数理解析研究所講究録
413巻 1981年 153-166

葉層構造に随伴されるコホモロジーについて

豊田高專　伊藤敏和

§0. Introduction

1975年に、J. Heitsch が[1]で Gelfand-Fuchs のベクトル場のリー環の cohomology [5] をまねて foliation に随伴する cohomology $H^*(\tau; \nu^*)$ を作った。これは、basic connection (Bott connection) によって与えられる表現で normal bundle ν-係数の foliation に接する vector field のリー環の cohomology である。

そして，J. Heitsch は K. Kodaira and D. C. Spencer の[6]をまねて foliation τ の deformation τ_s を与えたとき，この deformation より構成される infinitesimal な量を $H^1(\tau; \nu)$ の中に定義する。さらに、J. Heitsch は[2]において，この infinitesimal な量をもちいて secondary characteristic classes の微分を考えた。

一方，我々は secondary characteristic classes の

vanishing theorem に関する十分条件を与えるために，cohomology $H^*(\mathcal{F};D)$ を作った。これは J. Heitsch の記号でもって書けば $H^*(\tau;\nu^*)$ である。

§1. で、我々は J. Heitsch の cohomology $H^*(\tau;\nu)$ について述べ，特に余次元1の normal bundle が自明な葉層構造については §2 との比較の都合上で詳しく述べる。そして、§2. で、我々の得た結果（定理 2.7）を述べる。さらに，Roussarie の例をもちいて具体例を上げ，その中で生じる問題を2つ提出する。

この報告の中であつかう対象はすべて smooth (C^∞) の範囲で考えている。

§1. J. Heitsch の cohomology $H^*(T(\mathcal{F});\nu(\mathcal{F}))$

まず，J. Heitsch が［1］で作ったcohomologyをおもいおこすことから始める。

$\mathcal{F}$ を n 次元多様体 M 上の余次元 q の foliation とする。$T(\mathcal{F})$, $\nu(\mathcal{F})$ でもってそれぞれ $\mathcal{F}$ の tangent bundle と $\mathcal{F}$ の normal bundle を表わし，$\nu(\mathcal{F})$ 上に導入される Basic connection (Bott connection) を ∇ で表わす。

<u>定義 1.1</u>　　$\sigma \in \Gamma(\overset{p}{\wedge} T^*(\mathcal{F}) \otimes \nu(\mathcal{F}))$ に対して，$\hat{d}\sigma \in \Gamma(\overset{p+1}{\wedge} T^*(\mathcal{F}) \otimes \nu(\mathcal{F}))$ を次のように定義する。

(1) $$(\hat{d}\sigma)(X_0,\cdots,X_p)=\sum_{0\leq i\leq p}(-1)^i\nabla_{X_i}\sigma(X_0,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_p)$$
$$+\sum_{0\leq i<j\leq p}(-1)^{i+j}\sigma([X_i,X_j],X_0,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_p)$$

ここで，$X_0,\cdots,X_p\in\Gamma(T(\mathcal{F}))$とする。

すると，Basic connection ∇の性質と形式的な丁寧な計算によって次のLemmaが成立する。あるいは(1)の局所表示をすることによっても次のLemmaは証明できる。

Lemma 1.2

(2) $$\hat{d}\circ\hat{d}=0$$

よって(1)と(2)から$\{\Gamma(\wedge T^*(\mathcal{F})\otimes\nu(\mathcal{F})),\hat{d}\}$はcomplexになるから，このcomplexのhomologyを$H^*(T(\mathcal{F});\nu(\mathcal{F}))$とかく。

次にfoliation $\mathcal{F}$のdeformationから$H^1(T(\mathcal{F});\nu(\mathcal{F}))$の元を構成する。

n次元多様体Mのリーマン計量を1つ決めておく。sをパラメーターとして，$\mathcal{F}_s$はM上の余次元q foliationとし，$\mathcal{F}_0=\mathcal{F}$とする。$T(M)=T(\mathcal{F}_s)\oplus\nu(\mathcal{F}_s)$と思い，

$\pi_s;T(M)\longrightarrow T(\mathcal{F}_s)$，$\pi_s^\perp;T(M)\longrightarrow\nu(\mathcal{F}_s)$

をnatural projectionとする。又，$\nu(\mathcal{F}_s)=T(M)/T(\mathcal{F}_s)$と思う。

<u>定義 1.3</u>　　$\mathcal{F}_s$に随伴される$\Gamma(T^*(\mathcal{F})\otimes\nu(\mathcal{F}))$の元$\sigma$を次のように定義する。

(3)　　$\sigma(X)=\pi_0^{-1}\left\{\frac{\partial}{\partial s}\pi_s(X)\Big|_{s=0}\right\}$　　for $X\in T(\mathcal{F})$

このσを$\mathcal{F}_s$に随伴される infinitesimal deformation という。

<u>Proposition 1.4</u>

$$\hat{d}\sigma=0 \qquad \text{i.e. } [\sigma]\in H^1(T(\mathcal{F});\nu(\mathcal{F}))$$

<u>Proposition 1.5</u>　　YをM上の complete vector field とし，$\lambda=\langle Y\rangle\in\Gamma(\nu(\mathcal{F}))$とおく。さらに，$Y$の1-パラメーター部分群を$\varphi_s$とする。このとき，$\mathcal{F}_s=\varphi_s^*\mathcal{F}$でもって定義される$\mathcal{F}$の deformation を考え，$\mathcal{F}_s$に随伴される infinitesimal deformation σは次の関係式を満している。

$$\hat{d}\lambda=\sigma$$

上の2つの命題の証明は略するが，次に述べる余次元1の normal bundle が自明な foliation の場合の計算が，命題1.4と1.5の証明のカラクリを我々に明示してくれる。

ωをM上の non-singular な完全積分可能1-形式とする。

(4)　　$d\omega=\xi\wedge\omega$，　　ここでξはM上の1-形式である。

M上の余次元1の foliation $\mathcal{F}$は$\{\omega=0\}$の解として定義される。 さらに，M上の vector field Xは$\omega(X)=1$となるものとする。 このとき，$\nu(\mathcal{F})$上の basic connection ∇は

$$\nabla_Y X=\pi^{-1}([Y,X])=\omega([Y,X])\cdot X \qquad \text{for } Y\in T(\mathcal{F})$$

なる性質をもっている。だから，(4)より

(5) $\nabla_Y X = -\xi(Y)X \quad \text{for } Y \in T(\mathcal{F})$

となる。そこで，(1)の $\hat{d}$ をもう一度書きなおしてみる。

$\sigma = \sigma \otimes X \in \Gamma(\overset{1}{\wedge} T^*(\mathcal{F}) \otimes \nu(\mathcal{F}))$，$Y_1, Y_2 \in T(\mathcal{F})$ に対して，$\hat{d}(\sigma \otimes X)(Y_1, Y_2) = \nabla_{Y_1}(\sigma(Y_2)X) - \nabla_{Y_2}(\sigma(Y_1)X)$
$-\sigma([Y_1, Y_2])X = ((d\sigma - \xi \wedge \sigma) \otimes X)(Y_1, Y_2)$

このことから，一般に $\sigma = \sigma \otimes X \in \Gamma(\overset{p}{\wedge} T^*(\mathcal{F}) \otimes \nu(\mathcal{F}))$ についても同様のことが成立することが容易にわかる。

(6) $\hat{d}(\sigma \otimes X) = (d\sigma - \xi \wedge \sigma) \otimes X$

一方，$s \in \mathbb{R}$ に対して，ω_s をM上の non-singular な完全積分可能な 1-形式とし，$\omega_0 = \omega$，X_s はM上の vector field で $\omega_s(X_s) = 1$ をみたし，$X_0 = X$ とする。この ω_s により定義される infinitesimal deformation σ は(3)より $Y \in T(\mathcal{F})$ に対して，$\sigma(Y) = -\omega\left(\frac{\partial}{\partial s}(\omega_s(Y)X_s\big|_{s=0})\right)$
$= -\left(\frac{\partial \omega_s}{\partial s}\Big|_{s=0}\right)(Y)$ とかける。故に，

(7) $\sigma = -\left\langle \frac{\partial \omega_s}{\partial s}\Big|_{s=0} \right\rangle \otimes X$

と表現される。

又，$d\omega_s = \xi_s \wedge \omega_s$ を s で微分して $s=0$ を代入すると

$$d\left(\frac{\partial \omega_s}{\partial s}\Big|_{s=0}\right) = \left(\frac{\partial \xi_s}{\partial s}\Big|_{s=0}\right) \wedge \omega + \xi \wedge \left(\frac{\partial \omega_s}{\partial s}\Big|_{s=0}\right)$$

故に

(8) $d\left(\frac{\partial \omega_s}{\partial s}\Big|_{s=0}\right) - \xi \wedge \left(\frac{\partial \omega_s}{\partial s}\Big|_{s=0}\right) = \left(\frac{\partial \xi_s}{\partial s}\Big|_{s=0}\right) \wedge \omega$

だから，(6)，(7)，(8) より

$$\hat{d}(\sigma) = \hat{d}\left(\left\langle -\frac{\partial \omega_s}{\partial s}\Big|_{s=0} \right\rangle \otimes X \right) = 0$$

故に

(9) $$\left[\left\langle -\frac{\partial \omega_s}{\partial s}\Big|_{s=0} \right\rangle \otimes X \right] \in H^1(T(\mathcal{F})\,;\nu(\mathcal{F}))$$

§2. Cohomology $H^*(\mathcal{F}\,;D)$

$\omega_1, \cdots, \omega_g$ をM上の1次独立な1-形式であって積分可能条件(10)をみたすものとする。

(10) $$d\omega_i = \sum_{j=1}^{g} \xi_{ij} \wedge \omega_j \qquad (1 \leq i \leq g)$$

ここで，ξ_{ij} はM上の1-形式である。

又，$T^*(\mathcal{F}) = T^*(M)/\nu^*(\mathcal{F})$ と思い，$\nu^*(\mathcal{F})$ は $\omega_1, \cdots, \omega_g$ が trivial な basis になっているとみなす。

<u>定義 2.1</u>　$\varphi = \sum_{i=1}^{g} \varphi_i \otimes \omega_i \in \Gamma(\overset{p}{\wedge} T^*(\mathcal{F}) \otimes \nu^*(\mathcal{F}))$ に対して，微分Dを次のように定義する。

(11) $$D(\varphi) = D\left(\sum_{i=1}^{g} \varphi_i \otimes \omega_i\right) = \sum_{i=1}^{g} \left(d\varphi_i + \sum_{j=1}^{g} \xi_{ji} \wedge \varphi_j \right) \otimes \omega_i$$

<u>Lemma 2.2</u>

(12) $$D \circ D = 0$$

<u>定義 2.3</u>　(11) と (12) によって $\{\Gamma(\wedge T^*(\mathcal{F}) \otimes \nu^*(\mathcal{F})), D\}$ は complex になる。この complex の homology を

$H^*(\mathcal{F};D)$ とかく。

<u>注意</u>　J. Heitsch の記号では $H^*(\mathcal{F};D)=H^*(T(\mathcal{F});\nu^*(\mathcal{F}))$ である。

以下では余次元1の場合について述べる。

ω をM上の1次独立な1-形式で積分可能条件をみたすとする。

(10)′　$d\omega=\xi\wedge\omega$　，ここで ξ はM上の1-形式である。

M上の余次元1 foliation $\mathcal{F}$ は $\{\omega=0\}$ の解によって定義される。まず $H^*(\mathcal{F};D)$ と de Rham cohomology $H^*(M;\mathbb{R})$ との関係を求める。そのために $\Gamma(\overset{p}{\wedge}T^*(\mathcal{F})\otimes\nu^*(\mathcal{F}))$ から $\Gamma(\overset{p+1}{\wedge}T^*(M))$ への写像 Φ を次のように定義する。

$$\Phi(\langle\varphi\rangle\otimes\omega)=\varphi\wedge\omega \qquad \text{for } \langle\varphi\rangle\otimes\omega\in\Gamma(\overset{p}{\wedge}T^*(\mathcal{F})\otimes\nu^*(\mathcal{F}))$$

<u>定理 2.4</u>　次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(\overset{p}{\wedge}T^*(\mathcal{F})\otimes\nu^*(\mathcal{F})) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "D"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \Gamma(\overset{p+1}{\wedge}T^*(M)) \arrow[d, "d"] \\
\Gamma(\overset{p+1}{\wedge}T^*(\mathcal{F})\otimes\nu^*(\mathcal{F})) \arrow[r, "\Phi"] & \Gamma(\overset{p+2}{\wedge}T^*(M))
\end{tikzcd}$$

だから，$\Phi_*\,;\,H^p(\mathcal{F};D)\longrightarrow H^{p+1}(M;\mathbb{R})$ が導かれる。

<u>証明</u>　$\langle\varphi\rangle\otimes\omega\in\Gamma(\overset{p}{\wedge}T^*(\mathcal{F})\otimes\nu^*(\mathcal{F}))$ に対して，

$$\begin{aligned}
\Phi\circ D(\langle\varphi\rangle\otimes\omega) &= \Phi(\langle d\varphi+\xi\wedge\varphi\rangle\otimes\omega)\\
&=(d\varphi+\xi\wedge\varphi)\wedge\omega\\
d\circ\Phi(\langle\varphi\rangle\otimes\omega) &= d(\varphi\wedge\omega)=d\varphi\wedge\omega+(-1)^p\varphi\wedge\xi\wedge\omega\\
&=(d\varphi+\xi\wedge\varphi)\wedge\omega
\end{aligned}$$

故に，　$\Phi \circ D = d \circ \Phi$

<u>注意</u>　　$q \geqq 2$ 以上のときは定理2.4に対応する可換性は成立しない。

次に $\{\Gamma(\wedge T^*(\mathcal{F}) \otimes \gamma^*(\mathcal{F})), D\}$ の local exactness をいう。そのために，$(U, (x_1, \cdots, x_n))$ を M の distinguished coordinate system とする。i.e. $\omega_U = \omega|_U = h(x) dx_n$．

このとき，$\xi_U = \xi|_U = \frac{1}{h(x)} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial h}{\partial x_i} dx_i = d_{\mathcal{F}}(\log h)$　on U，ここで，$d_{\mathcal{F}}$ は変数 $x_1, \cdots, x_{n-1}$ の微分（leaf 方向の微分）を表わす。

<u>定理 2.5</u>　（local exactness）

$\langle\varphi\rangle \otimes \omega \in \Gamma(\overset{p}{\wedge} T^*(\mathcal{F}) \otimes \gamma^*(\mathcal{F}))$ が $D(\langle\varphi\rangle \otimes \omega) = 0$ をみたすならば，次の性質をみたす $\langle\psi_U\rangle \otimes \omega_U \in \Gamma(\overset{p-1}{\wedge} T_U^*(\mathcal{F}) \otimes \gamma_U^*(\mathcal{F}))$ が存在する。

$$D(\langle\psi_U\rangle \otimes \omega_U) = \langle\varphi_U\rangle \otimes \omega_U \qquad \text{on } U$$

<u>証明</u>　　条件 $D(\langle\varphi\rangle \otimes \omega) = 0$ より $d_{\mathcal{F}}\langle\varphi_U\rangle + d_{\mathcal{F}}(\log h) \wedge \langle\varphi_U\rangle = 0$　on U．　そこで，$h \cdot \langle\varphi_U\rangle$ を考えこれの微分をとると，$d_{\mathcal{F}}(h \cdot \langle\varphi_U\rangle) = h\,(d_{\mathcal{F}}\langle\varphi_U\rangle + d_{\mathcal{F}}(\log h) \wedge \langle\varphi_U\rangle) = 0$．　故に，$d_{\mathcal{F}}(h \cdot \langle\varphi_U\rangle) = 0$．　だから，Poincaré の Lemma から，U 上で係数 $C^\infty(U)$ をもつ $dx_1, \cdots, dx_{n-1}$ によって generate された $(p-1)$-形式 $\widetilde{\Psi}_U$ が存在して $d_{\mathcal{F}}\widetilde{\Psi}_U = h \cdot \langle\varphi_U\rangle$ が成立する。　すると，簡単な計算から

$$D(\langle \tfrac{1}{k}\tilde{\varphi}_U \rangle \otimes \omega_U) = \langle \varphi_U \rangle \otimes \omega_U \quad \text{on } U$$

が成立する。 よって $\varphi_U = \frac{1}{k}\tilde{\varphi}_U$ とおけば定理が証明される。

注意　定理 2.5 は $q \geqq 2$ の場合でも成立する[3].

以下において，我々は $H^*(\mathcal{F};D)$ と $\mathcal{F}=\{\omega=0\}$ の第2特性類 Godbillon-Vey class $Gv(\mathcal{F})$ との関係について述べる。 まず，$\mathcal{F}=\{\omega=0\}$ の $Gv(\mathcal{F})$ は[4]によって，$Gv(\mathcal{F})=[\xi\wedge d\xi]\in H^3(M;\mathbb{R})$ とかけていることを思いおこしておく。 次に $(10)'$ を微分することにより

(13)　$d\xi = \eta\wedge\omega$　　ここで，η は M 上の 1-形式

が得られ，さらに，(13)を微分することにより

(14)　$(d\eta + \xi\wedge\eta)\wedge\omega = 0$

Lemma 2.6　(i) $[\langle\eta\rangle\otimes\omega]\in H^1(\mathcal{F};D)$

(ii) $[\langle\xi\wedge\eta\rangle\otimes\omega]\in H^2(\mathcal{F};D)$

証明　(i) $D(\langle\eta\rangle\otimes\omega) = \langle d\eta+\xi\wedge\eta\rangle\otimes\omega = 0$
($\because$ (14)より)

(ii) $D(\langle\xi\wedge\eta\rangle\otimes\omega) = \langle d(\xi\wedge\eta)+\xi\wedge\xi\wedge\eta\rangle\otimes\omega$
$= \langle d\xi\wedge\eta - \xi\wedge d\eta\rangle\otimes\omega = 0$　($\because$ (13)と(14)より)

注意　(9)と Lemma 2.6 の(i)とは全く別のものである。

定理 2.7

(i) もし $[\langle\eta\rangle\otimes\omega]=0$ ならば，$Gv(\mathcal{F})=[\xi\wedge d\xi]=0$

(ii) もし $[\langle\xi\wedge\eta\rangle\otimes\omega]=0$ ならば，$Gv(\mathcal{F})=[\xi\wedge d\xi]=0$

証明　(i) $[\langle\eta\rangle\otimes\omega]=0$ より次の性質をもつ $f\otimes\omega\in\Gamma(\overset{0}{\wedge}T^*(\mathcal{F})\otimes\nu^*(\mathcal{F}))$ がある。$D(f\otimes\omega)=\langle df+\xi\wedge f\rangle\otimes\omega=\langle\eta\rangle\otimes\omega$ i.e. $df+f\xi\equiv\eta \mod \omega$. よって $\xi\wedge d\xi=\xi\wedge\eta\wedge\omega=\xi\wedge(df+f\xi)\wedge\omega=\xi\wedge df\wedge\omega=-df\wedge\xi\wedge\omega=-d(f\cdot\xi\wedge\omega)$.

故に $[\xi\wedge d\xi]=0$

(ii) $[\langle\xi\wedge\eta\rangle\otimes\omega]=0$ より，次の性質をもつ $\langle\varphi\rangle\otimes\omega\in\Gamma(\overset{1}{\wedge}T^*(\mathcal{F})\otimes\nu^*(\mathcal{F}))$ が存在する。$D(\langle\varphi\rangle\otimes\omega)=\langle d\varphi+\xi\wedge\varphi\rangle\otimes\omega=\langle\xi\wedge\eta\rangle\otimes\omega$ i.e. $d\varphi+\xi\wedge\varphi\equiv\xi\wedge\eta \mod \omega$. よって $\xi\wedge d\xi=\xi\wedge\eta\wedge\omega=(d\varphi+\xi\wedge\varphi)\wedge\omega=d\varphi\wedge\omega-\varphi\wedge\xi\wedge\omega=d(\varphi\wedge\omega)$. 故に $[\xi\wedge d\xi]=0$.

注意　定理 2.7 の(i)の仮定の $[\langle\eta\rangle\otimes\omega]=0$ が成立している場合の幾何学的意味は少しわかっているが，(ii) の仮定 $[\langle\xi\wedge\eta\rangle\otimes\omega]=0$ が成立した場合に foliation がどのような状態になっているかは何もわかっていない。

注意　$q\geq 2$ 以上のときは，定理 2.7 の(i)に対応する主張はなくて，(ii) に対応する主張のみが成立する［3］。

Example 2.8　Godbillon-Vey の論文[4]の中にある Roussarie の作った $Gv(\mathcal{F})\in H^3(M;\mathbb{R})$ が non-zero の例を J. Heitsch が[2]で扱っているので，我々もここで取り扱う。$\omega, \omega_1, \omega_2$ は $SL(2,\mathbb{R})$ の left invariant one forms で $d\omega=\omega\wedge\omega_1$，$d\omega_1=\omega\wedge\omega_2$，$d\omega_2=\omega_1\wedge\omega_2$ をみたすものとする。そして，X, Y, Z を $\omega, \omega_1, \omega_2$ の dual な vector field とすると，$[X,Y]=-X$，$[X,Z]=-Y$，$[Y,Z]=-Z$ をみたす。さらに，$\Gamma\subset SL(2,\mathbb{R})$ は discrete subgroup で $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{R})$ がコンパクト多様体になるものとする。今 $M=\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{R})$ とおき，$\omega, \omega_1, \omega_2$，$X, Y, Z$ をそれぞれ M 上の one forms と vector field と思い同じ記号を使うことにする。このとき，M 上の foliation $\mathcal{F}$ は $\{\omega=0\}$ の解によって定義されるものとする。すると $T(\mathcal{F})$ は Y と Z で張られる bundle である。

Proposition 2.9　Example 2.8 の $(M,\mathcal{F})$ に対して，$H^0(\mathcal{F};D)=0$

証明　定義より $H^0(\mathcal{F};D)=\{f\otimes\omega \mid f\in C^\infty(M),\ Y(f)-f=0,\ Z(f)=0\}$ となる。一方 vector field Y の各 orbit が回帰的であることに注意すれば $Y(f)-f=0$ より $f=0$ となる。よって，$H^0(\mathcal{F};D)=0$ である。

Proposition 2.10　Example 2.8 の $(M, \mathcal{F})$ において，$[\langle\omega_2\rangle\otimes\omega]\in H^1(\mathcal{F};D)$ は non-zero class である。

証明　もし，$[\langle\omega_2\rangle\otimes\omega]=0$ と仮定すると，次の式をみたす $f\in C^\infty(M)$ が存在する。$D(f\otimes\omega)=\langle\omega_2\rangle\otimes\omega$. i.e. $Y(f)-f=0$ かつ $Z(f)=1$ と書きかえられる。よって命題 2.9 と同様に $Y(f)-f=0$ より $f=0$ となる。これは $Z(f)=1$ に反するから矛盾。故に $[\langle\omega_2\rangle\otimes\omega]\neq 0$.

問題 I　Example 2.8 の $(M, \mathcal{F})$ において，$Gv(\mathcal{F})\neq 0$ なる事実と定理 2.7 の (ii) をあわせると，$[\langle\omega_1\wedge\omega_2\rangle\otimes\omega]\in H^2(\mathcal{F};D)$ は non-zero class であることがわかる。そこで，$[\langle\omega_1\wedge\omega_2\rangle\otimes\omega]\neq 0$ を直接的に証明しようとすれば $Y(h)-Z(g)=1$ をみたす関数 $h, g\in C^\infty(M)$ が存在しないことを証明することになる。

この $h, g\in C^\infty(M)$ が存在しないことを証明せよ。

問題 II　Example 2.8 の $(M, \mathcal{F})$ において，$Y(h)-Z(g)=0$ をみたす関数 h, g を決定せよ。

References

[1] J. Heitsch ; A cohomology for foliated manifolds,

Comment. Math. Helv. 50 (1975) 197–218

[2] J. Heitsch ; Derivatives of secondary characteristic classes, J. Differential Geometry 13 (1978) 311 — 339

[3] T. Ito ; On the cohomology derived from foliations with trivial normal bundle (to appear)

[4] C. Godbillon et J. Vey ; Un invariant des feuilletages de codimension un, C.R. Acad. Sci. Paris 273 (1971) 92–95

[5] I.M. Gel'fand and D.B. Fuchs ; Cohomologies of the Lie algebra of tangent vector fields on a smooth manifold, Functional Analysis 3 (1969) 32–52

[6] K. Kodaira and D.C. Spencer ; Multifoliate structures, Annals of Math. Vol 74 (1961) 52 – 100

[7] R. Bott ; Lectures on characteristic classes and foliations, Lecture Notes in Math. Vol. 279, Springer, Berlin.

[8] B.L. Reinhart ; Algebraic invariants of foliations, "Proc. of the Symp. on Diff. Equations and Dynamical Systems, Warwick 1969";

Lecture notes in Math., 206 (1971), 119–120, Springer, Berlin.

[9] B. L. Reinhart ; Indices for foliations of the two-dimensional torus, Proc. Int. Conf., Salvador, Brazil, 1971, Dynamical Systems, 421–424, Academic Press, 1973.