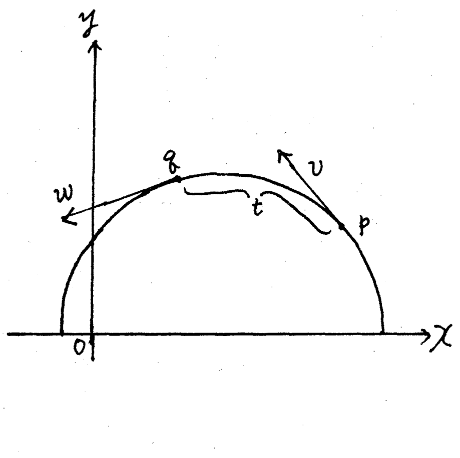
数理解析研究所講究録
413巻 1981年 81-96

等質空間上の力学系

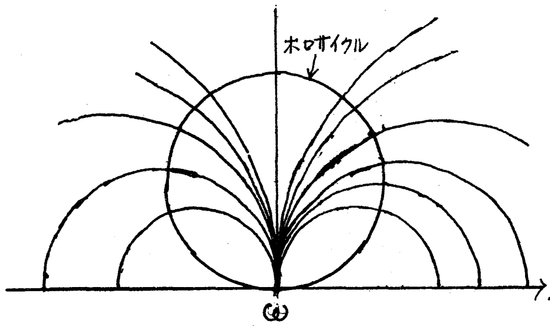
京大 理　　石池時日児

§1 定負曲率曲面の測地流とホロサイクル流

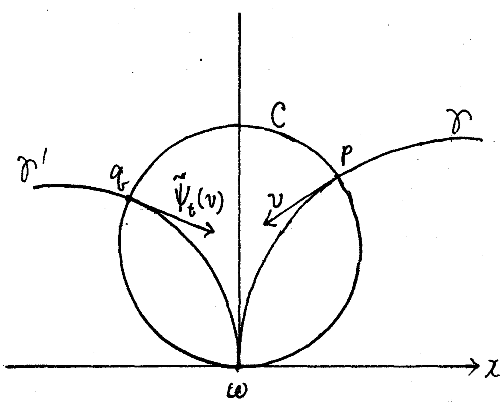
この節ではこの方面の研究の出発点となった古典的研究を述べこの小論の序とする。複素上半平面 $H=\{x+iy \in \mathbb{C};\ y>0\}$ に非ユークリッド距離 $ds^2=(dx^2+dy^2)/y^2$ を入れると定負曲率曲面(いわゆる非ユークリッド平面)ができあがる。この空間の測地線は「x軸に直交する」半円及び直線である。Hの単位長の接ベクトルのなす空間 T_1H を B とおくとき，測地流 $\tilde{\varphi}_t: B\to B$ はつぎのように定義される；$v\in B$とする。$\pi(v)=p$ とおく($\pi: B\to H$は射影とする) pにおいてvに接する測地線γをかく。γに沿って非ユークリッド距離で測って点pから距離がtの点をqとする。qにおいてγに接する単位長のベクトルを$\tilde{\varphi}_t(v)$と定める。(右図を参照)



次にホロサイクル流$\tilde{\Psi}_t : B \to B$を定義しよう。まずホロサイクルの定義から始める。Hの無限遠点はx軸及び∞である。いまωをx軸上の無限遠点とする。ωに集まる測地線（半円）全体に直交する曲線はωにおいてx軸と接する円になる。（ωが∞のときはx軸に平行な直線になる）これがホロサイクルとよばれるものである。（右図参照）



さて，ホロサイクル流Ψ_tは次のように定義される。$v \in B$，$\pi(v) = p$とする。まず，pを通りvを接方向とする測地線γをきめる。γの正方向の無限遠点をωとする。ωに集まる測地線の族に直交し，かつpを通るホロサイクルをCとする。（具体的には，Cはpを通り，ωにおいてx軸と接する円である）pよりCに沿って反時計回りにtほど移動した点をqとする。qを通りωを無限遠点とする測地線γ′のqにおける単位長の接ベクトルを$\tilde{\Psi}_t(v)$とおき，ホロサイクル流$\tilde{\Psi}_t$の定義とする。（右図参照）



つぎにこれらの力学系の行列表示を与えよう。このことは後のリー群の等質空間上の力学系へ発展していくための基礎となる。Hの向きを保つ等長変換の全体を $\mathcal{I}(H)$ で表わす。これらは具体的にはつぎのような1次分数変換の全体である。

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \quad ; \quad \begin{array}{l} a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ ad-bc=1 \end{array}$$

$\mathcal{I}(H)$ は自然に $B\ (=T_1H)$ に作用するが，一意的に推移的であるから，$\mathcal{I}(H) \approx B$ である。以後この二者を同一視する。この同一視によって準同型 $SL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow B$ が

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \text{分数変換 } w = \frac{az+b}{cz+d}$$

と定義される。この準同型の核は $\mathbb{Z}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ である。よって

$$B = SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

かくて空間Bは行列表示された訳だが，上述の測地流やホロサイクル流が行列の言葉でどのように表わされるかを次に考える。複素上半平面Hにおいて，虚数単位 $i=(0,1)$ における y 軸方向の単位長の接ベクトルを ν とする。(1)の対応で $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が ν に対応するように決めておこう。等長変換 $f: z \longrightarrow \dfrac{az+b}{cz+d}$ の微分 df の $B \approx SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ への

作用は，$\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in B$ とするとき，

$$df\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots (2)$$

とくに $df(\nu) = \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ である．

このことに注意すると

$$\tilde{\phi}_t\left\{\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right\} = \tilde{\phi}_t\{df(\nu)\} = df\{\tilde{\phi}_t(\nu)\}$$
$$= \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\tilde{\phi}_t\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

よって $\tilde{\phi}_t\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$ を求めれば十分。簡単な計算より $\pi\{\tilde{\phi}_t(\nu)\} = e^t i$ である。($\pi : B \to H$) また．$\phi_t(\nu)$ のユークリッド距離での大きさは e^t である。したがって $\tilde{\phi}_t(\nu) = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ とおくとき，

$$\frac{\alpha i+\beta}{\gamma i+\delta} = e^t i, \qquad \frac{1}{(\gamma i+\delta)^2} = e^t$$

を得る。これを解いて，$\alpha = \pm e^{t/2}$，$\delta = \pm e^{-t/2}$，$\beta = \gamma = 0$。

つまり $\tilde{\phi}_t\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2}\end{pmatrix}$ $(\mathrm{mod}\ \mathbb{Z}_2)$ よって．

$$\tilde{\phi}_t\left\{\begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix}a & b \\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2}\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots (3)$$

つまり $\tilde{\Phi}_t$ は行列 $\begin{pmatrix}e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2}\end{pmatrix} = \exp t\begin{pmatrix}1/2 & 0 \\ 0 & -1/2\end{pmatrix}$ を右から掛けることである。

全く同様な考察を行うことによってホロサイクル流の行列表示を得る.

$$\tilde{\psi}_t\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(4)$$

つまり, 行列 $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \exp t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を右から掛けることを意味する。

かかる力学系は回帰性をもたないのだからここでの統計的研究の対象ではない。ここで考察の対象とするのは定負曲率曲面のうち体積が有限なものである。いま M を体積が有限で向付可能な定負曲率曲面とする。M の単位長接空間 T_1M を B_M とおこう。B_M において B のときと同様に測地流 ϕ_t ホロサイクル流 ψ_t が定義される。(ホロサイクル流のときは多少変更が必要。あるいは, M の普遍被覆が H だから, $B = T_1H$ のホロサイクル流を B_M へおとすと言ってもよい)被覆写像 $H \longrightarrow M$ に対する被覆変換 $\Gamma = \pi_1(M)$ は $\mathcal{J}(H)$ に属する。$B = \mathcal{J}(H) = SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ であったから,

$$B_M = \Gamma\backslash B = \Gamma\backslash SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$$

B_M での ϕ_t, ψ_t を B へ持ち上げれば, それらは上述の $\tilde{\phi}_t$, $\tilde{\psi}_t$ になる。したがって, (3), (4) より ϕ_t, ψ_t の行列表示を得る; $g \in SL(2, \mathbb{R})$ に対して,

$$\phi_t(\Gamma g) = \Gamma g \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$$

$$\psi_t(\Gamma g) = \Gamma g \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots (5)$$

さて、これらの力学系に対する次のHedlund－Hopfの定理は古典的であるとともに最とも基本的なものである。

［定理］　体積が有限な定負曲率曲面における測地流、およびホロサイクル流は強混合性をもつ。（したがってエルゴード性もみたす。）

後の説明の便宜のためエルゴード理論の言葉を説明しておく。(S, Σ, μ) を測度空間とし、$\mu(S) < \infty$ とする。保測流 $\phi_t : S \to S$ が与えられているとする。ϕ_t は $L_2(S, \mu)$ のユニタリ変換 U_t を引き起す；

$$(U_t(f))(x) = f(\phi_t(x)) \qquad f \in L_2(S, \mu),\ x \in S.$$

このとき、ϕ_t がエルゴード的とは、$A \in \Sigma$ が ϕ_t-不変 i.e. $\phi_t(A) = A$ $(\forall t \in \mathbb{R})$ ならば、$\mu(A) = 0$ か $\mu(S-A) = 0$ が成り立つことをいう。これは U_t を使っていい換えると、「U_t の固有値1に属する固有空間は定数関数からなる1次元部分空間である」となる。

次にϕ_tが強混合的とは，任意の$A, B \in \Sigma$に対して

$$\lim_{|t| \to \infty} \mu(\phi_t(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B)/\mu(S)$$

が成り立つことである。$\mathfrak{H} = L_2(S, \mu) \ominus \{$定数関数のなす空間$\}$ とおくとき，ϕ_t が強混合的であるための十分条件は，U_t の$\mathfrak{H}$への制限が絶対連続スペクトルをもつことである。

さて話をもとへ戻そう。Hedlund-Hopf の定理の古典的証明は，Birkhoff のエルゴード定理を依拠としてなされた。しかし，[3]においてGel'fand-Formin は測地流にたいして，表現論の結果を用いて別証を与えた。つまり，$SL(2, \mathbb{R})$ のすべての既約表現（これはBargmann によって与えられた）を個々に考察しU_tのスペクトルの絶対連続性を示した。Gel'fand-Formin の結果をつぎに書いておく。

［定 理］ コンパクト定負曲率曲面の測地流はエルゴード的，強混合的，かつ無限重ルベーグスペクトルをもつ。

このGel'fand-Formin のテクニックは結果にくらべて少し大げさ過ぎるが，そのアイデアは Mautner[4]に引き継れ，更にMoore[5] のあざやかな結果へ発展していった。この小論の目的は，その Mooreの仕事を紹介することである。Moore の論文は表現論の方に重点があるが，ここでは力学

系理論の見地に限ることにする。

§2 単純リー群の等質空間の力学系

§1で導入した力学系（測地流φ_t, ホロサイクル流ψ_t）は単純リー群 $G=SL(2,\mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ をその離散部分群Γで割った等質空間$\Gamma\backslash G$における，Gの１変数群の右作用として与えられた；

$$\varphi_t(\Gamma g)=\Gamma g\exp tX$$
$$\psi_t(\Gamma g)=\Gamma g\exp tY$$

ここで $X=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ はリー環 $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の元である。$\{\exp tX\}_{t\in\mathbb{R}}$, $\{\exp tY\}_{t\in\mathbb{R}}$ の閉包はコンパクトでないことを注意しておく。

かかる状況は一般の非コンパクト単純リー群に対して設定できるが，その場合もHedlund-Hopfの定理と同様の結果が成り立つ。これを証明することがこの節の目的である。

以下Gは中心が有限群の（連結）非コンパクト単純リー群とする。ΓはGの閉部分群で$\Gamma\backslash G$が有限不変測度μをもつようなものと仮定する。すなわち

(i) $\mu(\Gamma\backslash G)<\infty$

(ii) 任意のボレル集合$A\subset\Gamma\backslash G$と$g\in\Gamma$に対し

$$\mu(Ag)=\mu(A)$$

この条件(ii)はΓが離散群であれば常に満足される。

さて、Gのリー環を$\mathfrak{g}$で表わす。そのとき，

[定 理] G及びΓは上述とする。Gの1変数群$\{\exp tx\}$ $(x \in \mathfrak{g})$ が$\Gamma \backslash G$に作用してできる力学系 $\psi_t : \Gamma g \to \Gamma g \exp tx$ が強混合的である $\Longleftrightarrow$ $\{\exp tx\}_{t \in \mathbb{R}}$ の閉包がコンパクトでない。$\Longleftrightarrow$ $ad(x)$が実部が0でない固有値をもつか又は半単純(=対角化可能)でない。*

証明に入るまえにモートナー環というものを定義しておく。この用語はこの小論中にのみ通用する。かく名付けたのは，MautnerやMooreの仕事において重要な役割を果すMautnerの補題(付録を見よ)に現われるからである。

可解リー環$\mathfrak{s}$がモートナー環とは，$\mathfrak{s}$が2次元であるか，——このときは適当に基底X, Yをとると

$$[X, Y] = Y \tag{6}$$

又は$\mathfrak{s}$が3次元であって，次のような基底X, Y_1, Y_2がとれる場合をいう；

$$\begin{aligned} &[X, Y_1] = Y_1 - \rho Y_2, \quad [X, Y_2] = \rho Y_1 + Y_2 \\ &[Y_1, Y_2] = 0 \end{aligned} \quad \cdots\cdots (7)$$

ただし ρ は任意の実数である。

次にGのユニタリ表現Uを定義しておく。表現Uのヒルベルト空間は $L_2(\Gamma \backslash G, \mu)$ とし,

---

* 2番目の$\Longleftrightarrow$はただの言い換えである。最初の$\Longleftrightarrow$では$\Longleftarrow$が本質的.

$$(U_g f)(\Gamma x) = f(\Gamma x g)$$

とおく。ここで，$f \in L_2(\Gamma\backslash G, \mu)$，　$x, g \in G$．
そして　$\mathfrak{H} = L_2(\Gamma\backslash G, \mu) \ominus$ {定数関数のなす部分空間}
とおき，Uの$\mathfrak{H}$への制限をVとかく。

［補題1］　$x \in \mathfrak{g}$が(ある)モートナー環$\mathfrak{S} \subset \mathfrak{g}$に含まれるならば，$V_t = V(\exp tx)$は絶対連続スペクトルをもつ。

［証明］　簡単のため$\mathfrak{S}$は3次元モートナー環とする。$\mathfrak{n}$を$\mathfrak{S}$の巾零根基とする。(分)のように基底X, Y_1, Y_2をとる。$\mathfrak{n}$はY_1, Y_2から張られる空間である。$x \notin \mathfrak{n}$の場合のみ考える。($x \in \mathfrak{n}$の場合も本質的には同じ。)このときは，$X = x$となるように上の基底がとれる。$\exp tx$の$\mathfrak{n}$への随伴作用を$\widetilde{Ad}(\exp tx)$で表わす。$\mathfrak{n}$にY_1, Y_2による座標をいれておくと，

$$\widetilde{Ad}(\exp tx) = e^t \begin{pmatrix} \cos pt, & \sin pt \\ -\sin pt, & \cos pt \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots (8)$$

さて，$w \in \mathfrak{n} = \mathbb{R}^2$に対して，　$U^*(w) = V(\exp w)$
とおく。Stoneの定理より，

$$V^*(w) = \int_{\mathfrak{n}} e^{iw\cdot\xi}\, dP_\xi \qquad \begin{pmatrix} w\cdot\xi \text{ は } \mathbb{R}^2 \\ \text{の内積} \end{pmatrix}$$

ここでP_ξは$\mathfrak{n} = \mathbb{R}^2$におけるスペクトル測度である。
ボレル集合$\sigma \subset \mathbb{R}^1$に対し，$\sigma^* = \{w \in \mathfrak{n}\,;\ \log|w| \in \sigma\}$とお

き $Q(\sigma)=P(\sigma^*)$ と定義する。$Q(\sigma)$ が $\mathbb{R}^1$ のスペクトル測度であるためには $P(\{0\})=0$ を証明する必要がある。これはかなり本質的部分であるが証明にはかなり準備が必要なので認めて先へ進む。U の代わりに V を用いるのもここで必要だからである。(8) から $\widetilde{\mathrm{Ad}}(\exp tx)\,\sigma^*=(\sigma+t)^*$，ここで，$\sigma+t=\{s+t\,;\,s\in\sigma\}$ とおく。次の等式が成り立つ。

$$Q(\sigma+t)=V(\exp(-tx))\,Q(\sigma)\,V(\exp tx) \qquad \cdots\cdots(9)$$

▨ まず，

$$V^*(w)=\int_{\mathfrak{n}} e^{iw\cdot\xi}\,dP_\xi$$

よって

$$V(\exp(-tx))\,V^*(w)\,V(\exp tx)$$
$$=\int_{\mathfrak{n}} e^{iw\cdot\xi}\,V(\exp(-tx))\,dP_\xi\,V(\exp tx)$$

ところが

$$\text{左辺}=V^*(\widetilde{\mathrm{Ad}}(\exp(-tx)w))$$
$$=\int_{\mathfrak{n}}\exp\left[i\left\{e^{-t}\begin{pmatrix}\cos pt, & -\sin pt\\ \sin pt, & \cos pt\end{pmatrix}w\right\}\cdot\xi\right]dP_\xi \quad (\because (8))$$
$$=\int_{\mathfrak{n}} e^{iw\cdot\xi}\,d\widetilde{P}_\xi$$

ここで，$\widetilde{P}$ は $\mathfrak{n}$ のスペクトル測度で，

$$\widetilde{P}(\Delta)=P\left\{e^{t}\begin{pmatrix}\cos pt, & -\sin pt\\ \sin pt, & \cos pt\end{pmatrix}\Delta\right\} \qquad \Delta\subset\mathbb{R}^2$$

で定義する。そうするとスペクトル分解の一意性より，

$$\tilde{P}(\Delta) = \pi(\exp(-tx))P(\Delta)\pi(\exp tx)$$

よって

$$Q(\sigma+t) = V(\exp(-tx))Q(\sigma)V(\exp tx)$$

となることは $\tilde{P}$ の定義から明らか． $\boxed{}$

いま

$$W_s = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} \, dQ_\lambda$$

とおく。(9) より，また $V_t = V(\exp tx)$ にも注意して，

$$W_s V_t = e^{-its} V_t W_s \qquad s, t \in \mathbb{R} \qquad \cdots\cdots(10)$$

ところが，次の Mackey の定理[7]より，V_t は絶対連続スペクトルをもつことがわかる。

[定 理] 可分なヒルベルト空間 $\mathfrak{H}$ のユニタリ変換群 V_t, W_t $(t \in \mathbb{R})$ が (10) をみたすとき，$\mathfrak{H}$ は高々可算個の V_t 及び W_t 不変な閉部分空間の直和に分解し，V_t, W_t の各成分への制限は次の $L_2(\mathbb{R})$ のユニタリ変換 U_t と同値である； $(U_t f)(u) = f(u+t)$

したがって，V_t, W_t は共にルベーグスペクトルをもつ。

以上で補題1の証明を終る。

さて，かってな $x \in \mathfrak{g}$ は半単純成分 x_1 と巾零成分 x_2 の和に分解される； $x = x_1 + x_2$, $[x_1, x_2] = 0$,

$\mathrm{ad}\, x_1$ は半単純，$\mathrm{ad}\, x_2$ は巾零線形変換。

[補題2] つぎの場合，x は $\mathfrak{g}$ のモートナー環に含まれる。

(1) $\mathrm{ad}\,x$ の固有値の実部が0でないとき，

(2) $x_1 = 0$ のとき．

[(1)の場合] $\mathrm{ad}\,x$ が正の実部をもつ固有値を有すると仮定し，実部の最大な固有値を λ とし，λ に属する固有ベクトルを y とする。$y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$，($\mathfrak{g}$の複素化)

$$[x, y] = \lambda y \qquad \cdots\cdots(11)$$

$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} + i\mathfrak{g}$ において共役対応 $X+iY \to X-iY$ を σ で表わす。そうすると

$$[x, \sigma(y)] = \bar{\lambda}\,\sigma(y)$$

よって，$[y, \sigma(y)] \neq 0$ ならば，これは $\lambda+\bar{\lambda}$ に属する $\mathrm{ad}\,x$ の固有ベクトルである。λ のとり方から $\lambda+\bar{\lambda}$ は固有値ではありえない。よって

$$[y, \sigma(y)] = 0 \qquad \cdots\cdots(12)$$

y と $\sigma(y)$ によって張られる空間を $\mathfrak{n}$ とする。$\sigma(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$ に注意して，$\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{g}$ とおく。x と $\mathfrak{n}_0$ によって生成されるリー環がモートナー環になることは，(11)，(12) から直ちに分る。

[(2)の場合] ヤコブソン－モロゾフの定理（[8] p100 定理17）より，(中への)同型 $\psi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{g}$ で．

$\psi\left\{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}=x$ となるものが存在する。($ad\,x$ が巾零であることに注意せよ。) よって $\psi\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$ と $x=\psi\left\{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ から生成される2次元可解リー環を $\mathfrak{S}$ とすればよい。

(補題2の証明終).

したがって $x\in\mathfrak{g}$ が補題2で述べた条件をみたすときは補題1より定理($\Leftarrow$)は成り立つ。残っているのは次の場合である; $ad\,x$ の固有値がすべて純虚数で, かつ $x_2\neq 0$. $\{e^{t\,ad\,x_1}\}_{t\in R}$ の閉包はコンパクトだから $H=\overline{\{\exp tx_1\}_{t\in R}}$ もコンパクトである。(G の中心が有限群であったことを思い出しておく。) しかも可換群である. よって, V は H において離散スペクトルをもつ。よって $V(\exp tx_1)$ も然り。一方補題1, 2 より $V(\exp tx_2)$ は絶対連続スペクトルをもつ。$[x_1,x_2]=0$ より $V(\exp tx_1)$ と $V(\exp sx_2)$, $(t,s\in R)$ は可換だから, $V(\exp tx)=V(\exp tx_1)V(\exp tx_2)$ は絶対連続スペクトルをもつ。

以上で定理($\Leftarrow$)の証明を終る。

最後にこの定理から次の興味深い結果が導びかれることを注意しておく。

[定 理] Γ が $SL(n,R)$ の一様離散部分群であるとき Γ の R^n への作用はエルゴード的である。

[付　録]　モートナーの補題

$\mathfrak{S}$をモートナー環とし，Sをその解析群とする。UをSのユニタリ表現とし，そのヒルベルト空間を$\mathfrak{H}$とする。$\mathfrak{n}$を$\mathfrak{S}$の巾零根基とし，$\mathfrak{n}$に対応する解析部分群をNとする。$X \in \mathfrak{S} - \mathfrak{n}$とする。このとき，$\psi \in \mathfrak{H}$がある実数$\lambda$に対して

$$U(\exp tX)\psi = e^{i\lambda t}\psi, \quad -\infty < t < \infty$$

をみたすならば，すべての$h \in N$に対して

$$U(h)\psi = \psi .$$

証明は簡単である．[9]のAppendix IIを見られたい．

REFERENCES

1. E. Hopf, Statistik der Geodatische Linien in Manifaltigkeiten Negativer Krummung, Berichite Verhandlunge der Sachsischen Akademie von Wissenschaften zu Leipzig, vol. 65 (1939) 261-304.

2. G. Hedlund, Fuchsian groups and mixtures, Ann. Math. vol. 40 (1939) 370-383.

3. I. Gelfant - S. Formin, Geodesic flows on manifolds of constant negative curvature, Uspehi Mat. Nauk vol. 7 118-137.

4. F. Mautner, Geodesic flows on symmetric Riemann spaces, Ann. Math., vol. 65 (1957) 416-431.

5. C. Moore, Ergodicity of flows on homogeneous spaces, Amer. J. Math., vol. 88 (1966) 154-178.

6. L. Auslander - L. Green - F. Hahn, Flows on homogeneous spaces, Annals of Mathematical Studies No. 53, Princeton University Press, 1963.

7. G. Mackey, A theorem of Stone and von Neumann, Duke Math. J., vol. 16 (1949) 313-326.

8. Jacbson, Lie algebras, Interscience, 1962.

9. L. Auslander - L. Green, G-induced flows, Amer. J. Math., vol. 88 (1966) 43-60.