(13)\quad \vec{\vartheta}(x+\mu,\, y+\nu \mid \tau) = \varepsilon(\langle \mu,\nu\rangle)\,\varepsilon(\langle x,\nu\rangle - \langle y,\mu\rangle)\,\vec{\vartheta}(x,y\mid\tau)$$

$$(\mu,\nu \in \mathbb{Z})$$

但し

$$\begin{cases} P_1 = \begin{pmatrix} & \tau \\ 2\pi\sqrt{-1}\left(1+2\tau\dfrac{\partial}{\partial\tau}\right) & \end{pmatrix} \\[4ex] Q_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 4\pi\sqrt{-1}\,\dfrac{\partial}{\partial\tau} & \end{pmatrix} \end{cases},$$

が成り立ち，所要の条件がすべて満たされることは直ちに確め得る。特に $[P_1, Q_1] = -2\pi\sqrt{-1}$ に注意。

同様にして，$n \geqq 2$ の時も，(12)に類似した次の方程式系(14)は容易に見出だし得る：

$$
(14)\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial}{\partial x_\ell} - \pi\sqrt{-1}\,y_\ell\right)\vec{\vartheta} = P_\ell\,\vec{\vartheta} & (1 \leqq \ell \leqq n) \\[2ex]
\left(\dfrac{\partial}{\partial y_\ell} + \pi\sqrt{-1}\,x_\ell\right)\vec{\vartheta} = Q_\ell\,\vec{\vartheta} & (1 \leqq \ell \leqq n)
\end{cases}
$$

但し

$$
P_\ell = \begin{pmatrix}
0 & \tau_{\ell 1} & \cdots\cdots & \tau_{\ell n} \\
2\pi\sqrt{-1}\,(\delta_{\ell 1} + 2T_{\ell 1}) & & & \\
\vdots & & O & \\
2\pi\sqrt{-1}\,(\delta_{\ell n} + 2T_{\ell n}) & & &
\end{pmatrix}
$$

（ここで $T_{pq} \underset{\mathrm{def}}{=} \displaystyle\sum_j \frac{\tau_{pj}}{(2-\delta_{jq})}\frac{\partial}{\partial \tau_{jq}}$ ）

$$
Q_\ell = \begin{pmatrix}
0 & \delta_{\ell 1} & \cdots\cdots & \delta_{\ell n} \\
\dfrac{4\pi\sqrt{-1}}{2-\delta_{\ell 1}}\dfrac{\partial}{\partial \tau_{\ell 1}} & & & \\
\vdots & & O & \\
\dfrac{4\pi\sqrt{-1}}{2-\delta_{\ell n}}\dfrac{\partial}{\partial \tau_{\ell n}} & & &
\end{pmatrix}.
$$

以下擬周期性に関しては問題が無いので，方程式系についてのみ論じることとする。

このようにして，一見(12)とよく似た式が得られるけれども，上に得られた$(P_\ell, Q_\ell)_{1\leqq \ell \leqq n}$はヤコビ構造

を与えない。以下，しばらく，簡単の為 $n=2$ としよう。この時，例えば，

(15) $[P_1, P_2] = 2\pi\sqrt{-1}\,(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22})\,R_0$, etc.

但し，

$$(16)\quad R_0 = \begin{pmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{12} & -2\partial_{11} \\ & 2\partial_{22} & -\partial_{12} \end{pmatrix}$$

(ここで $\partial_{jk} \underset{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\partial}{\partial\tau_{jk}}$.)

従って 条件(1)は満たされず，また，(14)はまだ閉じた方程式系になっていない。

ただ，この場合，

$$(17)\begin{cases} [P_j, P_k] = f_{jk}R_0 , \quad [Q_j, Q_k] = g_{jk}R_0 \\ [P_j, Q_k] = -2\pi\sqrt{-1}\,\delta_{jk} + h_{jk}R_0 \end{cases}$$

但し，
$$\begin{cases} f_{12} = 2\pi\sqrt{-1}\,(\tau_{12}^2 - \tau_{11}\tau_{22}) \\ g_{12} = -2\pi\sqrt{-1} \\ h_{11} = 2\pi\sqrt{-1}\,\tau_{12} \\ h_{12} = -2\pi\sqrt{-1}\,\tau_{11} \\ h_{21} = 2\pi\sqrt{-1}\,\tau_{22} \\ h_{22} = -2\pi\sqrt{-1}\,\tau_{12} \end{cases}$$

と云う特別な形の交換関係が成り立っているから 方程式系(14)に，$R_0\vec{\vartheta}=0$ なる方程式を附加すれば，元来の定式化

と少し異るが，求むる方程式系が得られるかと思われる。併乍，
実は，計算してみると，これでもまだ方程式系は閉じず，

$$(18)\quad \begin{cases} R_1 \underset{\text{def}}{=} [Q_1, R_0] = \begin{pmatrix} 0 & \partial_{12} & -2\partial_{11} \\ 0 & & \\ -2\pi\sqrt{-1}\Delta & & O \end{pmatrix} \\ \\ R_2 \underset{\text{def}}{=} [Q_2, R_0] = \begin{pmatrix} 0 & 2\partial_{22} & -\partial_{12} \\ 2\pi\sqrt{-1}\Delta & & O \\ 0 & & \end{pmatrix} \end{cases}$$

（但し $\Delta = 4\partial_{11}\partial_{22} - \partial_{12}^2$）
も合わせて考える必要があることが判る。即ち，

$$(19)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial x_\ell} - \pi\sqrt{-1}\,y_\ell\right)\vec{\vartheta} = P_\ell \vec{\vartheta} & (\ell = 1, 2) \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial y_\ell} + \pi\sqrt{-1}\,x_\ell\right)\vec{\vartheta} = Q_\ell \vec{\vartheta} & (\ell = 1, 2) \\ R_j \vec{\vartheta} = 0 & (j = 0, \end{cases}$$

を考えて，始めて閉じた方程式系が得られる。言い換えれば，
(14)と云う方程式系を補助条件

$$(20)\qquad R_j \vec{\vartheta} = 0 \quad (j = 0, 1, 2)$$

を満たす部分空間 S 上で考えるのが適当であることが判る。更に，この場合，交換関係の特殊性，即ち，$[R_j, P_k]$，$[R_j, Q_\ell]$ がいずれも再び R_ℓ の線型結合で書けると云う事実により，$\exp P_k$，$\exp Q_\ell$ はいずれも S に制限して考える

ことが出来，しかもそのように考えれば，それ等はいずれも互いに可換である。従ってすべてを$\mathcal{S}$上に制限して考えることにより，テータ函数とヤコビ函数の対応を示すことが出来る。他方R_jの形より，超局所的には，$\mathcal{S}$はより次元の低い接触多様体上の層と（少くとも一般の点では）考えて差障りは無いと考えられる。このような了解の下に，結局，ϑは佐藤先生の意味でのテータ函数であると言い切って構わない。

次に，超局所的観点をより強調することにより，上述の議論がより見易くなることを示そう。

実際，超局所的には，一般の点では，$\sqrt{4\pi\sqrt{-1}\,\partial_{jj}}$ は well-defined であるから，(14)，(20) の代わりに，

$$
(21)\begin{cases}
\left(\dfrac{\partial}{\partial x_\ell} - \pi\sqrt{-1}\,y_\ell\right)\vartheta = \displaystyle\sum_k \tau_{\ell k}\sqrt{4\pi\sqrt{-1}\,\partial_{kk}} & \text{(a)} \\
\left(\dfrac{\partial}{\partial y_\ell} + \pi\sqrt{-1}\,x_\ell\right)\vartheta = \sqrt{4\pi\sqrt{-1}\,\partial_{\ell\ell}} & \text{(b)} \\
\partial_{jk}\vartheta = 2\sqrt{\partial_{jj}}\,\sqrt{\partial_{kk}}\,\vartheta \quad (j\neq k) & \text{(c)}
\end{cases}
$$

を考えれば，(21)(a)，(b) の右辺に現れた作用素が条件(1)を満たす（この場合は補助条件(c)を考えに入れないでも）ことは容易に確かめることが出来る。このように

分数階の作用素の導入は議論を見通し良くすることにかなり有用であると思われる。例えば今扱った $\vartheta(x, y \mid \tau)$ の場合, $\tau \in GL(n)/O(n)$ と考えれば むしろ τ でなく $g \in GL(n)$ をパラメタに用いて議論した方が（概均質ベクトル空間の変形という観点から）他の例を考察する際の Vorbild としては, より適切であると考えられるけれど, 微分方程式として所要の方程式を書き下そうとするとかなり面倒な式になるようである。併乍, より一般に.

$$(22)\quad \tilde{\vartheta}(x, y \mid g) \underset{\text{def}}{=} \varepsilon(\langle x, y \rangle) \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} \varepsilon(2\langle \nu, y \rangle) f_0(x+\nu \mid g)$$

但し
$$\begin{cases} f_0(x \mid g) = \varepsilon(P(gx)) \\ P(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j^{m_j} \quad (m_j \text{ は 2 以上の自然数}) \end{cases}$$

（が収束すれば）満たす方程式系(23)を, 分数階の作用素を用いれば, 比較的簡明に書き下すことができる：

以下
$$(h_{jk}) = (g_{jk})^{-1}$$

$$D_j = \left(\sum_{k=1}^{n} g_{jk} \frac{\partial}{\partial g_{jk}}\right) \Big/ \pi\sqrt{-1}\, m_j$$

$$P_\ell = 2\pi\sqrt{-1} \left(\sum_k h_{\ell k} D_k^{1/m_k}\right)$$

$$Q_\ell : \quad \sum_k m_k \left(\sum_p g_{kp} x_p\right)^{m_k - 1} g_{k\ell} =$$

$$= \sum_\alpha g_{\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_n} x_1^{\alpha_1} \cdots\cdots x_n^{\alpha_n} \quad \text{として,}$$

（次頁に続く）

$$\sum_\alpha q_\alpha \left(\frac{P_n}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^{\alpha_n} \cdots\cdots \left(\frac{P_1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^{\alpha_1}$$

$$R_{jk}: \quad \pi\sqrt{-1}\, m_j \left(\sum_p g_{jp}\, x_p\right)^{m_j-1} x_k =$$

$$= \sum_\alpha r_{jl,\alpha}\, x_1^{\alpha_1} \cdots\cdots x_n^{\alpha_n} \qquad \text{として}$$

$$\sum_\alpha r_{jl,\alpha} \left(\frac{P_n}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^{\alpha_n} \cdots\cdots \left(\frac{P_1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^{\alpha_1}$$

と記すこととする。この時.

$$(23)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial x_l} - \pi\sqrt{-1}\, y_l\right)\tilde{\vartheta} = P_l \tilde{\vartheta} & (l=1,\cdots,n) \\[2ex] \left(\dfrac{\partial}{\partial y_l} + \pi\sqrt{-1}\, x_l\right)\tilde{\vartheta} = Q_l \tilde{\vartheta} & (l=1,\cdots,n) \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial g_{jk}}\tilde{\vartheta} = R_{jk}\tilde{\vartheta} & (1 \leqq j,k \leqq n) \end{cases}$$

尚，(23)の最後の補助条件は，超局所的には，$\varphi(x|g) = \varphi(gx)$ の形の函数に対して一般的に成立する

$$(24)\quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial g_{ik}} & \dfrac{\partial}{\partial g_{il}} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial g_{jk}} & \dfrac{\partial}{\partial g_{jl}} \end{vmatrix} \varphi = 0 \qquad (1 \leqq i, j, k, l.$$

なる関係式と同値と思うがチェックはしてない。

因みに，(24)は問題を超局所的に考えるならば，g-変数については，$(2n-1)$次元の接触多様体上に話を限ることができることを示している。(rank $C = 1 \Rightarrow \exists a, b \neq 0$

s.t. $C = a\,{}^t b$ (a, bは縦ベクトル)，に注意せよ。)

以上，分数階の作用素を導入することにより，議論が見易くなることを注意したが，このような問題の捉え方の欠点についても一言した方がよいであろう。

一つの明らかな欠点は，分数階の作用素を導入する為にいくつかの除外点が現われることである。又，未知函数を一ヶにした為（行列を用いれば分離できた）δ函数に関係した項を，テータ函数が拾い込んでしまうことであろう。即ち，ここで謂うテータ函数が，通常のテータ函数（の $\mathrm{Im}\,\tau \downarrow 0$ の極限値）に限られない点であろう。尤も，この点は，その方が面白い，と云う見方も出来よう。例えば，$n=1$ の時，

(25) $$\vartheta(x, y \mid \tau) = \varepsilon(-\langle x, y\rangle) \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \varepsilon(2\langle \nu, x\rangle)\, g_0(y-\nu \mid \tau)$$

但し $$g_0(y \mid \tau) = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^{2m}\,(4\pi\sqrt{-1}\,\partial/\partial\tau)^m}{(2m)!} \right)(\tau_+^{-1/2}) + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2\sqrt{\pi}\,y)^{2m+1}\,\varepsilon(m+1/2)}{(2m+1)!} \sqrt{\pi}\,\delta^{(m)}(\tau)$$

等と云う函数も（収束性を厳密にチェックしては無いが）本稿の意味でのテータ函数である。(g_0 の定義式の第一項は通常のテータ函数にその counterpart を見出すが，第二項はそうではない。複素領域では，即ち定義函数に移ると，コホモロガス 0 の項が生き残る為である。)