数理解析研究所講究録
411巻 1981年 184-188

General Principal Ideal Theorem について

名大 教養部　三宅克哉

1. よく知られているように，代数的数体 k のイデアルは k の絶対類体においてはすべて単項イデアルになる（単項化定理）。さらに k の ray class field K にまで k のイデアルを持ちあげれば，それを単項イデアルとして表わす K の数のうちには，K を定める合同条件に応じて与えられたある合同条件を満たすものが存在することが，S. Iyanaga [5], Herbrand [4] により指摘された（一般単項化定理）。

単項化定理を証明する際に E. Artin [1] と Furtwängler [3] が得た結果は一般性のあるもので，筆者は [6] において，それを代数的数体のイデール群の構造定理として把握したが，その応用として，既知の局所ノルムに関する結果をもちいて，一般単項化定理を改良することを得た [7]。 なお [6], [7] は既に出版されており，ここではその主要結果と，特殊な例を報告するにとどめる。

2. k を有限次代数的数体とし, $\mathfrak{m}$ を k の divisor, K を k の ray class field modulo $\mathfrak{m}$ とする。K の導手を $\mathfrak{f}=\mathfrak{f}_{K/k}$, 共軛差積を $\mathfrak{d}=\mathfrak{d}_{K/k}$ とすれば, module of genus $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_{K/k}$ は

$$\mathfrak{f}=\mathfrak{d}\cdot\mathfrak{F}$$

によって定まる。ここで $\mathfrak{f}\,|\,\mathfrak{m}$ であることに注意しておく。

さて K の素イデアル $\mathfrak{P}$ に対して, その K/k での分岐指数を $e(\mathfrak{P})$ とし, K の divisor $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_{K/k}$ を

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= (\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{d}^{-1})\cdot\prod\mathfrak{P}^{e(\mathfrak{P})-1}\\ &= \mathfrak{F}\cdot(\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{f}^{-1})\cdot\prod\mathfrak{P}^{e(\mathfrak{P})-1}\end{aligned}$$

によって定義する。ここで $\prod$ は K/k で実際に分岐するもの全体にわたる積をとれば十分である。

<u>定理</u>　k のイデアル $\mathfrak{a}$ で $\mathfrak{m}$ と素なものに対しては, K において $\mathfrak{a}=(A)$ となる $A\in K^{\times}$ で

$$A\equiv 1 \mod \mathfrak{M}$$

を満たすものが存在する。

<u>注意</u>　k の絶対類体を K_0 とするとき, $K_0\subset K$ であり, K_0 で $\mathfrak{a}=(A_0)$, $A_0\in K_0^{\times}$ となっている。そこで A_0 が $\mathfrak{m}$ と素であるとき, $(A_0)=(A)$, $A\equiv 1 \mod \mathfrak{M}$ となるよ

うな $A \in K^{\times}$ をとれば $E = A_0 A^{-1}$ は K の単数であり,

$$E \equiv A_0 \mod \mathfrak{M}$$

となっている。したがって定理はある種の合同条件を満たす単数の存在を主張するものとも見られる。

なお K_0/k は不分岐であるから, $A_0 \in K_0^{\times}$ に対しては

k のイデアル $\mathfrak{a}$ で $(A_0) = \mathfrak{a}$ となるものが存在する

$\Longleftrightarrow \forall \sigma \in Gal(K_0/k)\ ((A_0)^{\sigma} = (A_0))$

が成り立っている。

3. S. Iyanaga, Herbrand は $\mathfrak{M}$ のかわりに $\mathfrak{F}$ に対して定理が成り立つことを示した。さて $\mathfrak{P}$ を K のイデアルで $e(\mathfrak{P}) > 1$, i.e. $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{f}$, なるものとし,

$$\mathfrak{P}^{v(\mathfrak{P})} \parallel \mathfrak{F}$$

とする。また $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap k$ に対して

$$\mathfrak{p}^{u(\mathfrak{p})} \parallel \mathfrak{f}, \qquad \mathfrak{p}^{w(\mathfrak{p})} \parallel \mathfrak{m}$$

とするとき $u(\mathfrak{p}) \leq w(\mathfrak{p})$。ここで

$$\mathfrak{P}^{x(\mathfrak{P})} \parallel \mathfrak{M}$$

とすれば

$$x(\mathfrak{P}) = v(\mathfrak{P}) + e(\mathfrak{P}) \cdot (w(\mathfrak{p}) - u(\mathfrak{p}) + 1) - 1.$$

そこで $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}^{w(\mathfrak{p})} \cdot \mathfrak{m}_0$ とし,

(☆) k の単数 ε に対して

$$\varepsilon \equiv 1 \mod \mathfrak{m}_0 \implies \varepsilon \equiv 1 \mod \mathfrak{p}^{w(\mathfrak{p})}$$

が成り立つ場合を考える。（Chevalley [2] により，$\mathfrak{p}^{w(\mathfrak{p})}$ が与えられたときに $\mathfrak{m}_0$，$(\mathfrak{p}, \mathfrak{m}_0) = 1$，を適当に選べば（★）が成り立つことが知られている。）

この場合には $u(\mathfrak{p}) = w(\mathfrak{p})$ であり，Weil [8], XII-4, Cor. of Prop. 13 によれば，$q = N_{k/\mathbb{Q}}(\mathfrak{p})$ とするとき，

$$e(\mathfrak{P}) = (q-1)\cdot q^{w(\mathfrak{p})-1} = (q-1)\cdot v(\mathfrak{P}),$$

$$v(\mathfrak{P}) = e(\mathfrak{P})\cdot(q-1)^{-1} = q^{w(\mathfrak{p})-1},$$

$$x(\mathfrak{P}) = v(\mathfrak{P}) + e(\mathfrak{P}) - 1 = q^{w(\mathfrak{p})} - 1 = q\cdot v(\mathfrak{P}) - 1$$

であることが容易に知れる。したがってかかる場合に注目すれば，定理は相当に改良されたといえよう。

References

[1] E. Artin : Idealklassen in Oberkörpern und allgemeine Reziprozitätsgesetze. Abh. Math. Sem. Hamburg, 7 (1930).

[2] C. Chevalley : Deux théorèmes d'arithmétique. J. Math. Soc. Japan, 3 (1951).

[3] Ph. Furtwängler : Beweis des Hauptidealsatzes für Klassenkörper algebraischer Zahlkörper. Abh. Math. Sem. Hamburg, 7 (1930).

[4] J. Herbrand : Sur les théorèmes du genre principal et des idéaux principaux. Ibid., 9 (1933).

[5] S. Iyanaga: Zur Theorie der Geschlechtermoduln. J. reine angew. Math., 177 (1934).

[6] K. Miyake: On the structure of the idele groupe of an algebraic number field. Nagoya Math. J., 80 (1980).

[7] ________: On the General Principal Ideal Theorem. Proc. Japan Acad., 56, Ser. A (1980).

[8] A. Weil: Basic Number Theory. Springer Verlag (1967).