数理解析研究所講究録
413巻 1981年 144-152

Wild horseshoe and topological entropy

東海大 情報数理 郡山 彬
東工大 情報科学 永瀬輝男

§0. 序

この報告で、Wild horseshoe を定義し、それの topological entropy を計算する。さらに、1つの応用として、compact mfd. 上の expansive homeo. の class の性質を調べる。

M を compact m-mfd とし、$Hom(M)$ を M 上の homeo. 全体の作る metric space とする。metric は、

$$d(f, g) = \sup\{ d(f(x), g(x))\ ;\ x \in M \}。$$

$E(M)$, $E^{h}(M)$, $E^{ah}(M)$ によって、それぞれ、expansive homeo. 全体, entropy-expansive homeo. 全体, asymptotically entropy-expansive homeo. 全体の集合とする。この時次の結果を得る。

定理. wild horseshoe は asymptotically entropy-expansive ではない。従って、expansive ではない。

系. M を compact m-mfd $(m > 1,\ m \neq 4)$ とする。$E^{h}(M)$ も $E^{ah}(M)$ も $Hom(M)$ で interior point を持たない。

注意．　系に述べた結果は、[YN]の結果からも示せる。

§1．　定義と記法．

エルゴード理論の基本的定理に関しては、[DGS]を参照。また、PL-Topology に関しては、[HD]を参照。

$X=(X,d)$を compact metric space，$f: X \to X$ を homeo. とする。

EおよびSをXの subset とする。nを正整数，$\delta>0$とする。

SがEを(n,δ)-span するとは、各$y \in E$に対して、$x \in S$が存在し、

$$d(f^k(x), f^k(y)) \leqq \delta \quad \text{for all } 0 \leqq k < n$$

を満すことである。$r_n(E,\delta)=r_n(E,\delta,f)$を、$E$を$(n,\delta)$-span する集合の cardinality の最小値とする。compact set K に対して、

$$\bar{r}_f(K,\delta) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log r_n(K,\delta),$$

$$h(f,K) = \lim_{\delta\to 0} \bar{r}_f(K,\delta)$$

とおく。Xが compact であるので$h_{top}(f)=h(f,X)$である。

ここに、$h_{top}(f)$は、fの topological entropy を表わす。

各$x \in X$および$\varepsilon>0$に対して、

$$\Gamma_\varepsilon(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} f^{-n} B_\varepsilon(f^n(x)) = \{y \in X \,;\, d(f^n(x), f^n(y)) \leqq \varepsilon,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

$$h_f^*(\varepsilon) = \sup\{h(f, \Gamma_\varepsilon(x)) \,;\, x \in X\}$$

とおく。ここに$B_\varepsilon(\cdots)$はε-近傍を表わす。

fは、$h_f^*(\varepsilon)=0$ for some $\varepsilon>0$ のとき、entropy-expansive，$\lim_{\varepsilon\to 0} h_f^*(\varepsilon)=0$ のとき、asymptotically entropy-expansive と呼ばれる。

§2. Wild horseshoe

2.1. 定義. $B=[-2,2]\times[-2,2]\subset\mathbb{R}^2$, $W_k=[-1,1]\times\{\frac{k}{n}\}$ $k=0,1,\cdots,n$ とする。$\eta_n:B\to B$ を、次の様な homeo. とする。(1) $\eta_n|_{\partial B}=id.$

(2) 各 $k=0,1,\cdots,n$ に対して、

$$\begin{cases}\eta_n(W_k)\subset[-1,1]\times[-2,-1] & \text{if } k \text{ is even},\\ \eta_n(W_k)\subset[-1,1]\times[1,2] & \text{if } k \text{ is odd}.\end{cases}$$

η_n を type n の horseshoe と呼ぶ（[SS] 参照）

2.2. 補題. C を 2-cell, $g:B\to C$ を homeo. とすると、$h_{top}(g\circ\eta_n\circ g^{-1})\geq\log n$ である。

証明. [YN] 参照

2.3. 定義. $B_n=[\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n}]\times[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}]$ とし、$\xi_n:B\to B$ を次の様な affine map とする。

$\xi_n(-2,2)=(\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n})$, $\xi_n(2,2)=(\frac{1}{2n},\frac{1}{2n})$

この時、$\{B_n;n=1,2,\cdots\}$ は、B 内の、互に交わらない 2-cell の集合となる。$\phi_0:B\to B$ を次の様な homeo. とする。

(1) $\phi_0|_{B_n}=\xi_n\circ\eta_n\circ\xi_n^{-1}$, (2) $\phi_0|_{(B-\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)}=id.$

この map ϕ_0 を、B 上の wild horseshoe と呼ぶ。

2.4. 補題. $\theta:B\to B$ を $\theta(x,y)=(x,-y)$ で定義される reflection とする。$h_{top}(\theta\circ\phi_0)\geq\log n$, かつ、$h_{top}(\phi_0\circ\theta)\geq\log n$ となる。

証明. $h_{top}(\eta_n \circ \theta) \geqq \log n$, $h_{top}(\theta \cdot \eta_n) \geqq \log n$ は易しい。一方、B_n は、θ-invariant かつ、ϕ_0-invariant だから.

$$h_{top}(\theta \circ \phi_0) \geqq h_{top}(\theta \circ \phi_0|_{B_n}) = h_{top}(\theta \circ \eta_n) \geqq \log n .$$

もう一方の式も同様に証明できる。

2.5. 系. 各自然数 k に対して、$C_k = [-1/2k, 1/2k] \times [-1/2k, 1/2k]$ とおくと、$h_{top}(\phi_0|_{C_k}) = \infty$.

証明. 各 $n \geqq k$ に対して. $C_k \supset B_n$ より.

$$h_{top}(\phi_0|_{C_k}) = h_{top}(\theta \circ \phi_0|_{C_k}) = h_{top}(\phi_0 \circ \theta|_{C_k}) = \infty .$$

$S(B)$ を B の suspension、即ち. $S(B) = B \times [-1, 1] / \{B \times (-1), B \times 1\}$ とする。 B と $B \times 0 \subset S(B)$ は自然に同相となるので、B を $S(B)$ の subspace と考えることにする。各 n に対して、$S^n(B)$ を $S^{n-1}(B)$ の suspension とする。 $B \subset S(B) \subset \cdots \subset S^n(B) \subset \cdots$ である。

2.6. 定義. $\phi_1 = S(\phi_0): S(B) \to S(B)$ を ϕ_0 の suspension とする. 以下帰納的に、$\phi_n : S^n(B) \to S^n(B)$ を $\phi_n = S(\phi_{n-1}) : S(S^{n-1}(B)) \longrightarrow S(S^{n-1}(B))$ で定義する。map ϕ_n を $S^n(B)$ 上の wild horseshoe と呼ぶ。

2.7. 定理. ϕ_n は asymptotical entropy-expansive ではない。

証明. 0 を原点とする。任意の $\varepsilon > 0$ および $1/2k < \varepsilon$ なる

自然数kをとる。 Bは$S^n(B)$の subspace であることに注意する。 C_kは$B_\varepsilon(0)$に含まれ、かつ、ϕ_n-invariant であるから、 $\Gamma_\varepsilon(0) \supset C_k$ となる。従って、

$$h(\phi_n, \Gamma_\varepsilon(0)) \geq h(\phi_n, C_k) = h_{top}(\phi_n|C_k) = h_{top}(\phi_0|C_k) = \infty.$$

故に、 $h^*_{\phi_n}(\varepsilon) = \infty$。 よって、 $\lim_{\varepsilon \to 0} h^*_{\phi_n}(\varepsilon) = \infty$.

§3. 系の証明.

First step. $f: M \to M$ を任意の asymptotically entropy-expansive homeo. とする。Mは compact だから、次の様な homeo. $f_1: M \to M$ が存在する。 (1). f_1は周期kの周期点x_0を持つ。 (2). $d(f_1, f) < \varepsilon/3$ である。

Second step. 次にf_1を、f_3^k-invariant な 2-cell Dを持つ homeo. f_3 で近似する。そのために、3つの場合に分ける。

Case 1. $m \geq 6$ の場合. 各 $i = 1, 2, \cdots, k-1$ に対して、 $x_i = f_1^i(x_0)$ とする。次の様な$\delta > 0$がとれる。

(1) $\delta < \varepsilon/3$, かつ (2). $\{f_1^i(B_\delta(x_0)); i = 0, 1, \cdots, k-1\}$は互に交わらない m-cell の集合となる。

さて、m-cell $B_\delta(x_0)$の interior をN^mとする。実数$\gamma < \delta$が存在し、$f_1^k(B_\gamma(x_0)) \subset N^m$となる。ここで、$B_\gamma(x_0)$の interior を m-dim. Euclidean space と考える。 $\zeta = f_1^k|_{Int(B_\gamma(x_0))}$ とおく。Δを 2-simplex, $\Phi: \Delta \to Int(B_\gamma(x_0))$ を $x_0 \in Int(\Delta)$ なる linear embedding とする。

$\alpha = \frac{1}{2} \cdot d(\zeta \circ \Phi(\Delta), N - \zeta(\mathrm{Int}(B_\gamma(x_0))))$ とおく.

Homma の定理([HM] 又は [RS] 参照)より、次の様な、N^m の isotopy $\{h_t\}$ が存在する.

$$\begin{cases} (1) & h_t|_{(N^m - f_1^k(B_\gamma(x_0)))} = id. \quad かつ \\ (2) & h_1 \circ f_1^k \circ \Phi \quad は \quad \text{piecewise linear}. \end{cases}$$

$f_2 : M \to M$ を次の様に定義する.

$$f_2(x) = \begin{cases} h_1 \circ f_1(x) & \text{if} \quad x \in f_1^{k-1}(B_\gamma(x_0)) \\ f_1(x) & \text{otherwise}. \end{cases}$$

明らかに、f_2 は homeo. また、$\Phi(\Delta)$, $f_2^k \circ \Phi(\Delta)$ は、PL mfd N^m 内の polyhedra である。従って、次の様な、M の ambient isotopy $\{j_t\}$ が存在する。

(1). $j_t|_{(M-N^m)} = id$, かつ　(2) $j_1 \circ f_2^k|_{\Phi(\Delta)} = id$.

そこで、$f_3 = j_1 \circ f_2$ とおく。 $f_3 : M \to M$ は. homeo. で、$f_3^k|_{\Phi(\Delta)} = id.$ を満す。

Case 2. $m = 3$ or 5 の場合. d, N, γ を Case 1 と同様にとる。 $m=3$ or 5 では. Annulus conjecture が成立するから、次の様な、N^m の ambient isotopy $\{h_t\}$ が存在する。

(1) $h_t|_{\partial N} = id$, かつ (2). $h_1 \circ f_1^k(B_\gamma(x_0)) = B_\gamma(x_0)$.

そこで $f_2 : M \to M$ を次の様に定義する.

$$f_2(x) = \begin{cases} h_1 \circ f_1(x) & \text{if} \quad x \in f_1^{k-1}(B_\delta(x_0)) \\ f_1(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

E^m を m-simplex とし、その重心を v_0 とする。$\Phi: E^m \to B_\delta(x_0)$ を、$\Phi(v_0) = x_0$ なる homeo. とする。S^1 を ∂E^m 上の polygonal simple closed curve とし、Δ を、S^1 と v_0 の join とする。$\Phi^{-1} \circ f_2 \circ \Phi|_{\partial\Delta}: \partial\Delta \to \partial E^m$ は、inclusion map $\partial\Delta \hookrightarrow \partial E^m$ と ambient isotopic であるから、この ∂E^m の ambient isotopy を canonical に E^m へ拡張することにより次の様な、M の ambient isotopy $\{\mathfrak{f}_t\}$ を得る。

(1) $\mathfrak{f}_t|_{(M - B_\delta(x_0))} = id$, かつ (2) $\mathfrak{f}_1 \circ f_2^k|_{\Phi(\Delta)} = id$.

そこで、$f_3 = \mathfrak{f}_1 \circ f_2$ とおく。$f_3: M \to M$ は homeo. で、$f_3^k|_{\Phi(\Delta)} = id$ を満す。

Case 3. $m = 2$ の場合。この場合も Annulus Conj. が成立する。従って、f^k が orientation preserving なら、Case 2 と同じ。f^k が orientation reversing の場合、f_2 を次の f_3 で近似する。

(1) $f_3^k(\Phi(\Delta)) = \Phi(\Delta)$, かつ

(2) $\exists$ homeo. $\xi: \Phi(\Delta) \to B$ s.t. $\xi \circ f_3^k \circ \xi^{-1} = \theta$

実際、2-cell 上の2つの orientation reversing homeo. は ambient isotopic であるから、この事は可能である。

以上3つの場合をまとめると、f は次の様な f_3 で近似できる。

(1) $d(f, f_3) < 2\varepsilon/3$,

(2) $\exists$ flat embedding $\Psi : \Delta \longrightarrow B_\delta(x_0)$, Δは 2-simplex.

(3) $\exists$ homeo. $\xi : \Psi(\Delta) \longrightarrow B$ s.t.

$$\xi \cdot f_3^k \circ \xi^{-1} = \begin{cases} \theta & \text{if } m=2 \text{ and } f^k \text{が orien. rever.} \\ id & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Third step. $\Psi(\Delta)$は flat 2-cell だから、次の様な embedding $\Phi : S^{m-2}(B) \longrightarrow B_\delta(x_0)$ が存在する。

(1) $\Phi(B) = \Psi(\Delta)$, かつ

(2)
$$\Phi^{-1} \circ f_3^k \circ \Phi\big|_B = \begin{cases} \theta & \text{if } m=2 \text{ かつ } f^k \text{ は orien. rever.} \\ id & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$f_4 : M \rightarrow M$ を次の様に定義する.

$$f_4(x) = \begin{cases} \Phi \circ \phi_n \circ \Phi^{-1} \circ f_3^k(x) & \text{if } x \in f_3^{-1} \circ \Phi(S^{m-2}(B)) \\ f_3(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

明らかに、$f_4 \notin E^{ak}(M)$ である。

Reference

[DGS] Denker, M., Grillenberger, C., Sigmund, K. : Ergodic Theory on Compact Spaces, L.N. Math. 527. Springer 1976.

[HD] Hudson, J.F.P. : Piecewise Linear Topology, W. A. Benjamin Inc. 1969.

[HM] Homma, T. : On the embedding of polyhedra in manifolds, Yokohama Math. J. 10 (1962), 5−10.

[SS] Smale, S. : Differentiable dynamical systems. Bull. Amer. Math. Soc., 73(1967), 747–817

[YN] Yano, K. : A remark on the topological entropy of homeomorphisms. Inv. Math. 59 (1980), 215–220.