数理解析研究所講究録
411巻 1981年 176-183

Fourier Coefficients of Generalized Eisenstein Series of Degree Two.

東工大・理　　水本信一郎

1°. Elliptic modular case の復習

$k \geqq 4$ なる even integer に対し, weight k の Eisenstein series は次のように定義される:

$$E_k(z) = \sum_{\substack{(c,d)=1 \\ c>0 \text{ or } \left\{\begin{smallmatrix} c=1 \\ d=0 \end{smallmatrix}\right.}} \frac{1}{(cz+d)^k} \quad , \quad z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z)>0.$$

E_k は次のような Fourier 展開をもつ:

$$E_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)\, e(nz) \quad \left(e(z) = \exp(2\pi i z) \right);$$

$$a(0) = 1 \quad ,$$

$$a(n) = \frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!\,\zeta(k)}\, \sigma_{k-1}(n) \qquad (n \geqq 1)$$

$$\left(= -\frac{2k}{B_k}\, \sigma_{k-1}(n) \ , \quad B_k : k\text{-th Bernoulli number} \right)$$

但し, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ は Riemann zeta function,

$$\sigma_{k-1}(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} d^{k-1}.$$

E_k はすべての Hecke operators に対する common eigen function で, $\sigma_{k-1}(n)$ の部分が k の eigen value を与えている：$\quad T(n)E_k = \sigma_{k-1}(n)E_k \quad (n \geqq 1).$

$a(n)$ の分母に $\zeta(s)$ の special value（あるいは Bernoulli number）があらわれていることに注意する。

2°. Degree n の Eisenstein series の定義（Langlands 1964, Klingen 1967）

$n>0$: integer に対して

$$\Gamma_n \underset{\text{def.}}{=} \left\{ M \in M_{2n}(\mathbb{Z}) \;\middle|\; {}^tMJM = J \right\},\ J = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$$

を n 次 Siegel modular group という（但し，${}^tM$ は M の転置行列，E は n 次単位行列）。

$$\mathfrak{H}_n \underset{\text{def.}}{=} \left\{ Z \in M_n(\mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^tZ = Z, \\ \mathrm{Im}(Z) > 0 : \text{positive definite} \end{array} \right\}$$

（n 次 Siegel 上半空間）に Γ_n が

$$M\langle Z \rangle = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$$
$$\left(M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n,\ Z \in \mathfrak{H}_n \right)$$

で act する。

$k>0$: integer に対し

$$M_k(\Gamma_n) = \left\{ f : \mathfrak{H}_n \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{(i) holomorphic} \\ \text{(ii) } f(M\langle Z \rangle) = \det(CZ+D)^k f(Z) \\ \qquad \text{for } \forall M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n \\ \text{(iii) bounded on } \{\mathrm{Im}(Z) \geqq c \cdot E\} \\ \qquad \text{for } \forall c > 0 \end{array} \right\}$$

の元を Siegel modular form of degree n and weight k という。$M_k(\Gamma_n)$ は $\mathbb{C}$-vector space で有限次元である。

$f \in M_k(\Gamma_n)$ は次のような Fourier 展開をもつ：

$$f(Z) = \sum_{T \geqq 0} a(T;f)\ e(\sigma(TZ))$$

(σ は行列の trace)．ここで T はすべての symmetric positive semidefinite semi-integral matrices をうごく。($T=(t_{ij})$ が semi-integral とは $2t_{ij} \in \mathbb{Z}$ で，対角成分 $t_{ii} \in \mathbb{Z}$ となること。) $a(T;f)$ を Fourier coefficients of f at T とよび，かんたんに $a(T)$ とも書くことにする。

$\Phi : M_k(\Gamma_n) \longrightarrow M_k(\Gamma_{n-1})$: $\mathbb{C}$-linear map を

$$(\Phi f)(Z_1) = \lim_{\lambda \to +\infty} f\begin{pmatrix} Z_1 & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \cdots 0 & i\lambda \end{pmatrix}, \quad Z_1 \in \mathfrak{H}_{n-1}$$

で定義する (Siegel operator)。$S_k(\Gamma_n) = \mathrm{Ker}(\Phi)$ の元を cusp form という。$S_k(\Gamma_0) = M_k(\Gamma_0) = \mathbb{C}$ とおく。

$f,\ g \in M_k(\Gamma_n)$ で f または g が cusp form のとき

$$\langle f, g \rangle = \mathrm{vol}(\Gamma_n \backslash \mathfrak{H}_n)^{-1} \int_{\Gamma_n \backslash \mathfrak{H}_n} f(Z)\overline{g(Z)}\, |Y|^k \frac{dX\,dY}{|Y|^{n+1}}$$

$$(Z = X + iY)$$

により内積 $\langle\ ,\ \rangle$ を考え，これに関する $S_k(\Gamma_n)$ の $M_k(\Gamma_n)$ の中での orthogonal complement を $E_k(\Gamma_n)$ とおく。(the space of Eisenstein series.) $E_k(\Gamma_n)$ は $k > 2n$, k : even のとき，次の Langlands - Klingen の Eisenstein series で張られる。

r を $0 \leqq r \leqq n$ なる integer とし，

$$\Delta_{n,r} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0^{(n-r,\, n+r)} & * \end{pmatrix} \in \Gamma_n \right\}$$

なる Γ_n の subgroup を考える。$\mathfrak{H}_n \ni Z \longmapsto Z^* \in \mathfrak{H}_r$ を，左上の (r, r)-entries をとり出す map とする：$Z = \begin{pmatrix} Z^* & \vdots \\ \cdots & \vdots \end{pmatrix}$

$f \in S_k(\Gamma_r)$，$k > n+r+1$，k : even に対し

$$E^k_{n,r}(Z, f) \underset{\text{def.}}{=} \sum_{M : \Gamma_n / \Delta_{n,r}} f(M\langle Z\rangle^*) |CZ+D|^{-k} \quad , Z \in \mathfrak{H}_n .$$

ここで $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ は Γ_n の left cosets modulo $\Delta_{n,r}$ の一組の完全代表系をうごく。$E^k_{n,r}(*, f) \in M_k(\Gamma_n)$ であるが，さらにくわしく次のことがいえる：

$E^r_k(\Gamma_n) = \{ E^k_{n,r}(*, f) \mid f \in S_k(\Gamma_r) \}$ とおくと

$k > 2n$ で $E_k(\Gamma_n) = E^0_k(\Gamma_n) \oplus \cdots \oplus E^{n-1}_k(\Gamma_n)$

（以上のことについては cf. Klingen [1]）

例　$E_k(\Gamma_1) = E^0_k(\Gamma_1) = \mathbb{C} \cdot E_k$　，

$E^0_k(\Gamma_n) = \mathbb{C} \cdot E^k_{n,0}(*, 1)$.　∎

$r = n$ のとき $E^k_{n,n}(*, f) = f$ である。$r = 0$ のとき，

$E^k_{n,0}(Z, 1) = \sum_{\{C,D\}} \frac{1}{|CZ+D|^k}$ は Siegel の Eisenstein series [4] である。$E^k_{n,0}(Z, 1) = \sum_{T \geq 0} a(T)\, e(\sigma(TZ))$ をその Fourier 展開とすると，

$a(T) \in \mathbb{Q}$ for all $T \geq 0$ （Siegel [4]）;

$\exists\, b \in \mathbb{Z}$ such that $b \cdot a(T) \in \mathbb{Z}$ for all $T \geq 0$.

（Siegel [5]）などが知られている。

3°. Degree - two case.

E_k の degree 2 への拡張として $E_{2,0}$ と $E_{2,1}$ がある。$E_{2,0}$ の Fourier coefficients は Maass [2][3] により，explicit formula が与えられている。$E_{2,1}$ の Fourier coefficients をしらべることがここでの目標である。そこで問題を次のように formulate する：

(∗) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)e(nz) \in M_k(\Gamma_1)$ を eigen form (= common eigen function for all Hecke operators) とし，$[f] \in M_k(\Gamma_2)$ を $\Phi([f]) = f$ をみたす eigen form (unique にきまる) とする。このとき次のことが成り立つ：

<u>Proposition</u>

$$[f] = \begin{cases} E_{2,0}(*, \Phi f) & \text{if } \Phi f \neq 0 \\ E_{2,1}(*, f) & \text{if } \Phi f = 0. \end{cases} \quad \blacksquare$$

いま

$$[f](Z) = \sum_{T \geq 0} a(T; [f])\, e(\sigma(TZ))$$

を $[f]$ の Fourier 展開とすると，$a(T; [f])$ を調べることが問題になるわけである。以下，一般性を失うことなく f を normalized (i.e. (∗) で $a(1) = 1$) とする。主な結果は次の二つの定理である：

<u>Theorem 1</u> $f \in M_k(\Gamma_1)$ を normalized eigen form, $T>0$,
$\Delta(T) \underset{\text{def}}{=} |2T|$ とする。$-\Delta(T)$ が fundamental discriminant
(i.e. $-\Delta(T)$ = discriminant of $\mathbb{Q}(\sqrt{-\Delta(T)})$) のとき

$$a(T;[f]) = (-1)^{k/2}\frac{(k-1)!}{(2k-2)!}(2\pi)^{k-1}\Delta(T)^{k-\frac{3}{2}}\cdot\frac{L(k-1,\chi_{-\Delta(T)})D(k-1,f,\vartheta_T)}{L_2(2k-2,f)}.$$

<u>Theorem 2</u> $f \in M_k(\Gamma_1)$ を Theorem 1と同じとする。このとき
ある $\gamma \in \mathbb{Z}(f)$, $\gamma \neq 0$ があって

$$\gamma \cdot a(T;[f]) \in \mathbb{Z}(f) \quad \text{for all } T \geqq 0$$

(γ は T によらない)。 ∎

<u>記号の説明</u>

① $\chi_{-\Delta(T)}$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{-\Delta(T)})$ の character, $L(s,\chi_{-\Delta(T)})$ は
Dirichlet の L-function.

② $T(m)f = \lambda(m)f$ $(m \geqq 1)$ とするとき

$$\sum_{m=1}^{\infty}\lambda(m)m^{-s} = \prod_p (1-\alpha_p p^{-s})^{-1}(1-\beta_p p^{-s})^{-1} \quad (=L(s,f))$$

なる $\alpha_p, \beta_p \in \mathbb{C}$ に対し

$$L_2(s,f) \underset{\text{def}}{=} \prod_p (1-\alpha_p^2 p^{-s})^{-1}(1-\alpha_p\beta_p p^{-s})^{-1}(1-\beta_p^2 p^{-s})^{-1},$$

p はすべての素数にわたる。

$$\vartheta_T(z) \underset{\text{def.}}{=} \sum_{\infty (m,n)\in\mathbb{Z}^2} e(z\cdot(t_1m^2+tmn+t_2n^2)) \quad \text{for } T=\begin{pmatrix} t_1 & t/2 \\ t/2 & t_2 \end{pmatrix}$$

$\vartheta_T(z) = \sum_{n=0} b(n)e(nz)$ とかくとき.

$$D(s,f,\vartheta_T) \underset{\text{def.}}{=} \sum_{m=1}^{\infty}\lambda(m)b(m)m^{-s}.$$

これらの L-functions (Dirichlet series) は解析接続して考える。

③ $\mathbb{Q}(f) \underset{\mathrm{def}}{=} \mathbb{Q}(\lambda(m) \mid m \geq 1)$ を $\mathbb{Q}$ 上 eigen values によって generate される totally real number field とするとき，$\mathbb{Z}(f)$ は $\mathbb{Q}(f)$ の integer ring をあらわす。

Remarks

(i) Th 1 からすべての $a(T)$ がわかる。

(ii) rank $T < 2$ のとき $a(T; [f])$ は f の Fourier coefficients になる。

(iii) $f = G_k = -\dfrac{B_k}{2k} E_k$ (normalized eigen modular form) のとき，Th 1 の公式は Maass の公式と一致する。

(iv) Th 2 では $[f]$ が eigen なることが重要。γ は explicit に決まるはずである。

(v) degree 1 のときの $a(n) = \dfrac{(2\pi i)^k}{(k-1)!\,\zeta(k)} \sigma_{k-1}(n)$ との関連でいうと，Th 1 は $\dfrac{(2\pi i)^k}{(k-1)!\,\zeta(k)}$ の部分を決定したことに相当し，Th. 2 は $B_k \in \mathbb{Q}$ ということに相当する。$\zeta(s)$ のかわりに，f に attach した "second" L-function $L_2(s, f)$ があらわれている。

(vi) Th 1 で $\mathbb{Q}(\sqrt{-\Delta(T)})$ の class number が 1 のとき，

$$L(k-1, \chi_{-\Delta(T)})\, D(k-1, f, \vartheta_T) = w(T) \cdot L(k-1, f, \chi_{-\Delta(T)}) L(k-1, f)$$

となる。但し，② の記号で，

$$L(s, f, \chi_{-\Delta(T)}) = \prod_p (1 - \chi_{-\Delta(T)}(p)\alpha_p p^{-s})^{-1} (1 - \chi_{-\Delta(T)}(p)\beta_p p^{-s})^{-1},$$

$w(T)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{-\Delta(T)})$ に含まれる 1 のべき根の個数。

数値例（Th 1 の応用）

$\Delta_{12} \in S_{12}(\Gamma_1)$ を weight 12 の unique normalized cusp form とすると，次のような special value が求められる：

$$L(11, \Delta_{12}, (\tfrac{-3}{\cdot})) \cdot L(11, \Delta_{12}) = \frac{2^{25}}{3^{17} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 691} \sqrt{3}\, \pi^{23} \langle \Delta_{12}, \Delta_{12} \rangle,$$

etc. (cf. Remark (vi)) ∎

References

[1] H. Klingen : Zum Darstellungssatz für Siegelsche Modulformen. Math. Z., 102, 30 – 43 (1967); Berichtung, 105, 399-400 (1968)

[2] H. Maass : Die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreichen zweiten Grades. Dan. Vid. Selsk., 34, nr. 7 (1964)

[3] ——— : Über die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreichen zweiten Grades. Dan. Vid. Selsk., 38, nr. 14 (1972).

[4] C. L. Siegel : Einfürung in die Theorie der Modulformen n-ten Grades. Math. Ann. 116, 617 – 657 (1939).

[5] ——— : Über die Fourierschen Koeffizienten der Eisenstein Reihen. Dan. Vid. Selsk., 34, nr. 6 (1964).