数理解析研究所講究録
410巻 1980年 28-55

特異初期値問題の解の表示について

明治学院大 経 石井 坦

§0 序 複素領域に於る特異初期値問題は，Hamada [2] により，最初に，特性根が相異る場合に研究され，その後，Hamada-Leray-Wagschal [3], Nakamura [11], Hamada-Nakamura [4] 等により発展させられてきた。また最近でも Urabe [10], Ōuchi [9], Kobayashi [6] など，この分野での成果が相次いでいる。この問題の興味は，初期面上に与えられた解の特異性が複素領域の中にどう伝播するかを調べることにあるのだが，本稿は，特性根が正則であって多重度は変り得る場合について，ともかくも解の表示を与えよう，というもので，特異性の伝播を解明するには到っていない。

我々の発想は，Kumanogo-Taniguchi [7] による実変数双曲型方程式系の理論（これについては熊ノ郷 [8] に詳しい），に多くの影響を受けている。事実，多重特性関数はそこに出てくるし，解を累次積分の無限和で表わすことも同じである。

しかし，我々は，輸送方程式を一般化して定義し，これに依拠して係数を決定する，という点で彼等とは異っている。本稿は Ishii [5] の解説にもなっている。

§1 問題の設定 Ω を $\mathbb{C}^{n+1}$ の原点 0 を含む領域とし，その点を $(t,x)=(t,x_1,\cdots,x_n)$ で表わす。Ω で正則な係数を持つ m 階偏微分作用素 $H(t,x;\partial_t,\partial_x)=\partial_t^m+\sum_{\substack{\alpha_0+|\alpha'|\le m\\ \alpha_0<m}} a_{\alpha_0\alpha'}(t,x)\partial_t^{\alpha_0}\partial_x^{\alpha'}$ と，初期面 $S=\{t=0\}\cap\Omega$ および $T=\{t=x_1=0\}\cap S$ に対し T 上に極を持つ特異初期値問題

(E) $\quad Hu=0$

(C) $\quad \partial_t^{l}u\big|_S=\delta_{l,l_0}\,c(x')/x_1^{p} \quad (l=0,1,\cdots,m-1)$

を考える。但し $x'=(x_2,\cdots,x_n)$，$c(x')$ は T で正則，p は自然数である。我々は次の仮定を設ける。

> 仮定 H の主部 h に対し $h(t,x;\tau,\xi)=\prod_{i=1}^{m}(\tau+\lambda_i(t,x;\xi))$ と表わしたとき，各 $\lambda_i(t,x;\xi)$ 即ち特性根は，$(t,x;\xi)$ に関し $\Omega\times\Omega^*$ で正則である。但し Ω^* は $e=(1,0,\cdots,0)$ を含む $\mathbb{C}^n$ の領域とする。

注 初期条件 (C) は計算の煩雑を避けるためこうした。

§2 多重特性関数，多重特性帯

> 定義 2.1 作用素 H に対し，k 重特性関数 $\phi_k=\phi_k((t)_k,x)=$

$= \phi_k(t_1, \cdots, t_k, x; \eta)$, $k = 1, 2, \cdots$, を次の一階偏微分方程式の系により帰納的に定める。

$$(\Phi) \begin{cases} \partial_{t_k} \phi_k((t)_k, x; \eta) + \lambda_k(t_1 + \cdots + t_k, x; \partial_x \phi_k) = 0 \\ \phi_k((t)_{k-1}, 0, x; \eta) = \phi_{k-1}((t)_{k-1}, x; \eta) \\ \phi_1(0, x; \eta) = x \cdot \eta \end{cases}$$

但し，ここに $(t)_k = (t_1, \cdots, t_k) \in \mathbb{C}^k$，また λ_k は，$k = Km + i$ $1 \le i \le m$ と表わしたとき $\lambda_k \equiv \lambda_i$ と定める。また，(Φ) に対応する k 重特性帯 $(x^k; \xi^k) = (x^k; \xi^k)((t)_k, x; \eta) = (x_1^k, \cdots, x_n^k; \xi_1^k, \cdots, \xi_n^k)((t)_k, x; \eta)$ を，次の一階常微分方程式系の系により帰納的に定める。

$$(B) \begin{cases} \dfrac{dx^k}{dt_k} = (\partial_\xi \lambda_k)(t_1 + \cdots + t_k, x^k; \xi^k), \quad \dfrac{d\xi^k}{dt_k} = -(\partial_x \lambda_k)(t_1 + \cdots + t_k, x^k; \xi^k) \\ (x^k; \xi^k)((t)_{k-1}, 0, x; \eta) = (x^{k-1}; \xi^{k-1})((t)_{k-1}, x; \eta) \\ (x^1; \xi^1)(0, x; \eta) = (x; \eta) \end{cases}$$

系 2.1　$\phi_k((t)_{k-l}, 0, \cdots, 0, x; \eta) = \phi_{k-l}((t)_{k-l}, x; \eta)$，

$(x^k; \xi^k)((t)_{k-l}, 0, \cdots, 0, x; \eta) = (x^{k-l}; \xi^{k-l})((t)_{k-l}, x; \eta)$，$1 \le l \le k-1$

多重特性関数(帯)の優関数評価に関しては，次の補題が基本的である。

補題 2.1　1° $\phi_k((t)_k, x; \eta)$ は次の優関数評価をもつ。

$$\phi_k((t)_k, x; \eta) \ll \Phi\left(K \sum_{l=1}^{k} t_l + \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} (\eta - e)_i\right)$$

但し，$\Phi = \Phi(s)$ は，$s = 0$ の近傍で正則な k によらない適当な一変数関数，また $K > 0$ も k によらない定数である。

2° $(x^k; \xi^k)((t)_k, x; \eta)$ も同じ型の優関数評価をもつ。

[証明] 1° のみを証明する。2° も同じやり方でできる。

$$\psi_k((t)_k, x; \eta) \equiv \phi_k((t)_k, x; \eta) - x\cdot\eta + \sum_{l=1}^{k} \lambda_l(0,0;\eta)\, t_l$$

と置く。すると(亜)より，ψ_k は次の方程式をみたす。

$$(\text{亜})_k \begin{cases} \partial_{t_k}\psi_k + \lambda_k(t_1+\cdots+t_k, x; \partial_x\psi_k + \eta) - \lambda_k(0,0;\eta) = 0 \\ \psi_k((t)_{k-1}, 0, x; \eta) = \psi_{k-1}((t)_{k-1}, x; \eta), \quad \psi_1(0, x; \eta) = 0, \quad k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

次に，次のような優微分方程式を考える。

$$(\overline{\text{亜}}) \begin{cases} K\,\Phi'(s) \gg \dfrac{L}{1 - R(n\,\Phi'(s) + s)} - L \\ \Phi(s) \gg 0 \end{cases}$$

但し，L, R は $\lambda_i(t, x; \eta) \ll \dfrac{L}{1 - R\left(t + \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} (\eta - e)_i\right)}$ $(i = 1, \cdots, n)$ をみたすように定める。この$(\overline{\text{亜}})$がある $K > 0$ に対して解けるならば，$\psi_k((t)_k, x; \eta) \ll \Phi\left(K\sum_{l=1}^{k} t_l + \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} (\eta - e)_i\right)$ が成り立つことを示そう。実際，$k = 1$ に対しては$(\overline{\text{亜}})$は$(\text{亜})_1$の優微分方程式になっている。次に，$1 \le k \le k_0 - 1$ に対して成り立つと仮定すると，

$$\Phi\left(K\sum_{l=1}^{k_0} t_l + \cdots\right)\Big|_{t_k = 0} = \Phi\left(\sum_{l=1}^{k_0-1} t_l + \cdots\right) \gg \psi_{k_0-1}((t)_{k_0-1}, x; \eta)$$

が成り立つから，$\Phi\left(K\sum_{l=1}^{k_0} t_l + \cdots\right)$ は$(\text{亜})_{k_0}$に対する優微分方程式

$$\begin{cases} \partial_{t_{k_0}}\Phi \gg \dfrac{L}{1 - R\left(\sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}\Phi + K\sum_{l=1}^{k_0} t_l + \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} (\eta - e)_i\right)} - L \\ \Phi|_{t_{k_0} = 0} \gg \psi_{k_0-1}((t)_{k_0-1}, x; \eta) \end{cases}$$

の解になっていることがわかる。従って求める優函数評価が得られる。最後に$(\overline{\text{亜}})$を解く。

4.

$$\frac{L}{1-R(n\tilde{\Phi}'(s)+s)} \ll \frac{L}{1-R_n\Phi'(s)}\cdot\frac{1}{1-Rs}$$

であるから，次の方程式をみたす $\tilde{\Phi} \gg 0$ が求まればよい。

$$K\tilde{\Phi}'(s) = \frac{L}{1-R_n\tilde{\Phi}'(s)}\cdot\frac{1}{1-Rs} - L \quad , \quad \tilde{\Phi}(0)=0$$

故に，$\tilde{\Phi}'(s) = \dfrac{K-R_nL \pm\sqrt{(K-R_nL)^2-4KR_n\left(\frac{L}{1-Rs}-L\right)}}{2KR_n}$ ，$\tilde{\Phi}(0)=0$

であって，$K > R_nL$ ならば，複号として－を採用して解いた $\tilde{\Phi}$ は条件をみたす。（証明終）

<u>命題 2.1</u>　1° $\sum_{j=1}^{k}|t_j| + \sum_{i=1}^{n}|y_i| + \sum_{i=1}^{n}|(\eta-e)_i|$ が十分小さいとき，$\mathbb{C}^n \ni y \longrightarrow x = x^k((t)_k, y; \eta) \in \mathbb{C}^n$ なる対応は，$(t)_k, \eta$ をパラメータとみるとき両正則写像となる。

2° $x^k((t)_k, y; \eta)$ に対しては補題 2.1, 2° に述べた優関数評価が成り立つが，逆写像 $y = y^k((t)_k, x; \eta)$ に対しても同じ型の優関数評価が成り立つ。

<u>注</u>　$\phi_k((t)_k, x; \eta) = y^k((t)_k, x; \eta)\cdot\eta$ である。（命題証明略）

以下に於て，ϕ_k を扱うときには $\eta = e$ の場合しか現われないから，今後 ϕ_k，$\phi_k((t)_k, x)$ と書かれる場合には $\phi_k((t)_k, x; \eta)$ を表わすものとする。

<u>補題 2.2</u>　$\phi_k((t)_k, x)$ に対し次が成り立つ。

$$\partial_{t_l}\phi_k((t)_k, x) = -\lambda_k(t_1+\cdots+t_k, X^k; \Xi^k) + \sum_{\nu=l}^{k-1}\left(\lambda_{\nu+1}(t_1+\cdots+t_\nu, X^\nu; \Xi^\nu) - \lambda_\nu(t_1+\cdots+t_\nu, X^\nu; \Xi^\nu)\right), \quad l=1,\cdots,k$$

但し，$X^\nu = X^\nu((t)_k, x)$，$\Xi^\nu = \Xi^\nu((t)_k, x)$ は，命題 2.1 に於る x^k，y^k を用いて次のように表わされる。$X^\nu = x^\nu((t)_\nu, y^k((t)_k, x; e), e)$，

$\mathcal{Z}^{\nu} = \xi^{\nu}((t)_{\nu}, \eta^{k}((t)_{k}, x; \theta); \theta)$, $l \leq \nu \leq k$.

証明は熊ノ郷[8], p160, またはKobayashi[6]参照。

§3 <u>形式解</u>　我々は, (E), (C)の解 $u(t,x)$ を次の形式で求める。

$$(\mathrm{U}) \qquad u(t,x) = F_1(t,x) + \sum_{k=2}^{\infty} \int_0^t dt_1 \int_0^{t-t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t-t_1-\cdots-t_{k-2}} dt_{k-1}\; F_k((t)_k, x)$$

但し, 積分は, $(t)_k = (t_1, \cdots, t_k)$ が $t_l = \sigma_l t$, $0 \leq \sigma_l \leq 1$, $\sigma_1 + \cdots + \sigma_k = 1$ と表わされるような積分路に沿うものとする。

また, 関数 F_k は,

$$F_k((t)_k, x) = \sum_{j=j_k}^{\infty} f_j(\phi_k((t)_k, x))\, a_{j,k}((t)_k, x)$$

と表わされ, j_k は初期条件から決まる整数, さらに $f_j = f_j(s)$ は

$$f_j(s) \begin{cases} = \dfrac{s^j}{j!}\left(\log s - \dfrac{\Gamma'(j+1)}{\Gamma(j+1)}\right), & j \geq 0, \\ = (-1)^{j+1}(-j-1)!\, s^j, & j \leq -1 \end{cases}$$

によって定義され, $a_{j,k}((t)_k, x)$ は $\mathbb{C}^{n+k}$ の原点の近傍 $\rho \sum_{l=1}^{k} |t_l| + \sum_{i=1}^{n} |x_i| < R$ ($\rho, R > 0$ は j, k によらない定数) に於て正則な関数である。

<u>定義 3.1</u>　偏微分作用素 $H(t, x; \partial_t, \partial_x)$ に対し, その<u>誘導作用素</u> $H_p^k(t, x; \partial_{t_k}, \cdots, \partial_{t_{k-m+p}}, \partial_x)$ を次の式により定義する。

$$H(t, x; \partial_t, \partial_x) \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t-t_1-\cdots-t_{k-2}} dt_{k-1}\; f((t)_k, x) =$$

$$= \sum_{\tilde{p}=0}^{m} \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t-t_1-\cdots-t_{k-\tilde{p}-2}} dt_{k-\tilde{p}-1} \Big[H_{m-\tilde{p}}^{k}(t, x; \partial_{t_k}, \cdots, \partial_{t_{k-\tilde{p}}}, \partial_x) f((t)_k, x) \Big]_{t_k = \cdots = t_{k-\tilde{p}+1} = 0} \qquad (k \geq m)$$

$$H(t, x; \partial_t, \partial_x) \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t-t_1-\cdots-t_{k-2}} dt_{k-1}\; f((t)_k, x) =$$

$$= \sum_{\tilde p=0}^{k} \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t-t_1-\cdots-t_{k-\tilde p-2}} dt_{k-\tilde p-1} \left[H^k_{m-\tilde p}(t,x;\partial_{t_k},\cdots,\partial_{t_{k-\tilde p}},\partial_x) f((t)_k,x) \right]_{t_k=\cdots=t_{k-\tilde p+1}=0} \quad (1 \leq k < m)$$

但し，積分路は(U)に於て与えられたもの，f は積分路の上で正則な関数，$t=t_1+\cdots+t_k$ を表わす。H^k_p の主部を h^p_k で表わす。

<u>注意 3.1</u>　この定義の正当性は次の補題 3.1 で示される。また，$H^k_p(t,x;\tau_k,\cdots,\tau_{k-m+p},\xi)$ （τ_ℓ は t_ℓ の余変数）は余変数の添数を除き，k には依存しない形をしているので，特に指示する必要のないときには単に $H_p(t,x;\tau_k,\cdots,\tau_{k-m+p},\xi)$ と記す。

<u>補題 3.1</u>　1°

$$\left[H_{m-\tilde p}(t,x;\partial_{t_k},\cdots,\partial_{t_{k-\tilde p+1}},\partial_t,\partial_x) \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_1-t_1-\cdots-t_{k-\tilde p-2}} dt_{k-\tilde p-1}\, f((t)_k,x) \right]_{t_k=\cdots=t_{k-\tilde p+1}=0}$$

$$= \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t-t_1-\cdots-t_{k-\tilde p-2}} dt_{k-\tilde p-1} \left[H_{m-\tilde p}(\partial_{t_k},\cdots,\partial_{t_{k-\tilde p}},\partial_x) f((t)_k,x) \right]_{t_k=\cdots=t_{k-\tilde p+1}=0} +$$

$$+ \left[H_{m-\tilde p-1}(\partial_{t_k},\cdots,\partial_{t_{k-\tilde p}},\partial_t,\partial_x) \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t-t_1-\cdots-t_{k-\tilde p-3}} dt_{k-\tilde p-2}\, f((t)_k,x) \right]_{t_k=\cdots=t_{k-\tilde p}=0}$$

2°　$H_p(t,x;\tau_k,\cdots,\tau_{k-\tilde p},\xi)$，$h_p(\;\text{〃}\;)$ は τ,ξ に関する p 次の多項式で，次の式から定められる。

$$H_m(t,x;\tau_k,\xi) = H(t,x;\tau_k,\xi)\;,\quad H_0 = h_0 \equiv 1$$

$$H_{m-\tilde p}(\tau_k,\cdots,\tau_{k-\tilde p},\xi) = \frac{1}{\tau_{k-\tilde p}-\tau_{k-\tilde p+1}} \left(H_{m-\tilde p+1}(\tau_k,\cdots,\tau_{k-\tilde p+2},\tau_{k-\tilde p}) - H_{m-\tilde p+1}(\tau_k,\cdots,\tau_{k-\tilde p+1}) \right)$$

h_p は上の式で H_p を h_p で置きかえて得られる。

3°　h_p に対しては，さらに詳しい次の表示が得られる。

$$h_m(t,x;\tau_k,\xi) = (\tau_k+\lambda_{\sigma(1)}(t,x;\xi)) \cdots (\tau_k+\lambda_{\sigma(m)}(t,x;\xi))$$

$$h_{m-\tilde p}(\tau_k,\cdots,\tau_{k-\tilde p},\xi) = \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_i<\cdots<j_{\tilde p}\leq m} (\tau_{k-\tilde p}+\lambda_{\sigma(1)})\cdots(\tau_{k-\tilde p}+\lambda_{\sigma(j_1-1)})\cdot 1_{j_1}\cdot(\tau_{k-\tilde p+1}+\lambda_{\sigma(j_1+1)}) \times$$

$$\times \cdots (\tau_{k-\tilde p+1}+\lambda_{\sigma(j_2-1)})\cdot 1_{j_2}\cdot(\tau_{k-\tilde p+2}+\lambda_{\sigma(j_2+1)}) \cdots (\tau_{k-\tilde p+i-1}+\lambda_{\sigma(j_i-1)})\, 1_{j_i} (\tau_{k-\tilde p+i} +$$

$$+ \lambda_{\sigma(j_i+1)}) \cdots (\tau_{k-1}+\lambda_{\sigma(j_{\tilde p}-1)})\cdot 1_{j_{\tilde p}}\cdot(\tau_k+\lambda_{\sigma(j_{\tilde p}+1)})\cdots(\tau_k+\lambda_{\sigma(m)}) \Big|_{1_{j_1}=\cdots=1_{j_{\tilde p}}\equiv 1}$$

但し，$(\sigma(1),\cdots,\sigma(m))$ は $(1,\cdots,m)$ の任意の置換である。

［証明］ 1°，2° は同時に示す。即ち，1° が成立し，$H_0\equiv 1$ であれば 1° から定まる $H_{m-\tilde{p}}$，$0\le\tilde{p}\le m$ が，定義 3.1 に於る誘導作用素であることは容易にわかる。そこで 1° に於る $H_{m-\tilde{p}}$ と $H_{m-\tilde{p}-1}$ の間に 2° の関係があることを示すのである。さらに，1°，2° の関係は，$H_{m-\tilde{p}}(\tau_k,\cdots,\tau_{k-\tilde{p}},\zeta)\equiv(\tau_{k-\tilde{p}})^{\ell}$，$\ell=0,1,\cdots$ の場合に示されればよいから，これを ℓ に関する帰納法で証明しよう。$\ell=0$ に対しては明らかである。$0\le\ell\le\ell_0$ に対し 1°，2° が成立したとすると，

$$\left[\partial_t^{\ell_0+1}\int_0^t dt_1\cdots\int_0^{t-t_1-\cdots-t_{k-\tilde{p}-2}} dt_{k-\tilde{p}-1}\, f((t)_k,x)\right]_{t_k=\cdots=t_{k-\tilde{p}+1}=0} = \partial_t^{\ell_0+1}\int_0^t\cdots\int_0^{t-\cdots-t_{k-\tilde{p}-2}} dt_{k-\tilde{p}-1}\, f((t)_{k-\tilde{p}},0,\cdots,0,x)=$$

$$=\partial_t^{\ell_0}\left\{\int_0^t\cdots\int_0^{t-\cdots-t_{k-\tilde{p}-2}} dt_{k-\tilde{p}-1}\,\partial_{t_{k-\tilde{p}}} f + \int_0^t\cdots\int_0^{t-\cdots-t_{k-\tilde{p}-3}} dt_{k-\tilde{p}-2}\, f((t)_{k-\tilde{p}-1},0,\cdots,0,x)\right\}$$

ここで第一項に帰納法の仮定を用いれば，

$$=\int_0^t\cdots\int_0^{t-t_1-\cdots-t_{k-\tilde{p}-2}} dt_{k-\tilde{p}-1}\,\partial_{t_{k-\tilde{p}}}^{\ell_0+1} f((t)_{k-\tilde{p}},0,\cdots,0,x) + \left[\sum_{i=0}^{\ell_0-1}\partial_t^{i}\cdot\partial_{t_{k-\tilde{p}}}^{\ell_0-1-i}\int_0^t\cdots\int_0^{t-\cdots-t_{k-\tilde{p}-3}} dt_{k-\tilde{p}-2}\,\partial_{t_{k-\tilde{p}}} f((t)_{k-\tilde{p}},0,\cdots,0,x)\right]_{t_{k-\tilde{p}}=0} + \partial_t^{\ell_0}\int_0^t\cdots\int_0^{t-\cdots-t_{k-\tilde{p}-3}} dt_{k-\tilde{p}-2}\, f((t)_{k-\tilde{p}-1},0,\cdots,0,x)$$

$$=\int_0^t\cdots\int_0^{t-\cdots-t_{k-\tilde{p}-2}} dt_{k-\tilde{p}-1}\left[\partial_{t_{k-\tilde{p}}}^{\ell_0+1} f\right]_{t_k=\cdots=t_{k-\tilde{p}+1}=0} + \left[\sum_{i=0}^{\ell_0}\partial_t^{i}\,\partial_{t_{k-\tilde{p}}}^{\ell_0-i}\int_0^t\cdots\int_0^{t-\cdots-t_{k-\tilde{p}-3}} dt_{k-\tilde{p}-2}\, f\right]_{t_k=\cdots=t_{k-\tilde{p}}=0}$$

となって $\ell=\ell_0+1$ の場合が言えた。次に 3° は $\tilde{p}$ に関する帰納法で証明する。$\tilde{p}=0$ に対しては明らかである。$0\le\tilde{p}\le\tilde{p}_0$ に対して成立したとすると，2° により帰納法の仮定を用いて，

$$h_{m-\tilde{p}-1}(\tau_k,\cdots,\tau_{k-\tilde{p}-1}) = \frac{1}{\tau_{k-\tilde{p}-1}-\tau_{k-\tilde{p}}}\Big(h_{m-\tilde{p}}(\tau_k,\cdots,\tau_{k-\tilde{p}+1},\tau_{k-\tilde{p}-1}) - h_{m-\tilde{p}}(\tau_k,\cdots,\tau_{k-\tilde{p}})\Big)=$$

$$=\frac{1}{\tau_{k-\tilde{p}-1}-\tau_{k-\tilde{p}}}\Bigg(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_{\tilde{p}}\le m}(\tau_{k-\tilde{p}-1}+\lambda_{\sigma(1)})\cdots(\tau_{k-\tilde{p}-1}+\lambda_{\sigma(j_1-1)})\cdot 1_{j_1}\cdot(\tau_{k-\tilde{p}+1}+\lambda_{\sigma(j_1+1)})\cdots\times$$

$$\times(\tau_k+\lambda_{\sigma(m)}) - \sum_{1\le j_1<\cdots<j_{\tilde{p}}\le m}(\tau_{k-\tilde{p}}+\lambda_{\sigma(1)})\cdots(\tau_{k-\tilde{p}}+\lambda_{\sigma(j_1-1)})\cdot 1_{j_1}\cdot(\tau_{k-\tilde{p}+1}+\lambda_{\sigma(j_1+1)})\cdots(\tau_k+\lambda_{\sigma(m)})\Bigg)\Bigg|_{1_{j_1}=\cdots=1_{j_{\tilde{p}}}\equiv 1} =$$

$$= \sum_{1\le j_1<\cdots<j_{\tilde p}\le m} \left(\frac{(\tau_{k-\tilde p-1}+\lambda_{\sigma(1)})\cdots(\tau_{k-\tilde p-1}+\lambda_{\sigma(j_1-1)}) - (\tau_{k-\tilde p}+\lambda_{\sigma(1)})\cdots(\tau_{k-\tilde p}+\lambda_{\sigma(j_1-1)})}{\tau_{k-\tilde p-1} - \tau_{k-\tilde p}} \right) \times$$

$$\times 1_{j_1} (\tau_{k-\tilde p+1}+\lambda_{\sigma(j_1+1)})\cdots(\tau_k+\lambda_{\sigma(m)}) \Big|_{1_{j_1}=\cdots=1_{j_{\tilde p}}=1} =$$

$$= \sum_{1\le j_1<\cdots<j_{\tilde p}\le m} \left(\sum_{1\le j_0<j_1} (\tau_{k-\tilde p-1}+\lambda_{\sigma(1)})\cdots(\tau_{k-\tilde p-1}+\lambda_{\sigma(j_0-1)}) 1_{j_0} (\tau_{k-\tilde p}+\lambda_{\sigma(j_0+1)})\cdots(\tau_{k-\tilde p}+\lambda_{\sigma(j_1-1)}) \right)\Big|_{1_{j_0}=1} \times$$

$$\times 1_{j_1} (\tau_{k-\tilde p+1}+\lambda_{\sigma(j_1+1)})\cdots(\tau_k+\lambda_{\sigma(m)}) \Big|_{1_{j_1}=\cdots=1_{j_{\tilde p}}=1}$$

となって $p=\tilde p_0+1$ の場合が言えた。　　　　（証明終）

系 3.1　任意の置換 σ に対し，上の補題 3° に於る h_p の表示に用いられる各項は，$\tau_k,\cdots,\tau_{k-m+p}$, ξ に関して p 次斉次であるが，さらに $(\tau_k+\lambda_{\sigma(m)}),(\tau_{k-1}+\lambda_{\sigma(m-1)}),\cdots,(\tau_{k-m+p}+\lambda_{\sigma(p)})$ のどれかを因子として唯一個含む。しかもこのとき，$\tau_{k-\mu}+\lambda_{\sigma(m-\mu)}$ $(0\le\mu\le m-p)$ の係数は，τ-変数に関して言えば，$\tau_{k-m+p},\cdots,\tau_{k-\mu}$ に関する多項式で，その係数は $\Omega\times\Omega^*$ で正則である。

［証明］　上の補題の 3° に於る和を（但し $p=m-\tilde p$ と置く），$j_{m-p}<m$ なる項，$j_{m-p}=m$, $j_{m-p-1}<m-1$ なる項，$\cdots$，$j_{m-p}=m$, $j_{m-p-1}=m-1$, $\cdots$, $j_{m-p-\mu}=m-\mu$, $j_{m-p-\mu-1}<m-\mu-1$ なる項，$\cdots$，$j_{m-p}=m$, $j_{m-p-1}=m-1,\cdots$, $j_1=p+1$ なる項の和にまとめ直せば良い。　　　　（証明終）

系 3.2　$\left[h_{m-\tilde p}(t,x;\partial_{t_k}\phi_k,\cdots,\partial_{t_{k-\tilde p}}\phi_k,\partial_x\phi_k)\right]_{t_k=\cdots=t_{k-\tilde p+1}=0} = 0$, $0\le\tilde p\le m-1$

［証明］　系 3.1 より（$\tilde p=m-p$ と置いて），$\left[\partial_{t_{k-\mu}}\phi_k+\lambda_{k-\mu}(t,x;\partial_x\phi_k)\right]_{t_k=\cdots=t_{k-\tilde p+1}}=0$ $(0\le\mu\le\tilde p)$ を言えばよい。但し，σ は $\lambda_{\sigma(i)}=\lambda_{k+i-m}$, $1\le i\le m$ なるものとする。$\partial_{t_{k-\mu}}\phi_k((t)_k,x)$ は補題 2.2 より計算されるが，さらに $\left[(X^\nu,\Xi^\nu)((t)_k,x)\right]_{t_k=\cdots=t_{k-\tilde p+1}=0} = (X^{k-\tilde p},\Xi^{k-\tilde p})((t)_{k-\tilde p},x)$ に注意すれば，求める等式が従う。　　　　（証明終）

さて，(U) の右辺に H を作用させ，誘導作用素を用いて形式的に整理すれば次の式が得られる。

$$(\mathrm{HU})\quad \sum_{p=0}^{m}\left[H_p^{m+1-p}F_{m+1-p}\right]_{t_{m+1-p}=\cdots=t_2=0}+\sum_{k=m+2}^{\infty}\int_0^t dt_1\cdots\int_0^{t-t_1-\cdots-t_{k-m-2}}dt_{k-m-1}\sum_{p=0}^{m}\left[H_p^{k-p}F_{k-p}\right]_{t_{k-p}=\cdots=t_{k-m+1}=0}=$$

$$=\left[F_{m+1}\right]_{t_{m+1}=\cdots=t_2=0}+\sum_{p=1}^{m}\left[H_p^{m+1-p}F_{m+1-p}\right]_{t_{m+1-p}=\cdots=t_2=0}+$$

$$+\sum_{k=m+2}^{\infty}\int_0^t dt_1\cdots\int_0^{t-t_1-\cdots-t_{k-m-2}}dt_{k-m-1}\left(\left[F_k\right]_{t_k=\cdots=t_{k-m+1}=0}+\sum_{p=1}^{m}\left[H_p^{k-p}F_{k-p}\right]_{t_{k-p}=\cdots=t_{k-m+1}=0}\right)$$

§4　<u>擬微分作用素</u>　　複素解析的な関数に作用する擬微分作用素は，Bony-Shapira [1] に於て正則関数に作用するものとして定義されているが，Kobayashi [6] はそれを §3 (U) のような展開をもつ特異性を有する関数の族にまで拡張した。ここでは [6] の中から，後の議論に必要な定義と命題のみを証明抜きで掲げる。証明は [6] を参照せよ。

X は $\mathbb{C}^n$ の原点 0 を含む領域とし，その点を $x=(x_1,\cdots,x_n)$ で表わす。X で正則な関数の全体を $\mathcal{O}(X)$ で表わし，その可算個の積集合 $\prod_{j=-\infty}^{\infty}\mathcal{O}_j$，$\mathcal{O}_j=\mathcal{O}(X)$ に普通の $\mathcal{O}(X)$-加群の構造を入れた空間を $\boldsymbol{\mathcal{O}}(X)$ で表わす。$\boldsymbol{\mathcal{O}}(X)$ の元は，$u=(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}=(u_j)$ などで表わすことにする。

<u>定義 4.1</u>　§3 に於て与えられた f_j，$j\in\mathbb{Z}$ と，$\phi\in\mathcal{O}(X)$ s.t. $\phi(0)=0$，$\partial_x\phi(0)\neq 0$ に対し，($\{f_j\}$, ϕ に関する) <u>形式的係数空間</u> $\mathcal{F}(X)=\mathcal{F}(\{f_j\},\phi;X)$ を，$\mathcal{F}(X)\equiv\{u=(u_j)\in\boldsymbol{\mathcal{O}}(X)$; 任意の $K\Subset X$，$\varepsilon>0$ に対し，適当な $B=B(K)>0$，$S=S(K)>0$，

$C = C(K,\varepsilon) > 0$ が存在して，$\|u_j\|_K \leq B\, j!\, S^j$，$j \geq 0$，$\|u_{-j}\|_K \leq$ $\leq C\,\varepsilon^j/j!$，$j \geq 1$ が成り立つ$\}$ によって定義する。形式的係数空間 $\mathcal{F}(\{f_j\},\phi\,;X)$ に対し，**射影** $\pi = \pi(\{f_j\},\phi)$ を $\mathcal{F}(X) \ni$ $\ni \mathcal{U} = (u_j) \longrightarrow \pi(\mathcal{U}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(\phi)\,u_j$ により定義する。

命題 4.1　$\mathcal{U} \in \mathcal{F}(X)$ ならば，$\pi(\mathcal{U})$ は $\mathbb{C}^n$ の原点の十分小さな近傍から $\{\phi = 0\}$ を除いた開集合の上で正規収束する。また逆に，$\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(\phi)\,u_j$ が $\mathbb{C}^n$ の原点の近傍から $\{\phi=0\}$ を除いた開集合の上で正規収束するならば，適当な $\tilde{X}$ に対し $(u_j) \in \mathcal{F}(\tilde{X})$。

注意 4.1　我々が $(u_j) \in \mathcal{F}(X)$ を考える際には，いつも $\pi((u_j)) =$ $= \sum f_j(\phi)\,u_j$ が念頭にあるのだが，右辺の関数に対し $\mathcal{F}(X)$ の元による表現は一通りではない。以下に述べるように微分作用素は関数に作用するが，擬微分作用素は $\mathcal{F}(X)$ の元に作用する（[6] 参照）。

定義 4.2　$\mathcal{F}(\{f_j\},\phi\,;X)$ に対し，その上に作用する**偏微分作用素** $\partial_{x_i} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$ を，$\partial_{x_i}(u_j) = (v_j)$，$v_j =$ $= (\partial_{x_i}\phi)\cdot u_{j+1} + \partial_{x_i} u_j$ により定義する。また，これに基いて一般の偏微分作用素 $a(x\,;\partial_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x)\,\partial_x^\alpha : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$，但し $a_\alpha(x) \in \mathcal{O}(X)$，も定義される。

命題 4.2　微分作用素 $a(x;\partial_x)$ と $\mathcal{U} = (u_j) \in \mathcal{F}(X)$ に対し，

(1)　$\pi(a(x;\partial_x)\,\mathcal{U}) = a(x;\partial_x)\,\pi\mathcal{U} = a(x;\partial_x)\sum f_j(\phi)\,u_j$

(2)　$a(x;\partial_x)(u_j) = (v_j)$ と置けば，$v_j(x) = \sum_{g=0}^{m}\sum_{\alpha \geq 0}\sum_{\nu \geq 0} \frac{1}{\alpha!\,\nu!}\,\times$

$\times\, a_q^{(\alpha)}(x;\partial_x\phi)\left[\partial_x^\alpha(\tilde{\phi}(x;\tilde{x}))^\nu u_{j+q-|\alpha|+\nu}(x)\right]_{\tilde{x}=x}$，但し，$a_q(x;\xi)$ は $a(x;\xi)$ の q 次斉次部分，$a_q^{(\alpha)}(x,\xi)=(\partial_\xi^\alpha a_q)(x;\xi)$，また，$\tilde{\phi}(x;\tilde{x})=\phi(x)-\phi(\tilde{x})-\sum_{i=1}^n(\partial_{x_i}\phi)(\tilde{x})\cdot(x_i-\tilde{x}_i)$ とする。

注　$\tilde{\phi}$ の定義から，v_j を与える式に於る ν の和は，$0\leq 2\nu\leq|\alpha|$ の範囲で良いことがわかる。

定義 4.3　ω は $\mathbb{C}^n$ の領域とする。形式的な無限和 $p(x;\xi)=\sum_{q=-\infty}^{m}p_q(x;\xi)$ $(m\in\mathbb{Z})$ が $X\times\omega$ に於る擬微分作用素の表象であるとは次の(1)，(2)がみたされるときに言う。

(1)　各 $p_q(x;\xi)$ は，$X\times\omega$ で正則かつ ξ に関し q 次斉次

(2)　任意の $\tilde{K}\Subset X\times\omega$ に対し，適当な $C=C(\tilde{K})>0$ と $B=B(\tilde{K})>0$ が存在して，$\|p_{m-q}\|_{\tilde{K}}\leq C\cdot B^q q!$ $(q=0,1,2,\cdots)$ なる評価をみたす。

$X\times\omega$ に於る擬微分作用素の表象全体の集合を $\mathcal{P}(X\times\omega)$ で表わす。m を p の次数といい，次数 m の表象全体の集合を $\mathcal{P}^m(X\times\omega)$ で表わす。

定義 4.4　定義 4.1 の $\phi\in\mathcal{O}(X)$ が，さらに $\partial_x\phi(0)\in\omega$ をみたすとき，$p(x;\xi)=\sum_{q=-\infty}^{m}p_q(x;\xi)\in\mathcal{P}^m(X\times\omega)$ に対応する，$\mathcal{F}(\{f_j\},\phi;X)$ の上に作用する擬微分作用素 $p(x;\partial_x):\mathcal{F}(X)\longrightarrow\mathcal{F}(X)$ を，$p(x;\partial_x)(u_j)=(v_j)$，$v_j(x)=\sum_{q=-\infty}^{m}\sum_{\alpha\geq 0}\sum_{\nu\geq 0}\frac{1}{\alpha!\nu!}p_q^{(\alpha)}(x;\partial_x\phi)\times\left[\partial_x^\alpha(\tilde{\phi}(x;\tilde{x}))^\nu u_{j+q-|\alpha|+\nu}(x)\right]_{\tilde{x}=x}$ により定義する。

注　この場合も ν に関する和は $0\leq 2\nu\leq|\alpha|$ で良い。

命題 4.3 $(u_j)\in\mathcal{F}(\{t_j\},\phi;X)$ に対し，上の定義による (v_j) はやはり同じ $\mathcal{F}(\{t_j\},\phi;X)$ に属する。

次の合成表象と擬微分作用素の合成の命題は重要である。

定義 4.5 $\mathcal{P}(X\times\omega)$ のふたつの表象 $p(x;\xi)=\sum_{q=-\infty}^{m_1}p_q(x;\xi)$，$r(x;\xi)=\sum_{q=-\infty}^{m_2}r_q(x;\xi)$ に対し，その合成表象 $(p\circ q)(x;\xi)=s(x;\xi)=$ $=\sum_{q=-\infty}^{m_1+m_2}s_q(x;\xi)\in\mathcal{P}(X\times\omega)$ を，$s_q(x;\xi)=\sum_{\substack{q_1+q_2-|\alpha|=q\\ \alpha\geq 0}}\frac{1}{\alpha!}p_{q_1}^{(\alpha)}(x;\xi)\,r_{q_2(\alpha)}(x;\xi)$ により定義する。但し，$r_{q_2(\alpha)}(x;\xi)=(\partial_x^\alpha r_{q_2})(x;\xi)$ である。

命題 4.4 $p=\sum_{q=-\infty}^{m_1}p_q$，$r=\sum_{q=-\infty}^{m_2}r_q\in\mathcal{P}(X\times\omega)$ とする。

(1) $s=p\circ r$ は $\overset{m_1+m_2}{\mathcal{P}}(X\times\omega)$ に属する。

(2) $u\in\mathcal{F}(\{t_j\},\phi;X)$ に対し，合成法則 $(p\circ r)(x;\partial_x)u=$ $=p(x;\partial_x)\circ r(x;\partial_x)u$ が成り立つ。

§5 輸送方程式

この節では，§3 に与えた形式解(U)に於る未知関数 $F_k((t)_k,x)$ 即ち $a_{j,k}((t)_k,x)$ を求める手続きについて論ずる。§3 の終りで(HU)を得たが，未知関数に対する最初の情報として我々はこの式の各項を0に等しく置く。

$$(T)_k^0\quad [F_k]_{t_k=\cdots=t_{k-m+1}=0}+\sum_{p=1}^{m}\left[H_p^{k-p}F_{k-p}\right]_{t_{k-p}=\cdots=t_{k-m+1}=0}=0,\quad k=m+1,m+2,\cdots$$

また，初期条件から得られる情報を記述するため，$I_\ell(\partial_t)\equiv\partial_t^\ell$ と置き，I_ℓ に対する誘導作用素を $I_{\ell,p}^k(\partial t_k,\cdots,\partial t_{k-\ell+p})$，$0\leq p\leq\ell$ で表わす。このとき形式的な手続きによる初期条件は，

$$(T)_k^0\quad [F_k]_{t_k=\cdots=t_1=0}+\sum_{p=1}^{k-1}\left[I_{k-1,p}^{k-p}F_{k-p}\right]_{t_{k-p}=\cdots=t_1=0}=F_k^0(x),\quad k=1,\cdots,m$$

と表わされる。但し，$F_k^0(x) = \delta_{k,\ell_0+1}\, C(x')/x_1^p$ である。

<u>定義 5.1</u> 我々は，上のふたつを合わせたもの，即ち $(T)_k^0$，$k=1,2,\cdots$ を，それぞれの F_k，$k=1,2,\cdots$ に対する <u>0-番目の輸送方程式</u> と呼ぶ。

我々は $(T)_k^0$ を，$[F_k((t)_k,x)]_{t_k=\cdots=t_{\max(k-m+1,1)}=0}$ を F_{k-p}，$p\geqq 1$ によって表わす式であると考え，なお $F_k((t)_k,x)$ の $t_k,\cdots,t_{\max(k-m+1,1)}$ 変数に関する制限をひとつひとつ解除して行くために，次の擬微分方程式系を与える。

<u>定義 5.2</u> F_k に対する <u>ℓ-番目の輸送方程式</u> $(T)_k^\ell$，$\ell=1,\cdots,\min(k,m)$ を次の式により定義する。

$$(T)_k^\ell \quad \left(\partial_{t_\ell} + \lambda_\ell(t_1+\cdots+t_\ell, x;\partial_x)\right)[F_k]_{t_k=\cdots=t_{\ell+1}=0} = 0, \quad k=1,\cdots,m,\ \ell=1,\cdots,k \text{ に対し}$$

$$(T)_k^\ell \quad \left(\partial_{t_{k-m+\ell}} + \lambda_{k-m+\ell}(t_1+\cdots+t_\ell, x;\partial_x)\right)[F_k]_{t_k=\cdots=t_{k-m+\ell+1}=0} = 0, \quad k=m+1,m+2,\cdots \text{ に対し}\ \ell=1,\cdots,m$$

$(T)_k^\ell$，$\ell=0,1,\cdots,\min(k,m)$ を総称して F_k に対する輸送方程式系と呼ぶ。

<u>注</u> 擬微分作用素が作用するのは形式的係数空間であり，F_k もそこの元として考えている。しかし我々は，πF_k の形式的係数空間に於る他の表現については考えないので，以後 F_k と πF_k とは区別せずに用いることにする。

輸送方程式系を $k=1$ から順番に解くことにより，形式的には $F_k((t)_k,x)$ を求める手続きが与えられた。しばらくこの手続きを観察してみよう。まず，$\{(T)_k^\ell,\ \ell=0,\cdots,\min(k,m)\}$ を $k=1$ から

順に見て行くことにより，F_k が一階の非特性的擬微分作用素に対する特異初期値問題を，$\min(k,m)$ 回解くことによって得られる，ということを知ることができる。このことから，F_k は(U)に於て与えられた展開の形式を持つこと，特に ϕ_k が多重特性関数であることが従う。いいかえれば，輸送方程式系の定義から F_k の展開の形は決定される。しかし，逆に(U)に於るような展開の形をもつ F_k の定め方は幾通りもある。例えば[5]に於る定め方は，擬微分作用素を用いないやり方であり，[6]では，特性根が包合的な場合に，より良い定め方を与えている。

$1\leq l$-番目の輸送方程式の効果は，次の補題で示される。

補題 5.2 $\{F_k\}_{k=1,2,\cdots}$ が $\{(T)_k^l,\ l=0,\cdots,\min(k,m)\}$ をみたすならば，F_k，$k\geq m+1$ の 0-番目の輸送方程式の次数を 1 だけ下げることができる。即ち，$(T)_k^0$ に於て，p 次偏微分作用素 H_p^{k-p} に対し適当な $p-1$ 次擬微分作用素 $\tilde{H}_p^{k-p}((t)_{k-p}, x; \partial t_{k-p}, \cdots, \partial t_{k-m}, \partial x)$ が存在して，$[H_p^{k-p}F_{k-p}]_{t_{k-p}=\cdots=t_{k-m+1}=0} = [\tilde{H}_p^{k-p}F_{k-p}]_{t_{k-p}=\cdots=t_{k-m+1}=0}$ をみたす。

[証明] H_p^{k-p} の主部 $h_p^{k-p} = h_p(t,x;\tau_{k-p},\cdots,\tau_{k-m},\xi)$ に対し，系 3.1 を適用する。但し，σ は $\lambda_{k-p-\mu} = \lambda_{\sigma(m-\mu)}$，$\mu=0,\cdots,m-p$ をみたす任意の置換とする。従って，$h_p(t,x;\tau_{k-p},\cdots,\tau_{k-m},\xi) =$
$$= \sum_{\mu=0}^{m-p} e_{p,\mu}(t,x;\tau_{k-p-\mu},\cdots,\tau_{k-m},\xi)(\tau_{k-p-\mu}+\lambda_{k-p-\mu}(t,x;\xi))$$
なる表示が得られる。ここに $e_{p,\mu}$ は，τ-変数については多項式，(τ,ξ)-

変数に関しては $p-1$ 次同次で，$(t, x; \xi)$ に関しては $\Omega \times \Omega^*$ で正則な関数である。いま，擬微分作用素 $e_{p,\mu}(t, x; \partial_{t_{k-p-\mu}}, \cdots, \partial_{t_{k-m}}, \partial_x) \circ$ $\circ(\partial_{t_{k-p-\mu}} + \lambda_{k-p-\mu}(t, x; \partial_x))$ を持ち込むと，これに対し $\Big[e^{k-p}_{p,\mu} \circ$ $\circ (\partial_{t_{k-p-\mu}} + \lambda_{k-p-\mu}) F_{k-p} \Big]_{t_{k-p} = \cdots = t_{k-m+1} = 0} = \Big[e^{k-p}_{p,\mu} \circ (\partial_{t_{k-p-\mu}} + \lambda_{k-p-\mu}) \cdot$ $\cdot [F_{k-p}]_{t_{k-p} = \cdots = t_{k-p-\mu+1} = 0} \Big]_{t_{k-p-\mu} = \cdots = t_{k-m+1} = 0} = 0$ が成り立つ。但し，ここで F_{k-p} に対する $m-\mu$ 番目の輸送方程式を適用する。故に，

$$[H^{k-p}_p F_{k-p}]_{t_{k-p} = \cdots = t_{k-m+1} = 0} = \Big[\Big(H^{k-p}_p - \sum_{\mu=0}^{m-p} e^{k-p}_{p,\mu} \circ (\partial_{t_{k-p-\mu}} + \lambda_{k-p-\mu}) \Big) F_{k-p} \Big]_{t_{k-p} = \cdots = t_{k-m+1} = 0}$$

を得る。ところで，$\sum_{\mu=0}^{m-p} e^{k-p}_{p,\mu} \circ (\partial_{t_{k-p-\mu}} + \lambda_{k-p-\mu})$ の表象は定義4.5の同次表象展開をもつが，その最大次数 p 次斉次の部分は h^{k-p}_p に等しいから，$\tilde{H}^{k-p}_p = H^{k-p}_p - \sum_{\mu=0}^{m-p} e^{k-p}_{p,\mu} \circ (\partial_{t_{k-p-\mu}} + \lambda_{k-p-\mu})$ と置けば，$\tilde{H}^{k-p}_p$ は $p-1$ 次擬微分作用素で命題の条件をみたす。

（証明終）

<u>定義 5.2′</u>　$k \geq m+1$ に対する $(\mathrm{T})^0_k$ に於て，H^{k-p}_p を上の $\tilde{H}^{k-p}_p$ で置き換えた式を $(\tilde{\mathrm{T}})^0_k$ で表わし，やはり<u>0-番目の輸送方程式</u>と呼ぶ。また，$(\mathrm{T})^0_k$ を $(\tilde{\mathrm{T}})^0_k$ で置きかえた輸送方程式系 $(\tilde{\mathrm{T}})^l_k$，$l=0, \cdots, m$ をやはり<u>輸送方程式系</u>と呼ぶ。今後輸送方程式とは，特に断わらない限りこの意味のものとする。

§ 6　<u>優関数評価</u>　　この節では，輸送方程式系をみたす F_k をその展開 $F_k((t)_k, x) = \sum_j f_j(\phi_k((t)_k, x))\, a_{j,k}((t)_k, x)$ の各係数 $a_{j,k}((t)_k, x)$ を定めることにより決定し，同時に $a_{j,k}$ の優関数

評価を求める。まず，§4で与えた擬微分作用素の定義と命題とを用いて，輸送方程式系を$a_{j,k}$に関するものに書きかえる。

$$(A)^0_{j,k}\qquad [a_{j,k}]_{t_k=\cdots=t_{k-m+1}=0}+\sum_{p=1}^{m}\Bigg[\sum_{q=-\infty}^{p-1}\sum_{0\le\alpha}\sum_{0\le 2\nu\le|\alpha|}\frac{1}{\alpha!\,\nu!}\left(\tilde{H}^{k-p}_{p,q}\right)^{(\alpha)}(t,x;\partial_{t_*}\phi_{k-p},\partial_x\phi_{k-p})\times$$
$$\times\Big[\partial^{\alpha}_{(t_*,x)}\Big(\tilde{\phi}_{k-p}((t)_{k-p},x;(\tilde{t})_{k-p},\tilde{x})^{\nu}a_{j+q-|\alpha|+\nu,k-p}((t)_{k-p},x)\Big)\Big]_{((\tilde{t})_{k},\tilde{x})=((t)_{k-p},x)}\Bigg]_{t_{k-p}=\cdots=t_{k-m+1}=0}=0,$$

$(k\ge m+1)$ 但し，ここに$\tilde{H}^{k-p}_{p,q}(t,x;\tau_{k-p},\cdots,\tau_{k-m},\xi)$は，擬微分作用素$\tilde{H}^{k-p}_{p}$の表象の同次関数展開の$q$次斉次部分である。また，$(t_*)$は$(t_{k-p},\cdots,t_{k-m})$を表わし，$\tilde{\phi}_{k-p}$は定義4.4に於て$\phi$を$\phi_{k-p}$に置かえて得られる$\tilde{\phi}$である。また，$1\le k\le m$に対しては，

$$(A)^0_{j,k}\qquad [a_{j,k}]_{t_k=\cdots=t_1=0}+\sum_{p=1}^{k-1}\Bigg[\sum_{0\le\alpha}\sum_{0\le 2\nu\le|\alpha|}\frac{1}{\alpha!\,\nu!}\left(I^{k-p}_{k-1,p}\right)^{(\alpha)}(\partial_{t_*}\phi_{k-p})\cdot\Big[\partial^{\alpha}_{t_*}\tilde{\phi}_{k-p}($$
$$((t)_{k-p},x;(\tilde{t})_{k-p},\tilde{x})^{\nu}a_{j+p-|\alpha|+\nu,k-p}((t)_{k-p},x)\Big]_{((\tilde{t})_{k-p},\tilde{x})=((t)_{k-p},x)}\Bigg]_{t_{k-p}=\cdots=t_1=0}=\delta_{k,l_0+1}\delta_{j,-1}\times$$
$$\times(-1)^{p-1}C(x')/(p-1)!$$

を得る。但し，ここに(t_*)は$(t_{k-p},\cdots,t_1)$を表わす。さらに$l=1,\cdots,\min(k,m)$に対し，次を得る。

$$(A)^l_{j,k}\qquad \partial_{t_{k-m+l}}[a_{j,k}((t)_k,x)]_{t_k=\cdots=t_{k-m+l+1}=0}+\sum_{|\alpha|\ge 1}\sum_{0\le 2\nu\le|\alpha|}\frac{1}{\alpha!\,\nu!}\lambda^{(\alpha)}_{k-m+l}(t,x;\partial_x\phi_{k-m+l})\times$$
$$\times\Big[\partial^{\alpha}_x\tilde{\phi}_{k-m+l}((t)_{k-m+l},x;(\tilde{t})_{k-m+l},\tilde{x})^{\nu}[a_{j+1-|\alpha|+\nu,k}((t)_k,x)]_{t_k=\cdots=t_{k-m+l+1}=0}\Big]_{((\tilde{t})_{k-m+l},\tilde{x})=((t)_{k-m+l},x)}=0,$$

$(k\ge m+1)$，但しここで系2.1と(亜)が陰に用いられている。

$$(A)^l_{j,k}\qquad \partial_{t_l}[a_{j,k}((t)_k,x)]_{t_k=\cdots=t_{l+1}=0}+\sum_{|\alpha|\ge 1}\sum_{0\le 2\nu\le|\alpha|}\frac{1}{\alpha!\,\nu!}\lambda^{(\alpha)}_{l}(t,x;\partial_x\phi_l)\times$$
$$\times\Big[\partial^{\alpha}_x\tilde{\phi}_{l}((t)_l,x;(\tilde{t})_l,\tilde{x})^{\nu}[a_{j+1-|\alpha|+\nu,k}((t)_k,x)]_{t_k=\cdots=t_{l+1}=0}\Big]_{((\tilde{t})_l,\tilde{x})=((t)_l,x)}=0\quad(k=1,\cdots,m)$$

<u>定義 6.1</u>　$k\ge 1$，$-\infty<j<\infty$に対する$(A)^l_{j,k}$，$l=0,1,\cdots,\min(k,m)$を，$a_{j,k}((t)_k,x)$に対する<u>輸送方程式系</u>といい，各$(A)^l_{j,k}$を，$a_{j,k}$に対する<u>l-番目の輸送方程式</u>という。

我々は$(A)^l_{j,k}$により$a_{j,k}((t)_k,x)$を定めるのだが，$\kappa\le k-1$に

対する全ての $a_{\eta,\kappa}$ と，$\eta \le j-1$ に対する全ての $a_{\eta,k}$ が与えられた時 $a_{j,k}$ が一意的に定められることは明らかであろう。$a_{j,k}$ を定めるために $(A)^{\ell}_{j,k}$，$\ell=0,\cdots,m_1=\min(k,m)$ に登場する $a_{\eta,\kappa}$ は，$(A)^{0}_{j,k}$ に於ては $\max(1,k-m)\le \kappa \le k-1$，$\eta \le j+k-\kappa-1$ であり，$(A)^{\ell}_{j,k}$ $1\le \ell \le m_1$ に於ては $\kappa=k$，$\eta\le j-1$ である（図 6.1 の斜線部）。この事実と $(A)^{0}_{j,k}$（$1\le k\le m$）の与え方とから，$a_{j,k}$ の中には実は $\equiv 0$ と置いて構わない多くと (j,k) が存在することがわかる。図 6.2 の斜線部の外側にある (j,k) がこのような添数にあたるが，精密に記述するため次の関数を導入する。

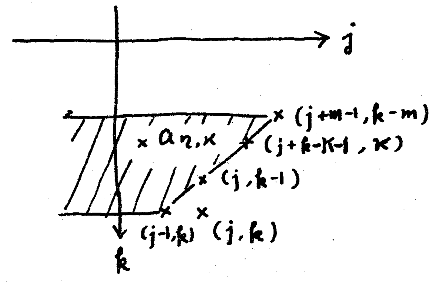

図 6.1

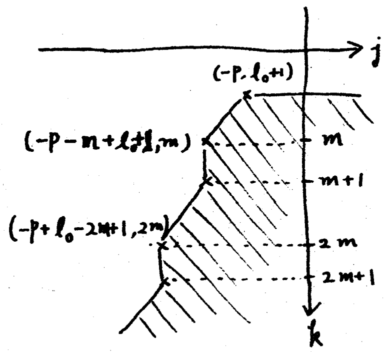

図 6.2

> <u>定義 6.2</u>　<u>添数関数</u> $N(j_1,k_1)$ を次の式で定義する。
>
> $$N(j_1,k_1) = j_1 + \left[\frac{m-1}{m}k_1\right] \quad ,\ j_1,k_1\in\mathbb{Z}$$

このとき，$N(j+p-\ell_0,k)<0$ なる (j,k) 及び $k<\ell_0+1$ なる (j,k) に対し，$a_{j,k}\equiv 0$ と置くことができる。

> <u>規約 6.1</u>　$N(j+p-\ell_0,k)<0$ なる (j,k) 及び $k<\ell_0+1$ なる (j,k) に対し $a_{j,k}\equiv 0$ と定める。

さて，優関数評価のために次の関数を準備する。

> <u>定義 6.3</u>　$\Theta_N(r,t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^N \frac{1}{r-t} = \frac{N!}{(r-t)^{N+1}}$ ，$N=0,1,2,\cdots$

と置く。Nをこの関数の**指数**と呼ぶ。

命題 6.1　$\Theta_N(r,t)$ は次の性質をみたす。1° $\frac{d}{dt}\Theta_N = \Theta_{N+1}$，2° $\Theta_N \ll \frac{r}{N+1}\Theta_{N+1}$，従って $N_1 \leq N_2$ に対し $\Theta_{N_1} \ll \frac{N_1!}{N_2!} r^{N_2-N_1}\Theta_{N_2}$，3° $u(x) \ll \Theta_N(S)$，$S = \rho x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i$ ならば，$\forall \beta = (\beta_0,\cdots,\beta_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ に対し $\partial_x^\beta u(x) \ll \rho^{\beta_0}\Theta_{N+|\beta|}$，4° $L > r$ ならば $\frac{1}{L-t}\Theta_N(r,t) \ll \frac{1}{L-r}\Theta_N(r,t)$

証明略

定理 6.1　次の優関数評価をみたすように $a_{j,k}((t)_k,x)$ を定めることができる。

$$(\bar{A})\qquad a_{j,k}((t)_k,x) \ll C_0 C_1^{j_1+k}\Theta_{N(j_1,k)}(r,S)$$

但し，$S = \rho\sum_{l=1}^{k} t_l + \sum_{i=1}^{n} x_i$，$\rho$，$C_0$，$C_1$，$r$ は j,k によらぬ適当な正定数，また $j_1 = j + p - l_0$ である。

証明は輸送方程式系 $(A)_{j,k}^{l}$ から優方程式系を導き出し，$(\bar{A})$ がその解となるように定数達を定めることができるということを，帰納法を用いて証明する，という方針で行う。そのためにまず，優関数評価に関する補題をいくつか掲げる。

補題 6.1　$f(x,y)$ を $\left((x,y)\in\right)\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m$ の原点の近傍で正則な関数とし，$f(x,y) \ll F(x,y)$ とする。そのとき，$y_j = \phi_j(x)$ が $\phi_j(0)=0$，$1 \leq j \leq m$ をみたし，かつ $\Phi_j(0) = 0$ なる $\Phi_j(x)$ に対し $\phi_j(x) \ll \Phi_j(x)$，$1 \leq j \leq m$ ならば，$f(x,\phi(x)) \ll F(x,\Phi(x))$ が成立つ。

証明略

<u>補題 6.2</u> 任意の i, p, μ, k に対し，それらによらぬ定数 A，$L>0$ が存在して次の優関数評価が成り立つ。

1° $(\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \lambda_i)(t_1+\cdots+t_k, x; \partial_x \phi_k((t)_k, x)) \ll \dfrac{A(|\alpha|+|\beta|)!}{(L-\sum_{\ell=1}^{k} t_\ell - \sum_{i=1}^{n} x_i)^{(|\alpha|+|\beta|+1)}}$

2° $\left[(\partial_{(\tau_*, \xi)}^\alpha e_{p,\mu})(t_1+\cdots+t_{k-p}, x; \partial_{(t_*, x)} \phi_{k-p}((t)_{k-p}, x))\right]_{t_{k-p}=\cdots=t_{k-m+1}=0} \ll \dfrac{A|\alpha|!}{(L-\sum_{\ell=1}^{k-m} t_\ell - \sum_{i=1}^{n} x_i)^{|\alpha|+1}}$

但し，$e_{p,\mu}(t, x; \tau_*, \xi)$ は $h_p(t, x; \tau_{k-p}, \cdots, \tau_{k-m}, \xi) = \sum_{\mu=0}^{m-p} e_{p,\mu}(t, x; ; \tau_{k-p-\mu}, \cdots, \tau_{k-m}, \xi)(\tau_{k-p-\mu} + \lambda_{k-p-\mu}(t, x; \xi))$ により定義される（p15，補題 5.2 の証明参照）。

［証明］1° $\phi_k((0)_k, x) = x_1$ であるから，補題 2.1 をより精密にした，$\phi_k((t)_k, x) - x_1 \ll \dfrac{A_1}{L_1 - \sum_{\ell=1}^{k} t_\ell - \sum_{i=1}^{n} x_i} - \dfrac{A_1}{L_1 - \sum_{i=1}^{n} x_i}$ なる優評価が成り立つ（A_1，$L_1>0$ は k によらぬ定数）。一方，適当な A_2，$L_2>0$ に対し $\lambda_i(t_1+\cdots+t_k, x; \xi) \ll \dfrac{A_2}{L_2 - \sum_{\ell=1}^{k} t_\ell - \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} (\xi - e)_i}$ が成り立つから，$(\xi - e)_i = (\partial_x \phi - e)_i \ll \dfrac{A_1}{L_1 - \sum_\ell t_\ell - \sum_i x_i} - \dfrac{A_1}{L_1 - \sum x_i}$ に対し補題 6.1 を適用できる。その結果 $\lambda_i(\cdots) \ll \dfrac{A_2}{L_2 - \sum t_\ell - \sum x_i - \left(\frac{nA_1}{L_1 - \sum t_\ell - \sum x_i} - \frac{nA_1}{L_1 - \sum x_i}\right)}$ を得るから，A，$L>0$ を適当にとり直せば λ_i に対する求める評価を得る。$\lambda_{i(\beta)}^{(\alpha)}$ に対する評価も同様である。2° 系 2.1 及び補題 2.2 より $\left[(\partial t_* \phi_{k-p}((t)_{k-p}, x), \partial_x \phi_{k-p})\right]_{t_{k-p}=\cdots=t_{k-m+1}=0} = (-\lambda_*(t_1+\cdots+t_{k-m}, , \partial_x \phi_{k-m}((t)_{k-m}, x)), \partial_x \phi_{k-m})$ であるから，$e_{p,\mu}(\cdots; -\lambda_*(t_1+\cdots+t_{k-m}, \partial_x \phi_{k-m}), \partial_x \phi_{k-m})$ に対し優評価すればよい。$e_{p,\mu}(t, x; \tau_*, \xi)$ は k に依らぬ関数形をもつから，これを $(t, x; \tau_* - \lambda_*(0,0;e), \xi - e) \sim (0,0;0,0)$ の回りで展開することにより，k によらぬ A_3，$L_3>0$ により

$$e_{p,\mu}(t_1+\cdots+t_{k-m}, x; \tau_*, \xi) \ll \frac{A_3}{L_3 - \sum_{\ell=1}^{k-m} t_\ell - \sum x_i - \sum_{*=k-m}^{k-p} (\tau_* - \lambda_*(0,0;e)) - \sum (\xi - e)_i}$$

なる優評価が得られる。従って $\tau_* - \lambda_*(0,0;e) = \lambda_*(t_1+\cdots+t_{k-m}, x; \partial_x\phi_{k-m}) -$
$- \lambda_*(0,0;e) \ll \dfrac{A_4}{L_4 - \sum_{\ell=1}^{k-m} t_\ell - \Sigma x_i} - \dfrac{A_4}{L_4}$, $(\xi - e)_i = (\partial_x \phi_{k-m} - e)_i \ll \dfrac{A_5}{L_5 - \Sigma t_\ell - \Sigma x_i} -$
$- \dfrac{A_5}{L_5 - \Sigma x_i}$ に対し補題 6.1 を適用することができる（但し，上の優評価には 1° の結果を用いている）。その結果 $e_{p,\mu}(t_1+\cdots+t_{k-m},$
$, x; -\lambda_*(\cdots), \partial_x\phi_{k-m}) \ll \dfrac{A_3}{L_3 - \sum_{\ell=1}^{k-m} t_\ell - \Sigma x_i - \left(\frac{(m-p)A_4}{L_4 - \Sigma t_\ell - \Sigma x_i} - \frac{(m-p)A_4}{L_4}\right) - \left(\frac{nA_5}{L_5 - \Sigma t_\ell - \Sigma x_i} - \frac{nA_5}{L_5 - \Sigma x_i}\right)}$
を得るから，$A, L > 0$ を適当にとり直せば $e_{p,\mu}$ に対する求める優評価を得る。$e_{p,\mu}^{(\alpha)}$ に対する優評価も同様である。(証明終)

<u>補題 6.3</u>　$\alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ に対し，次の等式が成立つ。
$$\sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ |\alpha| = \lambda, |\beta| = \mu}} \frac{1}{\alpha!}\binom{\alpha}{\beta} = \frac{n^\lambda}{\lambda!}\binom{\lambda}{\mu}$$

[証明] $\dfrac{((1+y_1)+\cdots+(1+y_n))^\lambda}{\lambda!} = \sum_{|\alpha|=\lambda} \dfrac{1}{\alpha!}(1+y_1)^{\alpha_1}\cdots(1+y_n)^{\alpha_n} =$
$= \sum_{|\alpha|=\lambda} \dfrac{1}{\alpha!} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} y_1^{\beta_1}\cdots y_n^{\beta_n} = \sum_{\mu=1}^{\lambda} \sum_{\substack{\beta \leq \alpha \\ |\alpha|=\lambda, |\beta|=\mu}} \dfrac{1}{\alpha!}\binom{\alpha}{\beta} y_1^{\beta_1}\cdots y_n^{\beta_n}$，ここで，
$y_1 = \cdots = y_n = y$ と置き，両辺の y^μ の係数を比較すればよい。(証明終)

<u>補題 6.4</u>　$\alpha, \beta \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^{n+\ell}$，$|\alpha| = \lambda \geq 2\nu$ とする。$(A)_{j,k}^{\ell}$（定義 6.1）を記述する時用いられた $\tilde{\Phi}_k$ と，$\Theta_N(r,t)$，$t = \rho\sum_{\ell=1}^{k} t_\ell + \sum_{i=1}^{n} x_i$（定義 6.3）に対し，次の優関数評価が成り立つ。
$$\sum_{|\alpha|=\lambda} \frac{1}{\alpha!}\left[\partial_{(t_*,x)}^{\alpha}\left(\tilde{\Phi}_k((t)_k, x; (\tilde{t})_k, \tilde{x})^\nu \Theta_N(r,t)\right)\right]_{((\tilde{t})_k,\tilde{x}) = ((t)_k, x)} \ll$$
$$\ll (n+\ell)^\lambda \sum_{\mu=2\nu}^{\lambda} \frac{A^\nu}{(\lambda-\mu)!} \rho^{\lambda-\mu}\left(\frac{2}{L-r}\right)^{\mu-\nu+1} \Theta_{N+\lambda-\mu}(r,t)$$
但し，$\rho > 1$，A, L は k によらぬ正定数で $L > r$ である。また，(t_*) は $(t_{k-\ell+1}, \cdots, t_k)$ を表わすものとする。

[証明] $\tilde{\phi}_k((t)_k, x; (\tilde{t})_k, \tilde{x}) = \phi_k((t)_k, x) - \phi_k((\tilde{t})_k, \tilde{x}) - \sum(\partial_{(t_*,x)}\phi_k)((\tilde{t})_k, \tilde{x}) \cdot (((t)_k, x) - ((\tilde{t})_k, \tilde{x})) =$
$= \sum_{|\gamma| \geq 2} \dfrac{1}{\gamma!}(\partial_{((t)_k,x)}^{\gamma}\phi_k)((\tilde{t})_k, \tilde{x}) \cdot (((t)_k, x) - ((\tilde{t})_k, \tilde{x}))^\gamma$。ここで，$y = (y_1, \cdots, y_{k+n}) \equiv ((t)_k, x) - ((\tilde{t})_k, \tilde{x})$ と

置くと，$\circledast_\alpha \equiv \left[\partial^{\alpha}_{(t_*,x)}\left(\tilde{\phi}_k((t)_k,x;(\tilde{t})_k,\tilde{x})\right)^{\nu}\theta_N(r,t)\right]_{((\tilde{t})_k,\tilde{x})=((t)_k,x)} = \sum_{0\le\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\left[\partial^{\beta}_{(t_*,x)}\tilde{\phi}^{\nu}\right]_{(\tilde{\ },\ )=(\ ,\ )}\partial^{\alpha-\beta}_{(t_*,x)}\theta_N =$

$= \sum_{0\le\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\left[\partial^{\beta}_{y}\left(\sum_{|\gamma|\ge 2}\frac{1}{\gamma!}\left(\partial^{\gamma}_{((t)_k,x)}\phi_k\right)((t)_k,x)\cdot y^{\gamma}\right)^{\nu}\right]_{y=0}\cdot\rho^{|\alpha'|-|\beta'|}\,\theta_{N+|\alpha|-|\beta|}$。ここで，補題2.1.1°より $\phi_k((t)_k,x) \ll \dfrac{A_1}{L_1-\sum_{\ell=1}^{k}t_\ell-\sum x_i}$ なる $A_1, L_1>0$ が存在するから，

$\sum_{|\gamma|\ge 2}\frac{1}{\gamma!}\left(\left(\partial^{\gamma}_{((t)_k,x)}\phi_k\right)((t)_k,x)\right)\cdot y^{\gamma} \ll \sum_{|\gamma|\ge 2}\frac{1}{\gamma!}\frac{A_1|\gamma|!}{(L_1-\sum t_\ell-\sum x_i)^{|\gamma|+1}}\cdot y^{\gamma} = \frac{A_1\left(\sum_{j=1}^{k+n}y_j\right)^2}{(L_1-\sum t_\ell-\sum x_i)^2}\cdot\frac{1}{L_1-\sum t_\ell-\sum x_i-\sum}$

を得るが，この右辺はさらに適当な $A, L>0$ をとり直せば，$\dfrac{A(\sum y_j)^2}{L-\sum t_\ell-\sum x_i-\sum y_j}$ により優評価される。$|\beta|\ge 2\nu$ に対し，$\left[\partial^{\beta}_{y}\left(\dfrac{(\sum y_j)^2}{L-\sum t_\ell-\sum x_i-\sum y_j}\right)^{\nu}\right]_{y=0} =$

$= \binom{|\beta|}{2\nu}(2\nu)!\,\dfrac{\nu(\nu+1)\cdots(|\beta|-\nu)}{(L-\sum t_\ell-\sum x_i)^{|\beta|-\nu+1}} \ll \dfrac{|\beta|!\,2^{|\beta|-\nu}}{(L-\sum t_\ell-\sum x_i)^{|\beta|-\nu+1}}$ であるから $r<L$ ならば，$\circledast_\alpha \ll \sum_{\substack{0\le\beta\le\alpha\\|\beta|\ge 2\nu}} A^{\nu}\binom{\alpha}{\beta}|\beta|!\,\rho^{|\alpha'|-|\beta'|}\left(\dfrac{2}{L-r}\right)^{|\beta|-\nu+1}\theta_{N+|\alpha|-|\beta|}(r,t)$ が，命題6.1.4°を用いて得られる。これと補題6.3を組合せれば，$\sum_{|\alpha|=\lambda}\frac{1}{\alpha!}\circledast_\alpha$ に対する求める評価を得る。（証明終）

［定理の証明］ $\eta<k$ なる全ての $a_{\eta,k}$ と，$\eta<j$ なる全ての $a_{\eta,k}$ に対し $(\bar{A})$ が成り立つと仮定して $a_{j,k}$ に対する評価を導く。

<u>第一段</u> $(A)^{\ell}_{j,k}$, $\ell=1,\cdots,m$ に対する優方程式系。簡単のため，$k\ge m+1$ と仮定する。$1\le k\le m$ に対しても同様にできる。$(A)^{\ell}_{j,k}$ の非斉次部分を帰納法の仮定と補題6.2，6.4を用いて評価する。

$$\sum_{|\alpha|\ge 2}\sum_{\substack{0\le 2\nu\le|\alpha|\\|\alpha|-\nu\ne 1}}\frac{1}{\alpha!\,\nu!}\lambda^{(\alpha)}_{k-m+\ell}\left(\sum_{\ell=1}^{k-m+\ell}t_\ell, x;\partial_x\phi_{k-m+\ell}\right)\left[\partial^{\alpha}_{x}\left(\tilde{\phi}_{k-m+\ell}((t)_{k-m+\ell},x;(\tilde{t})_{k-m+\ell},\tilde{x})\left[a_{j+1-|\alpha|+\nu,k}((t)_k,x)\right]_{t_k=\cdots=t_{k-m+\ell+1}=0}\right)\right]_{((\tilde{t})_{k-m+\ell},\tilde{x})=((t$$

$$\ll \sum_{\lambda=2}^{\infty}\sum_{\substack{0\le 2\nu\le\lambda\\\lambda-\nu\ne 1}}\frac{A_1\lambda!\,n^{\lambda}}{\left(L-\sum_{\ell=1}^{k-m+\ell}t_\ell-\sum x_i\right)^{\lambda+1}}\frac{A_2^{\nu}}{\nu!}\sum_{\mu=2\nu}^{\lambda}\frac{1}{(\lambda-\mu)!}\left(\frac{2}{L-r}\right)^{\mu-\nu+1}C_0C_1^{j_1+1-\lambda+\nu+k}\theta_{N(j_1+1-\lambda+\nu,k)}(r,t) \ll$$

$$\ll \sum_{\lambda_1=2}^{\infty}\frac{2A_1}{(L-r)^2}\cdot\left(\frac{n}{L-r}\right)^{\lambda_1}\sum_{\nu=0}^{\lambda_1}\sum_{\mu_1=\nu}^{\lambda_1}\frac{(\lambda_1+\nu)!}{\nu!\,\mu_1!\,(\lambda_1-\mu_1)!}\left(\frac{nA_2}{L-r}\right)^{\nu}\left(\frac{2r}{L-r}\right)^{\mu_1}C_0C_1^{j_1-\lambda_1+k+1}\eta_{N(j_1,k)+1}$$

（但し命題6.1.2°及 $\lambda_1=\lambda-\nu$, $\mu_1=\mu-\nu$）$\ll \sum_{\lambda_1=2}^{\infty}\dfrac{2A_1}{(L-r)^2}\cdot\left(\dfrac{n}{L-r}\right)^{\lambda_1}\left(1+\dfrac{nA_2+2r}{L-r}\right)^{2\lambda_1}C_0C_1^{j_1-\lambda_1+k+1}\eta_{N(j_1,k)+1}$．

ここで優方程式系 $(\bar{A})^{\ell}_{j,k}$ を，$\partial_{t_{k-m+\ell}}\left[A_{j,k}(t)\right]_{t_k=\cdots=t_{k-m+\ell+1}=0} \gg \sum_{i=1}^{n}\dfrac{A_1}{L-\sum t_\ell-\sum x_i}\partial_{x_i}\left[A_{j,k}\right]_{''} + \dfrac{n^2A_1}{(L-\sum t_\ell-\sum x_i)^2}\left[A_{j,k}\right]_{''}$ $+\left(\sum_{\lambda_1=2}^{\infty}\dfrac{A_1}{(L-r)^2}\left(\dfrac{n(nA_2+2L)}{(L-r)^3}\right)^{\lambda_1}C_0C_1^{j_1-\lambda_1+k+1}\right)\left[\eta_{N(j_1,k)+1}\right]_{''}$，により定義すれば，こ

れが $A_{j,k}(t) = C_0 C_1^{j_1+k}\theta_{N(j,k)}(r,t)$ なる解をもつためには，$\rho > \frac{nA_1}{L-r} + \frac{n^2}{(L-r)^2}A_1 + \frac{1}{C_1}\cdot\frac{A_1(n(nA_2+2L))^2}{(L-r)^8}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\left(\frac{\frac{n(nA_2+2L)^2}{(L-r)^3}}{C_1}\right)^{\lambda_1}$，であればよい。$C_{1,0} > \frac{n(nA_2+2L)^2}{(L-r)^3}$ に対し $\rho_0 \equiv \rho(C_{1,0})$ が定まるが，任意の $C_1 \geq C_{1,0}$ に対してもこの ρ_0 で良い。

<u>第二段</u>　$(A)^0_{j,k}$ について。(1) $1 \leqq k \leqq m$ の場合。この場合だけは $a_{j,k} \ll C_0 B_1^{j_1} B_2^{k}\theta_{N(j,k)}$，$B_1, B_2$ は j, k によらぬ正定数，の形で優評価する。後で $C_1 \equiv \max(B_1, B_2)$ と置けば求める形の評価に帰着される。非斉次項，$* \equiv \sum_{p=1}^{k-1}\left[\sum_{0\leq\alpha}\sum_{0\leq 2\nu\leq|\alpha|}\frac{1}{\alpha!\,\nu!}I_{k-1,p}^{k-p\,(\alpha)}(\partial_{t_*}\phi_{k-p})\times\right.$ $\left.\times\left[\partial^{\alpha}_{t_*}\tilde{\phi}_{k-p}((t)_{k-p}, x; (\tilde{t})_{k-p}, \tilde{x})^{\nu} a_{j+p-|\alpha|+\nu,\,k-p}((t)_{k-p}, x)\right]_{((\tilde{t})_{k-p}, \tilde{x}) = ((t)_{k-p}, x)}\right]_{t_{k-p}=\cdots=t_1=0}$ の優関数評価は，$I_{k-1,p}^{k-p}(\tau_*)$ が p 次の定数係数多項式であるから α に関する和が j, k によらぬ有限和になり，さらに補題 2.2, 6.4, 命題 6.1.2° を用いて整理すれば，次の形に帰着される。$* \ll \ll \sum_{p=1}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{p}\rho^p D\cdot C_0 B_1^{j_1-\mu+p} B_2^{k-p}\theta_{N(j,k)}$，ここに $D > 0$ は，j, k によらない定数。ここで優方程式 $(\bar{A})^0_{j,k}$ を，$[A_{j,k}(t)]_{t_k=\cdots=t_1=0} \gg D\sum_{p=1}^{k-1}\sum_{\mu=0}^{p}\rho^p C_0 B_1^{j_1-\mu+p} B_2^{k-p}[\theta_{N(j,k)}]_{\prime\prime}$，，$(j,k) \neq (-p, l_0+1)$ に対して，$[A_{-p,l_0+1}(t)]_{t_k=\cdots=t_1=0} \gg \frac{A_1}{L_1 - \sum x_i}$ により定義する。但し，$\frac{C(x')}{(p-1)!} \ll \frac{A_1}{L_1-\sum x_i}$ とする。これが $A_{j,k}(t) = C_0 B_1^{j_1} B_2^{k}\theta_{N(j,k)}(t)$ なる解を持つためには，$C_0 B_1^{-l_0}\cdot B_2^{l_0+1} \geq A_1$，$r < L_1$ かつ $1 > \left(D\cdot\sum_{p=0}^{k-2}\rho^{p+1}B_1^{-\mu+p+1}\times\right.$ $\left.\times B_2^{-p}\right)\cdot B_2^{-1}$ であればよい。$\rho = \rho_0$ を与えた時，このような B_1, $B_2 > 0$ の存在は明らかである。(2) $k \geqq m+1$ の場合。$(A)^0_{j,k}$ の非斉次項，$** \equiv \sum_{p=1}^{m}\left[\sum_{q=-\infty}^{p-1}\sum_{0\leq\alpha}\sum_{0\leq 2\nu\leq|\alpha|}\frac{1}{\alpha!\,\nu!}(\tilde{H}^{k-p}_{p,q})^{(\alpha)}(t_1+\cdots+t_{k-p}, x; \partial_{(t_*,x)}\phi_{k-p})\left[\partial^{\alpha}_{(t_*,x)}(\tilde{\phi}_{k-p}((t)_{k-p}, x; (\tilde{t})_{k-p}, \tilde{x})^{\nu} a_{j+q-|\alpha|+\nu,\,k-p}((t)_{k-p}, x))\right]_{((\tilde{t})_{k-p}, \tilde{x}) = ((t)_{k-p}, x)}\right]_{t_{k-p}=\cdots=t_{k-m+1}=0}$ を優評価する。まず補題 6.2 及びその証明の論法に従えば，$\tilde{H}^{(k-p)}_{p,q}(t, x; \tau_*, \xi) =$

$$= H^{k-p}_{p,q}(t,x;\tau_*,\zeta) - \sum_{\mu=0}^{m-p}\sum_{\substack{|\gamma|=p-q\\ \gamma\geq 0}} \frac{1}{\gamma!} e^{(\gamma)}_{p,\mu}(t,x;\tau_*,\zeta)\cdot(\tau_{k-p-\mu}+\lambda_{k-p-\mu})_{(\gamma)}(t,x;\zeta) \ll$$

$$\ll \frac{A_1}{L_1 - t - \sum x_i - \sum_{*=k-m}^{k-p}(\tau_* - \lambda_*(0,0;e)) - \sum(\zeta-e)_i} + \sum_{\mu=0}^{m-p}\sum_{\substack{|\gamma|=p-q\\ \gamma>0}}\frac{1}{\gamma!}\frac{A_1\,|\gamma|!}{(L_1 - t - \sum x_i - \sum_{*=k-m}^{k-p}(\tau_* - \lambda_*(0,0;e)) - \sum(\zeta-e)_i)^{|\gamma|}} \times$$

$$\times \frac{A_1\,|\gamma|!}{(L_1 - t - \sum x_i - \sum(\zeta-e)_i)^{|\gamma|+1}} \ll \frac{A_2(n+m)^{p-q}(p-q)!}{(L_2 - t - \sum x_i - \sum(\tau_* - \lambda_*(0,0;e)) - \sum(\zeta-e)_i)^{p-q}}$$ を得，さらに

$$\left[(\tilde{H}^{k-p}_{p,q})^{(\alpha)}(t_1+\cdots+t_{k-p}, x; \partial_{(t_*,x)}\phi_{k-p})\right]_{t_{k-p}=\cdots=t_{k-m+1}=0} \ll \frac{A_3 D_1^{p-q+|\alpha|}(p-q+|\alpha|)!}{(L_3 - \sum_{\ell=1}^{k-m} t_\ell - \sum x_i)^{p-q+|\alpha|+1}}$$ を得る。但し，

A_i, L_i, D_1 は j, k によらぬ正定数である。これを代入し，帰納法の仮定と補題 6.4 を用いることにより，$\circledast \ll \sum_{p=1}^{m}\sum_{q=-\infty}^{p-1}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\sum_{0\leq 2\nu\leq\lambda}\sum_{\mu=2\nu}^{\lambda}\Big($

$$\Big(\frac{\rho^{m-1}D_2^{p-q+\lambda}(p-q+\lambda)!}{(L_4-r)^{p-q+\lambda+\mu-\nu+2}\,\nu!\,(\lambda-\mu)!}\cdot C_0 C_1^{j_1+q-\lambda+\nu+k-p}\,\Theta_{N(j_1+q-\lambda+\nu,k-p)+\lambda-\mu}(r,\rho\sum_{\ell=1}^{k-m}t_\ell+\sum x_i)\Big)$$ ，を得るが

さらに，$N(j_1,k) - (N(j_1+q-\lambda+\nu, k-p)+\lambda-\mu) \geq p-q+\mu-\nu-1 \geq 0$ に注意し，$r<1$ と仮定して命題 6.1.2° を適用すれば，$\lambda_1 = \lambda-\nu, \mu_1 = \mu-\nu, K = p-q+\lambda_1$ と置くことにより，$\circledast \ll \sum_{p=1}^{m}\sum_{K=1}^{\infty}\sum_{\lambda_1=0}^{K-1}\sum_{\nu=0}^{\lambda_1}\sum_{\mu_1=\nu}^{\lambda_1}\frac{\rho^{m-1}D_2^{K+\nu}(K+\nu)!}{(L_4-r)^{K+\nu+\mu_1+2}\,\nu!\,(\lambda_1-\mu_1)!\,(K-\lambda_1+\mu_1-1)!}\times$

$$\times C_0 C_1^{j_1+k-K}\,\Theta_{N(j_1,k)} \ll \sum_{K=1}^{\infty}\frac{m\rho^{m-1}}{(L_4-r)^2}K\Big(\frac{D_3}{(L_4-r)^2}\Big)^{2K}\cdot C_0 C_1^{j_1+k-K}\,\Theta_{N(j_1,k)}(r,\rho\sum_{\ell=1}^{k-m}t_\ell+\sum x_i),$$

，を得る。但し D_2 は j, k によらぬ正定数である。今，$\rho=\rho_0$ とり，$D_4 = \max\Big(\frac{m\rho_0^{m-1}}{(L_4-r)^2}, \Big(\frac{D_3}{(L-r)^2}\Big)^2\Big)$ ととれば，$(A)^0_{j,k}$ に対する優関数方程式として，$(\bar{A})^0_{j,k}$ $\quad [A_{j,k}(t)]_{t_k=\cdots=t_{k-m+1}=0} \gg \sum_{K=1}^{\infty}K D_4^{K+1} C_0 C_1^{j_1+k-K}\,\Theta_{N(j_1,k)}(\rho\sum_{\ell=1}^{k-m}t_\ell+\sum x_i)$

を得る。これが $A_{j,k}((t)_k, x) = C_0 C_1^{j_1+k}\,\Theta_{N(j_1,k)}(r,\rho\sum_{\ell=1}^{k}t_\ell+\sum x_i)$ なる解をもつためには，$\rho=\rho_0$，$r<\min(1, L_4)$ に対し $C_1^{-1}\sum_{K=0}^{\infty}K\cdot D_4^{K+2}\cdot C_1^{-K}<1$ をみたすように $C_1>0$ をとればよい。第一段，第二段(1)で定めた C_1 と，この C_1 との最大のものを改めて C_1 と置けば，定理が得られる。 (証明終)

§7 形式解の収束

§6 に於る規約と優関数評価をみた

すように定められた $a_{j,k}((t)_k,x)$ に対し，形式解(U)は意味を持つだろうか？初期面のわずかな近傍ではあるが答は肯定的である。以下このことを証明しよう。以下 L は補題6.3のもの，$r(<L)$，$\rho>1$，C_0, C_1 は§6に定められた正定数とする。

補題 7.1 $S_1 \equiv \{(0,x);\ r-\sum_{i=1}^{n}|x_i|>0\}$ と置く。$S_1\setminus T$ 上の任意の点 $(0,x^0)$，$x_1^0\neq 0$ に対し，適当な $\delta>0$ と，$\mathbb{C}^n$ に於る x^0 の近傍 Σ_{x^0} とが存在し，$\sum_{j=1}^{k}|t_j|<\delta|x_1^0|$ をみたす任意の $(t)_k$ と，$x\in\Sigma_{x^0}$ に対し評価 $K_0|x_1^0|\le\left|\phi_k((t)_k,x)\right|\le K_1|x_1^0|$ をみたすようにできる。但し，$K_0, K_1>0$ は $(t)_k$, x のとり方によらぬ定数である。

［証明］ ϕ_k に対する優関数評価 (p20参照) $\phi_k((t)_k,x)-x_1 \ll \frac{A}{L-\sum_{\ell=1}^{k}t_\ell-\sum x_i} - \frac{A}{L-\sum x_i} = \frac{A\sum t_\ell}{(L-\sum t_\ell-\sum x_i)(L-\sum x_i)}$ より，$\sum|t_\ell|+\sum|x_i|<L$ ならば $x\in S_1$ に対し

$$|x_1|-\frac{A\sum|t_\ell|}{(L-r)(L-\sum|t_\ell|-r)}\le|\phi_k((t)_k,x)|\le|x_1|+\frac{A\sum|t_\ell|}{(L-r)(L-\sum|t_\ell|-r)}$$

が得られる。δ, Σ_{x_0} を $\inf_{x\in\Sigma_{x_0}}\left(\frac{|x_1|}{|x_1^0|}-\frac{A\delta}{(L-r)(L-\delta|x_1^0|-r)}\right)\equiv K_0>0$ が成立つようにとり，$K_1\equiv\sup_{x\in\Sigma_{x_0}}\left(\frac{|x_1|}{|x_1^0|}+\frac{A\delta}{(L-r)(L-\delta|x_1^0|-r)}\right)$ と置けば結論が得られる。 (証明終)

上の補題で定められる $\delta=\delta_{x^0}$ と Σ_{x^0} を，さらに条件 $e_1\equiv\inf_{x\in\Sigma_{x_0}}(r-\rho\delta|x_1^0|-\sum|x_i|)>0$ をみたすように取直す。このとき，$\Omega_{x_0}\equiv\{|t|<\delta\}\times\Sigma_{x_0}$ に於て形式解(U)の評価を行いながら，収束の条件を求めよう。まず(U)の各項を評価する。$N(j,k)\geq 0$ なる (j,k) $(k\geq \ell_0+1)$ に対し，$u_{j,k}(t,x)\equiv\int_0^t dt_1\int_0^{t-t_1}dt_2\cdots\int_0^{t-t_1-\cdots-t_{k-2}}dt_{k-1}\, f_j(\phi_k((t)_k,x))\,a_{j,k}((t)_k,x)$ と置く。積分路に沿って，$t_\ell=\sigma_\ell t$，$\sigma_\ell\geq 0$，$\sigma_1+\cdots+\sigma_k=1$ $(1\le\ell\le k)$，

と表わされるから，$|t|<\delta|x_1^\circ|$ ならば $(t)_k$ は補題7.1の条件をみたす。故に補題7.1と定理6.1を用いて，Ω_{x_0}上の次の一様評価が得られる。$|u_{j,k}(t,x)| \le \int_0^t |dt_1| \cdots \int_0^{t-t_1-\cdots-t_{k-2}} |dt_{k-1}| \frac{(-j-1)!}{(K_0|x_1^\circ|)^{-j}} C_0 C_1^{j_1+k} \frac{N(j_1,k)!}{e_1^{N(j_1,k)+1}} =$ $= \frac{(-j-1)!\,N(j_1,k)!}{(k-1)!}\cdot\frac{C_0C_1^{j_1+k}|t|^{k-1}}{(K_0|x_1^\circ|)^{-j} e_1^{N(j_1,k)+1}} \left(\le \frac{(-j-1)!\,N(j_1,k)!}{(k-1)!}\cdot \frac{C_0C_1^{j_1+k}\delta^{k-1}|x_1^\circ|^{k-1}}{(K_0|x_1^\circ|)^{-j}e_1^{N(j_1,k)+1}}\right)$ ($j\le -1$ に対し)，$|u_{0,k}(t,x)| \le \frac{N(p-l_0,k)!}{(k-1)!}\frac{C_0C_1^{p-l_0+k}|t|^{k-1}}{e_1^{N(p-l_0,k)+1}}$ ($j=0$ に対し)，

$|u_{j,k}(t,x)| \le \int_0^t|dt_1|\cdots\int_0^{t-t_1-\cdots-t_{k-2}}|dt_{k-1}| \frac{(K_1|x_1^\circ|)^{j-1}}{(j-1)!} C_0C_1^{j_1+k}\frac{N(j_1,k)!}{e_1^{N(j_1,k)+1}} = \frac{N(j_1,k)!}{(j-1)!\,(k-1)!}\frac{C_0C_1^{j_1+k}(K_1|x_1^\circ|)^{j-1}|t|^{k-1}}{e_1^{N(j_1,k)+1}}$

($j\ge1$ に対し)。この右辺を $U_{j,k}(t)$ と置き，$\sum_{N(j_1,k)\ge0} U_{j,k}(t)$ の評価をする。和を，$\sum_{\substack{N(j_1,k)\ge0\\ j\le -p}} + \sum_{\substack{〃\\ -p<j\le0}} + \sum_{\substack{〃\\ j\ge1}} = U^{(1)}+U^{(2)}+U^{(3)}$，と分ける。$U^{(1)}$の評価をするため，$k(j)=\left[\frac{m}{m-1}(-j+j_0)\right]+m+2$，但し $j_0=-p-m+l_0$，を導入する，但し，$l_0=0$ の時に限り $k(-p)=1$ と定める。このとき，$U^{(1)}=\sum_{j=-\infty}^{-p}\sum_{k=k(j)}^\infty \frac{(-j-1)!\,N(j_1,k)!}{(k-1)!}\frac{C_0C_1^{j_1+k}|t|^{k-1}}{(K_0|x_1^\circ|)^{-j}e_1^{N(j_1,k)+1}} \le$ $\le \sum_{j=-\infty}^{-p}\frac{(-j-1)!}{(k(j)-1)!}\frac{C_0C_1^{j_1+k(j)}|t|^{k(j)-1}}{(K_0|x_1^\circ|)^{-j}}\sum_{\kappa=0}^\infty \frac{N(j_1,k(j)+\kappa)!}{\kappa!}\cdot\frac{C_1^\kappa|t|^\kappa}{e_1^{N(j_1,k(j)+\kappa)}}$ を得るが，$N(j_1,k(j))=0$ であるから，$N(j_1,k(j)+\kappa)=j_1+\left[\frac{m-1}{m}(k(j)+\kappa)\right]\le\left[\frac{m-1}{m}\kappa\right]+1$。

故に適当な定数 $E_1>0$ が存在して，$U^{(1)}\le E_1\cdot\frac{C_0|t|^{l_0}C_1^{m-1}}{(K_0|x_1^\circ|)^{p+m-2}e_1^{m-2}}\exp\left\{\left(\frac{C_1}{(K_0|x_1^\circ|)^{m-1}}+\frac{C_1^m}{e_1^{m-1}}\right)|t|^m\right\}$ $\left(\le E_1\frac{C_0\delta^{l_0}C_1^{m-1}}{K_0^{p+m-2}|x_1^\circ|^{p+m-l_0-2}e_1^{m-2}}\exp\left\{\left(\frac{C_1|x_1^\circ|}{K_0}+\frac{C_1^m|x_1^\circ|^m}{e_1^{m-1}}\right)\delta^m\right\}\right)$ を得る。$U^{(2)}$ に対する評価は次のとうりである。$U^{(2)}=\sum_{j=-1}^{-p+1}\sum_{k=l_0+1}^\infty\frac{(-j-1)!\,N(j_1,k)!}{(k-1)!}\times$ $\times\frac{C_0C_1^{j_1+k}|t|^{k-1}}{(K_0|x_1^\circ|)^{-j}e_1^{N(j_1,k)+1}}+\sum_{k=l_0+1}^\infty\frac{N(p-l_0,k)!}{(k-1)!}\frac{C_0C_1^{p-l_0}|t|^{k-1}}{e_1^{N(p-l_0,k)+1}} \le E_2\cdot\frac{C_0C_1^{p+m-1}|t|^{l_0}}{(K_0|x_1^\circ|)^{p-1}e_1^{p+m-3}}\times$ $\times\exp\left(\frac{C_1^m|t|^m}{e_1^{m-1}}\right)\left(\le E_2\cdot\frac{C_0C_1^{p+m-1}\delta^{l_0}|x_1^\circ|^{l_0+1-p}}{K_0^{p-1}e_1^{p+m-3}}\exp\left(\frac{C_1^m\delta^m|x_1^\circ|^m}{e_1^{m-1}}\right)\right)$，但し E_2 は適当な正定数。最後に，$U^{(3)}$ は次のように評価される。

$U^{(3)}=\sum_{j=1}^\infty\sum_{k=l_0+1}^\infty\frac{N(j_1,k)!}{(j-1)!\,(k-1)!}\frac{C_0C_1^{j_1+k}(K_1|x_1^\circ|)^{j-1}|t|^{k-1}}{e_1^{N(j_1,k)+1}}$，この右辺は $\frac{C_1\cdot K_1|x_1^\circ|}{e_1}<1$ ならば収束し，$U^{(3)}\le E_3\cdot\frac{C_0|t|^{l_0}C_1^{m+p-l_0}}{e_1^{m+p-l_0-1}}\frac{1}{1-\frac{C_1K_1|x_1^\circ|}{e_1}}\cdot\exp\left(\frac{C_1^m|t|^m}{e_1^{m-1}}\right)$ $(\le$

$$\leqq E_3 \cdot \frac{C_0 \delta^{l_0} |x_1^0|^{l_0} C_1^{m+p-l_0}}{e_1^{m+p-l_0-1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{C_1 K_1 |x_1^0|}{e_1}} \cdot \exp\left(\frac{C_1^m \delta^m |x_1^0|^m}{e_1^{m-1}}\right) \Bigg)$$

。但し，E_3 は適当な正定数。ところで，$\delta>0$ と Σ_{x_0} を小さくとれば K_1 はいくらでも1に近くとれる。従って初期面 S を，条件

$$(S) \qquad S = \{(0,x)\,;\ r-\sum_{i=1}^{n}|x_i|>0,\ \frac{C_1|x_1|}{r-\sum|x_i|} < 1\}$$

をみたすように取直せば，$S\setminus T$ の任意の点 x^0, $x_1^0\neq 0$ に対し $\delta>0$ 及び Σ_{x^0} を要求される全ての条件をみたすように定めることができる。結局次の定理を得る。

> **定理 7.1** 初期面上の原点の近傍 S を条件(S)をみたすように十分小さくとれば，$S\setminus T$ の各点 x^0, $x_1^0\neq 0$ に対し $\delta_{x^0}>0$ と x^0 の $\mathbf{C}^n$ に於る適当な近傍 Σ_{x^0} が存在して，$\Omega_{x^0}=\{|t|<\delta|x_1^0|\}\times\Sigma_{x^0}$ の中で(U)の右辺は一様絶対収束して(E),(C)をみたす。

参考文献

[1] Bony, J.M. - Schapira, P.; Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles. Ann. Inst. Fourier, 26.1, p81-140 (1976).

[2] Hamada, Y.; The singularities of the solutions of the Cauchy problem. Publ. RIMS, Kyoto Univ., 5, p21-40 (1969).

[3] Hamada, Y., Leray, J., Wagschal, C.; Système d'équations aux dérivées partielles a caractéristiques multiples problème de Cauchy ramifié; hyperbolicité partielle. J. Math.

Pures Appl., 55, p297-352 (1976).

[4] Hamada, Y., Nakamura, G.; On the singularities of the solution of the Cauchy problem for the operator with no uniform multiple characteristics. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 4, p725-755 (1977).

[5] Ishii, T.; On a representation of the solution of the Cauchy problem with singular initial data. Proc. Japan Acad., 56, Ser A, 2, p59-61 (1980).

[6] Kobayashi, T.; On the singular Cauchy problem for operators with variable involutive characteristics. (to appear).

[7] Kumano-go, H., Taniguchi, K.; Fourier integral operators of multiphase and the fundamental solution for a hyperbolic system. Funkcial. Ekvac., 22.2, p161-196 (1979)

[8] 熊ノ郷準述，樋口美紀記；フーリエ積分作用素と双曲型方程式の基本解．都立大学数学教室セミナー報告．

[9] Ouchi, S.; Asymptotic behaviour of singular solutions of linear partial differential equations in the complex domain. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 27.1. p1~36 (1980).

[10] Urabe, J.; On the theorem of Hamada for a linear second order equation with variable multiplicities. J. Math. Kyoto Univ. 19.1, p153-170 (1979).

[11] Nakamura, G.; The singularities of solutions of the Cauchy problems for systems whose characteristic roots are non-uniform multiple. Publ. RIMS, Kyoto Univ., 13, p255-275 (1977/78).