数理解析研究所講究録
414巻 1981年 234-270

Kähler曲面上の反自己双対接続のモジュライについて

筑波大　数学系　　伊藤光弘

序．　S^4上の(反)自己双対Yang-Mills方程式解が1970年代に入って Belavin et al., t'Hooft, Jackiw et al. らによってみいだされるに及んで，解のパラメータの自由度，解のモジュライ空間の構造がYang-Mills理論の考察の対象となってきている。実際に，自由度についての Schwarz [17]の結果をさらに深める，モジュライ空間についての次のような定理がえられている。

<u>定理</u>（Atiyah, Hitchin & Singer [2]）

M をコンパクトむきづけ可能な自己双対 Riemann 多様体とし，いたるところスカラー曲率は正とする。P を M 上の G-主束（G；コンパクト半単純 Lie 群）とする。すると，P上の既約な自己双対 G-接続のなすモジュライ空間は，空でなければ，次元

$$\mathrm{Pont}_1(\mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}}) - \frac{1}{2}\dim G\,(\chi - \tau)$$

の多様体である。

また S^4 上の instanton 数 n の $SU(2n)$-自己双対接続が，Drinfeld & Manin [6] によってあからさまな形で構成されており，

モジュライ空間の構造も明らかにされつつある(Rawnsley [10] 参照)。

本論では，反自己双対接続のなすモジュライの次元について，空間がKähler曲面の場合に議論を試みる。Kähler曲面の場合にも，Atiyah et al の定理と同様の事実が成立する。

定理　M をコンパクト Kähler 曲面で，スカラー曲率がいたるところ正とする。P を M 上の G-主束，E を P に同伴した複素ベクトル束とする（G；コンパクト半単純 Lie 群）。E 上の既約な反自己双対G-接続の無限小変形のなす空間の次元は

$$-\mathrm{Pont}_1(\mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}}) - \frac{1}{2}\dim G(\chi+\tau)$$

で与えられる。$\mathfrak{g}_P$ は P に同伴した Adjoint 束，Pont_1 は第1-Pontrjagin 類，χ，τ は M の Euler 数，符号数をあらわす。

定理は Atiyah et al. のそれとほゞ平行に証明される。Atiyah et al. の証明の着想は次のふたつである。自己双対接続の1-パラメータ族の一次近似である無限小変形から，楕円複体がえられ，Atiyah-Singer の指数定理と消滅定理とから，無限小変形のなす空間の次元が求められる。次に複素多様体の複素構造の変形理論に用いられた Kuranishi の方法が全くアナロジーに接続の変形に適用され，モジュライが多様体構造をもつことが示されるのである。

Kuranishi の方法を我々の定理に応用すれば，ただちに次の系

がえられる。

系. 定理と同じ条件のもとに，既約な反自己双対 G-接続のモジュライ空間は，それが空でなければ，$-\mathrm{Pont}_1(\mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}}) - \frac{1}{2}\dim G(\chi+\tau)$ の次元の多様体である。

注. (1) Atiyah et al. の定理では，底空間がスピン構造をもつことを仮定してないが，スピン構造からひきおこされる Dirac 作用素の性質が消滅定理に本質的に用いられている。我々の定理は，自己双対ではあるが，スピン構造をもちえない複素射影平面 $P_2(\mathbb{C})$ に適用できる。

(2) 定理で M のむきを反対にすれば，反自己双対接続は自己双対となり，また Pont_1 では符号が逆になるので，次元は Atiyah et al の定理のそれと一致する。

(3) 空間が(反)自己双対とは，共形的に不変な Weyl の共形曲率テンソルを 2-形式とみたときに，(反)自己双対ということである。Kähler 曲面の(反)自己双対性に関しては，$P_2(\mathbb{C})$ が自己双対，Ricci テンソルが消える曲面（例えば K3 曲面）は反自己双対等が知られているのみ（[2]）。

(4) $M = P_2(\mathbb{C})$, $G = SU(2)$ の場合。 E を G-主束に同伴した複素2次元ベクトル束とする。無限小変形のなす空間の次元は，

$-4\,\mathrm{Pont}_1(E)+2C_1^2(E)-6$。 E が反自己双対接続をもてば，$\mathrm{Pont}_1(E)\leqq 0$。 $c_1(E)=0$， $c_2(E)=n>0$ の E に対して次元は $2(4n-3)$ である。 この事実は $P_2(\mathbb{C})$ 上の $c_1=0$, $c_2=n$ の代数的 2 次元ベクトル束のモジュライが複素 $4n-3$ 次元のなめらかな variety であるという事実とぴたりと照応する（Barth [4]）。

定理の証明は，Atiyah et al のそれと同じく，無限小変形と楕円型複体との対応関係をみいだし，Kähler 多様体上の ample な直線束のコホモロジーの消滅定理に用いられた Bochner タイプの Laplacian の評価がえられる（Kodaira & Morrow [9]）。その際，反自己双対 2-形式を Kähler 計量に同伴する基本形式と直交する (1, 1) タイプの 2-形式と特徴づける命題が本質的である。

§1. ベクトル束上の接続と曲率

M を実 4 次元 Riemann 多様体， x^1, x^2, x^3, x^4 を局所座標， $h=h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$ をその上の Riemann 計量とする。以下簡単のため コンパクト半単純 Lie 群 G は特殊ユニタリ群 $SU(n)$ とする; $G=SU(n)=\{(g^i_j)\ ;\ (g^i_j)\cdot{}^t\overline{(g^i_j)}=(\delta^i_j)\}$。 P を M 上の G-主束とすると， P の適当な局所自明近傍による M の開被覆 $\{U, V, W, \cdots\}$ がとれて，次をみたす変換系 $\{g_{UV}\}_{U,V}$

が定まる；

(1) g_{UV} ; $U\cap V \xrightarrow{C^\infty} G$ 　($g_{UV}(x)=(g^i_j(x))$ は x について C^∞),

(2) $g_{UV}(x)\cdot g_{VW}(x) = g_{UW}(x)$, 　$x\in U\cap V\cap W$。

P の元は U 上，対 (x, g) で表示される，$x\in U$, $g\in G$。その表示は，V 上の表示 (x, g') に対して，次の変換をうける；

(1-1) 　$g = g_{UV}(x)\cdot g'$。

＜ベクトル束＞ 　G-主束 P に同伴したベクトル束 E が定まる。E の元は U 上，$\left(x, \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}\right)$，$x\in U$, $\begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix}\in \mathbb{C}^n$ と表示され，V 上の表示 $\left(x, \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}\right)$ に対して，

(1-2) 　$$\begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^i_j(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}, \quad \left(g^i_j(x)\right) = g_{UV}(x)$$

なる変換をうける。 $\mathbf{t}_{U,i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i$ 　$(1\le i\le n)$ とおくと，E の元は $(x, \sum_i u^i \mathbf{t}_{U,i})$ と表わされる。 $\{\mathbf{t}_{U,i} = \mathbf{t}_i\}_{1\le i\le n}$ を E の局所フレームという。

定義 1-1 (E の切断) 　U 上のベクトル値 C^∞ 関数 ϕ_U の系 $\phi = \{\phi_U\}_U$ が E の切断とは 次の (1), (2) をみたすときをいう；

(1) 　$\phi_U(x) = \begin{pmatrix} \phi^1_U(x) \\ \vdots \\ \phi^n_U(x) \end{pmatrix}$, 　$\phi^i_U(x)$ は x の C^∞ 関数,

(2) 　$\begin{pmatrix} \phi^1_U(x) \\ \vdots \\ \phi^n_U(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^i_j(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^1_V(x) \\ \vdots \\ \phi^n_V(x) \end{pmatrix}$, 　$x\in U\cap V$。

$A^0(E)=\{E$の切断全体$\}$とすると，$\phi, \psi \in A^0(E)$, f；M上の複素数値C^∞関数に対して，$\phi+\psi$, $f\phi \in A^0(E)$。

定義1-1において，ϕ_U^iをU上のp-形式にかえたものを，E-値p-形式という（$p \geqq 1$）。$A^p(E)=\{E$-値p-形式全体$\}$とする。

<ベクトル束上の接続>

<u>定義</u>1-2（<u>接続</u>）

∇；$A^0(E) \rightarrow A^1(E)$がE上の<u>接続</u>とは次の(1), (2)をみたすときをいう；

(1) $\nabla(\phi+\psi)= \nabla\phi + \nabla\psi$ （線形演算）

(2) $\nabla(f\phi) = df\cdot\phi + f(\nabla\phi)$ （微分演算）

Eの切断ϕは局所的には$\phi=\sum_i \phi^i t_i$であるから，(1), (2)から$\nabla\phi=\sum_i d\phi^i t_i + \sum_i \phi^i \nabla t_i$。$\nabla t_i$は$t_i$の，1-形式を係数とする一次結合であらわされる；$\nabla t_i = \sum_j A^{\nabla}_U{}^j_i t_j$，$A^{\nabla}_U{}^j_i = \sum_\alpha A^{\nabla}_\alpha{}^j_i dx^\alpha$。よって

(1-3) $\nabla\phi = \sum_i (d\phi^i + \sum_j \phi^j A^{\nabla}_U{}^i_j) t_i$。

$(A^{\nabla}{}^i_j)$はUでの∇の<u>接続形式</u>といわれる。$\{s_i\}(1\leq i\leq n)$をV上での局所フレームとすれば，(1-2)から $s_i = \sum_j g^j_i(x)\, t_j$ $(1\leq i \leq n)$。

Vでの接続形式$(A^{\nabla}_V{}^i_j)$はしたがって，(1), (2)から

(1-4) $A^{\nabla}_V(x)^j_i = \sum_k dg(x)^k_i \cdot g^{-1}(x)^j_k + \sum_{k,l} g(x)^l_i\, A^{\nabla}_U(x)^k_l\, g^{-1}(x)^j_k$
$x \in U\cap V$,

行列表示すれば

(1-4') $A^{\nabla}_V = dg_{UV}\cdot g^{-1}_{UV} + g_{UV}\cdot A^{\nabla}_U \cdot g^{-1}_{UV}$。

逆に，（1-4）をみたす行列係数1-形式の系 $\{A_U{}^i_j\}_U$ から（1-3）によってE上の接続が定義される。

注．（1）　∇ は1階の微分作用素。

（2）　（1-4′）の右辺第1項は，Lie環 $\mathfrak{g} = su(n)$ に値をとることがわかる（∵ g_{UV} が $G = SU(n)$ に値をとる）。

（3）　$\nabla_\mu \phi^i = \partial_\mu \phi^i + \sum_j \phi^j A^{\nabla}_\mu{}^i_j$ とおくと，$\nabla\phi = (\nabla_\mu \phi^i) dx^\mu t_i$（以下 Einstein の総和規約に従う）。接ベクトル $X = X^\alpha \partial_\alpha$ に対して，$\nabla_X \phi = X^\alpha \nabla_\alpha \phi^i t_i$ を ϕ の X 方向の ∇-共変微分係数という。

<u>定義</u> 1-3（<u>G-接続</u>）

E上の接続 ∇ が <u>G-接続</u> とは，接続形式 $(A^{\nabla}{}^i_j)$ が $\mathfrak{g}$ に値をもつ1-形式のときをいう。

注．(2) から，定義は局所自明近傍のとり方によらないことがわかる。

＜曲率＞

接続 ∇; $A^0(E) \longrightarrow A^1(E)$ を $A^1(E) \longrightarrow A^2(E)$ に延長しよう。そのしかたは外微分 d の自然な一般化；

$$d^{\nabla}(\omega^i t_i) = d\omega^i t_i - \omega^i \wedge \nabla t_i \quad , \quad \omega^i ;\ 1\text{-形式。}$$

より一般的に

$$(1\text{-}5) \qquad d^{\nabla}(\theta^i t_i) = d\theta^i t_i + (-1)^p \theta^i \wedge \nabla t_i \qquad \theta^i ;\ p\text{-形式}$$

として d^{∇}; $A^p(E) \longrightarrow A^{p+1}(E)$ $(p \geq 1)$ が定義される。

外微分 d は $d \circ d = 0$（複体）をみたすが共変外微分

d^∇ はどうであろうか。 実際, $\phi = \phi^i \mathbf{t}_i \in A^0(E)$ に対して,

$d^\nabla \circ \nabla(\phi) = d^\nabla\{(d\phi^i + \phi^j A^{\nabla i}_j)\mathbf{t}_i\} = d(d\phi^i + \phi^j A^{\nabla i}_j)\mathbf{t}_i$
$-(d\phi^i + \phi^j A^{\nabla i}_j)\wedge A^{\nabla k}_i \mathbf{t}_k = d\phi^j \wedge A^{\nabla i}_j \mathbf{t}_i + \phi^j dA^{\nabla i}_j \mathbf{t}_i - d\phi^i \wedge A^{\nabla k}_i$
$\mathbf{t}_k - \phi^j A^{\nabla i}_j \wedge A^{\nabla k}_i \mathbf{t}_k = (dA^{\nabla i}_j - A^{\nabla k}_j \wedge A^{\nabla i}_k)\phi^j \mathbf{t}_i$ となる。

<u>定義</u> 1-4 (<u>曲率</u>)　Eの切断 ϕ に対して, $d^\nabla \circ \nabla(\phi) = R^\nabla(\phi)$ で定義される束写像 R^∇ を, 接続 ∇ の<u>曲率形式</u>という。

$$
\begin{tikzcd}
A^0(E) \arrow[rr, "R^\nabla"] \arrow[dr, "\nabla"'] & \circlearrowleft & A^2(E) \\
& A^1(E) \arrow[ur, "d^\nabla"'] &
\end{tikzcd}
$$

すなわち, $d^\nabla \circ \nabla(\phi) = R^{\nabla i}_j \phi^j \mathbf{t}_i$ とおくと,

(1-6)　$R^{\nabla i}_j = dA^{\nabla i}_j - A^{\nabla k}_j \wedge A^{\nabla i}_k$　　$(R^\nabla = dA^\nabla - A^\nabla \wedge A^\nabla)$

接続形式 A^∇ が (1-4) の変換則に従うので, 曲率形式は群Gの Adjoint 表現をうける;

(1-7)　$R^{\nabla}_{V}{}^i_j = g^l_j \cdot R^{\nabla}_{U}{}^k_l \cdot g^{-1}{}^i_k$

証明は次のように行えばよい。 行列表示を用いて,

$R^\nabla_V = dA^\nabla_V - A^\nabla_V \wedge A^\nabla_V$

$= d(dg\cdot g^{-1} + gA^\nabla_U g^{-1}) - (dg\cdot g^{-1} + gA^\nabla_U g^{-1})\wedge(dg\cdot g^{-1} + gA^\nabla_U g^{-1})$

$dg\cdot g^{-1} + g\cdot dg^{-1} = 0$ を用いて

$= ddg\cdot g^{-1} - \cancel{dg\wedge dg^{-1}} + \cancel{dg\wedge A_U\cdot g^{-1}} + g\cdot dA_U\cdot g^{-1} - g\cdot \cancel{A_U\wedge dg^{-1}}$

$-(dg\cdot g^{-1}\cancel{\wedge dg}\cdot g^{-1} + dg\cdot \cancel{g^{-1}\wedge g}\cdot A_U\cdot g^{-1}) + g\cdot A\cdot\cancel{g^{-1}\wedge dg}\cdot g^{-1}$

$+ g\cdot A_U\cdot g^{-1}\wedge g\cdot A_U\cdot g^{-1})$

$$= g\cdot(dA_U - A_U\wedge A_U)\cdot g^{-1} = g\cdot R^{\nabla}_{U}\cdot g^{-1}.$$

さて,

$$R^{\nabla}{}^{i}_{j} = dA^{\nabla}{}^{i}_{j} - A^{\nabla}{}^{k}_{j}\wedge A^{\nabla}{}^{i}_{k}$$

$$= \partial_\mu A^{\nabla}_{\nu}{}^{i}_{j}\, dx^\mu\wedge dx^\nu - A^{\nabla}_{\mu}{}^{k}_{j} A^{\nabla}_{\nu}{}^{i}_{k}\, dx^\mu\wedge dx^\nu$$

$$(1\text{-}8)\quad = \sum_{\mu<\nu}\{\partial_\mu A^{\nabla}_{\nu}{}^{i}_{j} - \partial_\nu A^{\nabla}_{\mu}{}^{i}_{j} - [A^{\nabla}_{\mu}, A^{\nabla}_{\nu}]^{i}_{j}\}\, dx^\mu\wedge dx^\nu$$

($[B, C]^{i}_{j} = B^{k}_{j} C^{i}_{k} - C^{k}_{j} B^{i}_{k}$ を用いた), であるから, $R^{\nabla}{}^{i}_{j}$ の $dx^\mu\wedge dx^\nu$ の係数 $R^{\nabla}_{\mu\nu}{}^{i}_{j}$ は $\mathfrak{g}$ に値をもち, R^{∇} が (1-7) の変換をうけることから, R^{∇} は $\mathfrak{g}_P$ - 値 2-形式とみることができる ; $R^{\nabla}\in A^2(\mathfrak{g}_P)$。 ここに Adjoint 束 $\mathfrak{g}_P$ はファイバーが Lie 環 $\mathfrak{g}$ のベクトル束で, 次のように定義される。

$G = SU(n)$ は $\mathfrak{g} = su(n)$ に Adjoint 表現で自然に作用する; $X \longmapsto U\cdot X\cdot U^{-1}$。 この作用により主束 P に同伴した $\mathfrak{g}$ をファイバーとするベクトル束がえられる。 これを $\mathfrak{g}_P$ で表わし, Adjoint 束とよぶ。

注. (1) $\mathfrak{g}_P$ の元は, $(x, (a^{i}_{j}))$, $x\in U$, $(a^{i}_{j})\in\mathfrak{g}$ とみなされ,

$$(1\text{-}9)\qquad (a^{i}_{j}) = g_{UV}(x)\cdot(a'^{i}_{j})\cdot g^{-1}_{UV}(x), \quad x\in U\cap V$$

なる変換則をみたす。 $\mathfrak{g}_P$ の切断 ($\mathfrak{g}_P$ に値をもつ p-形式) は $\mathfrak{g}$ に値をもつ U 上の C^∞ 関数 (p-形式) a_U の系 $\{a_U\}_U$ で (1-9) をみたすものである。 記号 $A^0(\mathfrak{g}_P) = \{\mathfrak{g}_P$ の切断$\}$, $A^p(\mathfrak{g}_P) = \{\mathfrak{g}_P$ - 値 p-形式$\}$ を用いる。

(2) $A^0(\mathfrak{g}_P)$ は Lie 環の構造をもつ。

< $\mathfrak{g}_P$ 上の接続 >

さて，$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$ が $\mathbb{C}^n$ に自然な形で働くので，$A^0(\mathfrak{g}_P)$ は $A^0(E)$ の一次変換を与える。$\mathfrak{g}_P$ の切断 $\Phi = \{\Phi_U\}_U$，$\Phi_U = \Phi^i_j$ は E の切断 $\phi = \{\phi_U\}_U$，$\phi_U = \phi^i_U \mathfrak{t}_i$ に対して，

$\Phi(\phi) = \{\Phi_U(\phi_U)\}_U$，$\Phi_U(\phi_U) = \Phi^i_j \phi^j \mathfrak{t}_i$ と作用する。

G-接続 ∇ は自然な形で，ベクトル束 $\mathfrak{g}_P$ 上の接続をひきおこす；

(1-10) $\quad A^0(\mathfrak{g}_P) \xrightarrow{\nabla} A^1(\mathfrak{g}_P)$； $(\nabla\Phi)(\phi) = \nabla(\Phi(\phi)) - \Phi(\nabla\phi)$

$A^p(E)$ 上に共変外微分 d^∇ が拡張されたと同様に，$\mathfrak{g}_P$ 上の接続 ∇ に対しても，$A^p(\mathfrak{g}_P)$ 上の共変外微分 d^∇ が自然に定まる。

$\mathfrak{g}_P$ 上の接続 ∇ の接続形式を求めよう。

$$\nabla(\Phi\phi) = \nabla(\Phi^i_j \phi^j \mathfrak{t}_i) = d(\Phi^i_j \phi^j)\mathfrak{t}_i + \Phi^k_j \phi^j A^{\nabla}{}_k{}^i \mathfrak{t}_i,$$

$$\Phi(\nabla\phi) = \Phi^i_j (d\phi^j + \phi^k A^{\nabla}{}_k{}^j)\mathfrak{t}_i = \Phi^i_j d\phi^j \mathfrak{t}_i + \Phi^i_j \phi^k A^{\nabla}{}_k{}^j \mathfrak{t}_i,$$

よって

$$\begin{aligned}\nabla(\Phi(\phi)) - \Phi(\nabla\phi) &= d\Phi^i_j \phi^j \mathfrak{t}_i + (\Phi^k_j A^{\nabla}{}_k{}^i - A^{\nabla}{}_j{}^k \Phi^i_k)\phi^j \mathfrak{t}_i \\ &= (d\Phi^i_j + [\Phi, A^{\nabla}_\mu]^i_j dx^\mu)\phi^j \mathfrak{t}_i,\end{aligned}$$

すなわち，

(1-11) $\quad \nabla\Phi^i_j = d\Phi^i_j + [\Phi, A^{\nabla}_\mu]^i_j dx^\mu$

いま，$\mathfrak{g}_P$-値 p-形式 Φ^i_j，$\mathfrak{g}_P$-値 q-形式 Ψ^i_j に対して，外積を

(1-12) $$[\Phi\wedge\Psi]^i_j = \Phi^k_j\wedge\Psi^i_k - (-1)^{pq}\,\Psi^k_j\wedge\Phi^i_k$$

で定義すると，$\mathfrak{g}_P$-値 p-形式 Φ に対して，d^∇ は次のように働らく；

(1-13) $$d^\nabla\Phi^i_j = d\Phi^i_j + (-1)^p[\Phi\wedge A^\nabla]^i_j$$

次の公式は重要である；

(1-14) $$d^\nabla\circ\nabla\Phi^i_j = [\Phi\wedge R^\nabla]^i_j \quad,\quad \Phi\in A^0(\mathfrak{g}_P)。$$

証明は次のようにすればよい。$\mathfrak{g}_P$ 値 1-形式 Ψ に対して，

$d^\nabla\Psi = d\Psi - [\Psi\wedge A^\nabla] = d\Psi - (\Psi\wedge A^\nabla + A^\nabla\wedge\Psi)$。$\Psi$ に

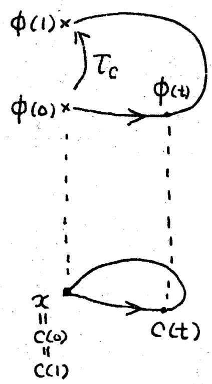
$\nabla\Phi = d\Phi + [\Phi, A^\nabla] = d\Phi + \Phi\cdot A^\nabla - A^\nabla\cdot\Phi$ を代入して，

$$\begin{aligned}
d^\nabla(\nabla\Phi) &= d(d\Phi + \Phi\cdot A^\nabla - A^\nabla\cdot\Phi) - (d\Phi + \Phi\cdot A^\nabla - A^\nabla\cdot\Phi)\wedge A^\nabla \\
&\quad - A^\nabla\wedge(d\Phi + \Phi\cdot A^\nabla - A^\nabla\cdot\Phi) \\
&= \cancel{d\Phi\wedge A^\nabla} + \Phi\cdot dA^\nabla - dA^\nabla\cdot\Phi + \cancel{A^\nabla\wedge d\Phi} \\
&\quad - (\cancel{d\Phi\wedge A^\nabla} + \Phi\cdot A^\nabla\wedge A^\nabla - \cancel{A^\nabla\cdot\Phi\wedge A^\nabla}) \\
&\quad - (\cancel{A^\nabla\wedge d\Phi} + \cancel{A^\nabla\wedge\Phi\cdot A^\nabla} - A^\nabla\wedge A^\nabla\Phi) \\
&= \Phi\cdot(dA^\nabla - A^\nabla\wedge A^\nabla) - (dA^\nabla - A^\nabla\wedge A^\nabla)\cdot\Phi \\
&= [\Phi\wedge R^\nabla]。
\end{aligned}$$

注. (1) $\mathfrak{g}_P$-値 p-形式に対しても (1-14) は成立つ。

(2) 曲率形式 R^∇ は Bianchi の恒等式をみたす；

(1-15) $$d^\nabla R^\nabla = 0 。$$



＜ホロノミー群＞

空間 M の点 x に対して，x を始点，終点とする区分的になめらかな閉曲線全体を $\mathcal{C}(x)$ であらわす。いまひとつの閉曲線 $c \in \mathcal{C}(x)$；$c(0) = c(1) = x$ に対して平行の概念を導入する。

定義 1-5（平行な切断） c 上の E の切断 $\phi(t) = \phi^i(t)\mathfrak{t}_i$ が c にそって平行とは

(1-16) $$\frac{\nabla}{dt}\phi = \left(\partial_\mu \phi^i \frac{dc^\mu}{dt} + \phi^j A_{\mu j}^{\ i} \frac{dc^\mu}{dt}\right)\mathfrak{t}_i = 0 。$$

方程式が線形なことに注意すると，対応 τ_c；$\phi(0) \longmapsto \phi(1)$ は，x 上のファイバーの線形変換を与えることがわかる。いま接続が G-接続とすると，G-主束 P 上に Ehresmann 接続がひきおこされ，それによって定義される水平曲線の議論（この辺のことは Spivak [12]，Kobayashi & Nomizu [7] 参照）によると，構造群 G の元 g_c で，$\tau_c = g_c$ なるものがある。また $Ⓗ(x) = \{g_c ; c \in \mathcal{C}(x)\}$ は G の Lie 部分群であり，$Ⓗ(x)$, $Ⓗ(y)$, $(x \neq y)$ は互いに共役である。$Ⓗ(x)$ を G-接続 ∇ の ホロノミー群 という。

<u>定義</u> 1-6（<u>既約な接続</u>）　G-接続 ∇ のホロノミー群が G の開部分群であるとき，∇ は<u>既約</u>であるといわれる。

<u>注</u>. 既約な G-接続 ∇ に"十分近い" G-接続もまた既約であるから，{G-接続全体}のなかで既約な G-接続の全体は"開集合"をなす。

§2　反自己双対接続とその変形

以下，空間 M は 複素2次元むきづけ可能な複素多様体で，その局所座標を $z^1 = x^1 + \sqrt{-1}x^2$，$z^2 = x^3 + \sqrt{-1}x^4$ とする。
$h = h_{\mu\bar\nu}\, dz^\mu \cdot dz^{\bar\nu}$ を M の Hermite 計量とする。

実数が，互いに共役な複素数の和であらわされるように，複素多様体上の実 p-形式は互いに複素共役な複素 p-形式の和で表現されるし，またそのような表現を積極的に用いると議論の見通しがよくなる。

実 1-形式は dx^1, dx^2, dx^3, dx^4 の実係数一次結合で表わされ，また

$$\text{(2-1)}\quad \begin{cases} dx^1 = \frac{1}{2}\cdot(dz^1 + dz^{\bar1}), & dx^2 = -\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{-1}\,dz^1 - \sqrt{-1}\,dz^{\bar1}), \\ dx^3 = \frac{1}{2}\cdot(dz^2 + dz^{\bar2}), & dx^4 = -\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{-1}\,dz^2 - \sqrt{-1}\,dz^{\bar2}) \end{cases}$$

であるから，実 1-形式は $\xi_1 dz^1 + \xi_2 dz^2 + \bar\xi_1 dz^{\bar1} + \bar\xi_2 dz^{\bar2}$,

$(\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C})$ とかける。 複素微分形式が $dz^1, dz^2, dz^{\bar{1}}, dz^{\bar{2}}$ の外積の複素係数一次結合であらわされることに注意すると，複素 1-形式 $\omega = \xi_\mu dz^\mu + \xi_{\bar{\mu}} dz^{\bar{\mu}}$ $(\xi_\mu, \xi_{\bar{\mu}} \in \mathbb{C})$ が実 1-形式 $\Leftrightarrow$ $\overline{\omega} = \omega$ $(\overline{\xi_\mu} = \xi_{\bar{\mu}})$ である。(ここに $\overline{dz^\mu} = dz^{\bar{\mu}}$, $\overline{dz^{\bar{\mu}}} = dz^\mu$)。 同様にして複素 p-形式 θ が実である $\Leftrightarrow$ $\overline{\theta} = \theta$。 さて，複素 2-形式は，$dz^\mu \wedge dz^\nu$, $dz^\mu \wedge dz^{\bar{\nu}}$, $dz^{\bar{\mu}} \wedge dz^{\bar{\nu}}$ の複素係数の結合で表わされる。

$dz^\mu \wedge dz^\nu$ の一次結合の部分はタイプ(2, 0)の 2-形式とよばれる。同様に，$dz^\mu \wedge dz^{\bar{\nu}}$ の部分，$dz^{\bar{\mu}} \wedge dz^{\bar{\nu}}$ の部分はタイプ(1, 1)，タイプ(0, 2)の 2-形式といわれる。容易にタイプ(p, q)の$(p+q)$-形式も定義できる。

実 1-形式 $\omega = \xi_\mu dz^\mu + \overline{\xi_\mu} dz^{\bar{\mu}}$, $\sigma = \eta_\mu dz^\mu + \overline{\eta_\mu} dz^{\bar{\mu}}$ の内積 $\langle \omega, \sigma \rangle$ を

$$\langle \omega, \sigma \rangle = h^{\mu\bar{\nu}} (\xi_\mu \overline{\eta_\nu} + \eta_\mu \overline{\xi_\nu})$$

で定義しよう ($(h^{\mu\bar{\nu}}) = (h_{\mu\bar{\nu}})$ の逆行列)。

空間 M の点 x において局所座標 z^1, z^2 を適当にえらぶと，$h^{\mu\bar{\nu}}(x) = \delta^{\mu\nu}$ とできる。 (2-1) より $\{dx^\alpha\}$ は $\langle dx^\alpha, dx^\beta \rangle = \frac{1}{2} \delta^{\alpha\beta}$ をみたす。

<反自己双対 2-形式>

2-形式に作用する $*$-作用素はこの基底を用いて

(2-2) $$*(dx^{\alpha_1} \wedge dx^{\alpha_2}) = \mathrm{sgn}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\, dx^{\alpha_3} \wedge dx^{\alpha_4}$$

と定義される（ここに $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} = \{1, 2, 3, 4\}$）。
基底を用いない定義と同値であることは明らか。2-形式上，$* \circ * =$ 恒等写像だから，

定義 2-1（(反)自己双対）

2-形式 ω が $*\omega = \omega \ (-\omega)$ をみたすとき 自己双対（または 反自己双対）といわれる。

点 x での反自己双対 2-形式の基底は

$$
(2\text{-}3) \quad \begin{cases} \omega_1 = dx^1 \wedge dx^2 - dx^3 \wedge dx^4 \\ \omega_2 = dx^1 \wedge dx^3 + dx^2 \wedge dx^4 \\ \omega_3 = dx^1 \wedge dx^4 - dx^2 \wedge dx^3 \end{cases}
$$

である。(2-1) より

$$
(2\text{-}4) \quad \begin{cases} \omega_1 = -\dfrac{\sqrt{-1}}{2}\left(dz^1 \wedge dz^{\bar{1}} - dz^2 \wedge dz^{\bar{2}}\right) \\ \omega_2 = \dfrac{1}{2}\left(dz^1 \wedge dz^{\bar{2}} - dz^2 \wedge dz^{\bar{1}}\right) \\ \omega_3 = -\dfrac{\sqrt{-1}}{2}\left(dz^1 \wedge dz^{\bar{2}} + dz^2 \wedge dz^{\bar{1}}\right)。 \end{cases}
$$

これらはしたがってタイプ(1,1)の実 2-形式である。さらに，タイプ(1,1)の実 2-形式 $\sqrt{-1}\,(dz^1 \wedge dz^{\bar{1}} + dz^2 \wedge dz^{\bar{2}})$ に対して直交していることがわかる。ここでタイプ(1,1)の 2-形式 $\omega = \omega_{\mu\bar{\nu}}\, dz^\mu \wedge dz^{\bar{\nu}}$，$\theta = \theta_{\mu\bar{\nu}}\, dz^\mu \wedge dz^{\bar{\nu}}$ の内積 $\langle \omega, \theta \rangle$

は $\langle \omega, \theta \rangle = \omega_{\mu\bar{\nu}} \overline{\theta_{\alpha\bar{\beta}}} h^{\mu\bar{\alpha}} h^{\beta\bar{\nu}}$ (x では $= \omega_{\mu\bar{\nu}} \overline{\theta_{\mu\bar{\nu}}}$)。

実は, $\sqrt{-1}(dz^1 \wedge dz^{\bar{1}} + dz^2 \wedge dz^{\bar{2}})$ は Hermite 計量 h に同伴した基本形式といわれる 2-形式 $\Omega = \sqrt{-1}\, h_{\mu\bar{\nu}} dz^{\mu} \wedge dz^{\bar{\nu}}$ そのものである。 したがって

命題 2-2 (Atiyah-Hitchin-Singer [2])

ω ; 反自己双対 2-形式

$\Leftrightarrow$ ω ; タイプ (1,1) の実 2-形式, $\langle \omega, \Omega \rangle = 0$。

注. タイプ (1,1) の実 2-形式 $\omega = \omega_{\mu\bar{\nu}} dz^{\mu} \wedge dz^{\bar{\nu}}$ に対して, $\langle \omega, \Omega \rangle = -\sqrt{-1}\, h^{\mu\bar{\nu}} \omega_{\mu\bar{\nu}} = -\sqrt{-1}(\omega_{1\bar{1}} + \omega_{2\bar{2}})$
$= -\sqrt{-1}\, \mathrm{Trace}(\omega)$。

<反自己双対接続>

定義 2-3 (反自己双対接続) E 上の G-接続 ∇ が反自己双対とは, 曲率形式 R^{∇} が 2-形式とみて, 反自己双対のときをいう。

注. 定義は, (1-7) より局所自明近傍 U のとりかたによらない。

命題 2-2 を用いると, G-接続 ∇ が反自己双対である同値条件が導かれる;

$$(2\text{-}5)\quad \begin{cases} R^{\nabla}\ \text{はタイプ}\ (1.1)\ \text{の}\ 2\text{-形式} \\ \langle R^{\nabla}, \Omega \rangle = -\sqrt{-1}\, h^{\mu\bar{\nu}} R^{\nabla}_{\mu\bar{\nu}}{}^{i}_{j} = 0 \end{cases}$$

さて，Lie環 $\mathfrak{g}$ に値をもつ実 p-形式を複素表示する場合には，少し注意を要する。∇ の接続形式 $A^{\nabla} = A^{\nabla}_{\alpha}{}^{i}_{j}\, dx^{\alpha}$ について考えよう。(2-1) から

$$\begin{aligned} A^{\nabla} &= A^{\nabla}_{\alpha}{}^{i}_{j}\, dx^{\alpha} \\ &= \frac{1}{2}(A^{\nabla}_{1}{}^{i}_{j} + \sqrt{-1}\, A^{\nabla}_{2}{}^{i}_{j})dz^{1} + \frac{1}{2}(A^{\nabla}_{1}{}^{i}_{j} - \sqrt{-1}\, A^{\nabla}_{2}{}^{i}_{j})\, dz^{\bar{1}} \\ &\quad + \frac{1}{2}(A^{\nabla}_{3}{}^{i}_{j} + \sqrt{-1}\, A^{\nabla}_{4}{}^{i}_{j})dz^{2} + \frac{1}{2}(A^{\nabla}_{3}{}^{i}_{j} - \sqrt{-1}\, A^{\nabla}_{4}{}^{i}_{j})dz^{\bar{2}} \end{aligned}$$

ここに $(A^{\nabla}_{\alpha}{}^{i}_{j}) \in \mathfrak{g}$。さて $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})$ の任意の元は $B + \sqrt{-1}\, C$，$B, C \in \mathfrak{su}(n)$ と表わされる。$\mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})$ での共役 $\overline{}$ を $\overline{B+\sqrt{-1}\, C} = B - \sqrt{-1}\, C$ とすると，$X \in \mathfrak{sl}(n;\mathbb{C})$ が $\mathfrak{su}(n)$ に入る $\Longleftrightarrow$ $\overline{X} = X$ である。この共役を <u>$\mathfrak{su}(n)$-共役</u>とよぼう。すると

$$(2\text{-}6)\qquad A^{\nabla} = A^{\nabla\prime}_{1}{}^{i}_{j}\, dz^{1} + A^{\nabla\prime}_{2}{}^{i}_{j}\, dz^{2} + \overline{A^{\nabla\prime}_{1}{}^{i}_{j}}\, dz^{\bar{1}} + \overline{A^{\nabla\prime}_{2}{}^{i}_{j}}\, dz^{\bar{2}}$$

と表わされる。ここに $A^{\nabla\prime}_{1}{}^{i}_{j} = \frac{1}{2}(A^{\nabla}_{1}{}^{i}_{j} + \sqrt{-1}\, A^{\nabla}_{2}{}^{i}_{j})$，$A^{\nabla\prime}_{2}{}^{i}_{j} = \frac{1}{2}(A^{\nabla}_{3}{}^{i}_{j} + \sqrt{-1}\, A^{\nabla}_{4}{}^{i}_{j})$。のちの議論のため

$$\overset{\nabla}{A}{}^{+} = A^{\nabla\prime}_{\mu}{}^{i}_{j}\, dz^{\mu}, \qquad \overset{\nabla}{A}{}^{-} = \overline{A^{\nabla\prime}_{\mu}{}^{i}_{j}}\, dz^{\bar{\mu}} = \overline{A^{+}}$$

とおく。

注. $su(n)$ と $sl(n;\mathbb{C})$ の関係は, $\mathfrak{g}=su(n)$ の複素化が, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}=sl(n;\mathbb{C})$ であり, $sl(n;\mathbb{C})$ の実形式を $su(n)$ は与えている。

$A^k_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_P)=\{\Phi+\sqrt{-1}\Psi\,;\ \Phi,\Psi\in A^k(\mathfrak{g}_P)\}$ とする。

k-形式は タイプ (p,q) の $p+q(=k)$-形式の和であらわされる。 $A^{p,q}(\mathfrak{g}_P)=\{\Phi\in A^k_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_P)\,;\ \Phi$ はタイプ $(p,q)\}$ とおく。

共変外微分 $d^\nabla\,;\ A^k_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_P)\longrightarrow A^{k+1}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_P)$ は $d^\nabla=\partial^\nabla+\bar\partial^\nabla$ と分解される;

$$(2\text{-}7)\quad\begin{cases}\partial^\nabla\Phi^i_j=\partial\Phi^i_j+(-1)^{p+q}[\Phi\wedge A^+]^i_j\\[2mm] \bar\partial^\nabla\Phi^i_j=\bar\partial\Phi^i_j+(-1)^{p+q}[\Phi\wedge A^-]^i_j\,,\quad \Phi\in A^{p,q}(\mathfrak{g}_P)。\end{cases}$$

すると,

$$\partial^\nabla\,;\ A^{p,q}(\mathfrak{g}_P)\longrightarrow A^{p+1,q}(\mathfrak{g}_P)$$

$$\bar\partial^\nabla\,;\ A^{p,q}(\mathfrak{g}_P)\longrightarrow A^{p,q+1}(\mathfrak{g}_P)$$

である。 ここに $\partial,\bar\partial$ は C^∞ 関数 $f(z^1,z^2)$ に対して

$$\partial f=\frac{\partial f}{\partial z^\mu}dz^\mu,\qquad \bar\partial f=\frac{\partial f}{\partial z^{\bar\mu}}dz^{\bar\mu}$$

である。

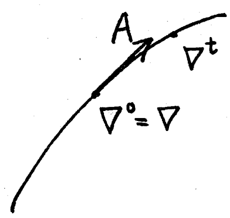
さて G-接続 ∇ が反自己双対とすると, R^∇ はタイプ $(1,1)$ の 2-形式なので (1-14) $d^\nabla(\nabla\Phi)=[\Phi\wedge R^\nabla]$ $(\Phi\in A^0_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}_P))$ を用いて,

$$(2\text{-}8)\quad \begin{cases} \partial^\nabla\circ\partial^\nabla\Phi = 0, & \bar\partial^\nabla\circ\bar\partial^\nabla\Phi = 0 \\ \partial^\nabla\circ\bar\partial^\nabla\Phi + \bar\partial^\nabla\circ\partial^\nabla\Phi = [\Phi\wedge R^\nabla]\text{。} \end{cases}$$

注.(1) (1-14) は $A^p(\mathfrak{g}_P)$ にまで拡張できるから，(2-8) は $A^{p,q}(\mathfrak{g}_P)$ 上で成立つ。

(2) $\partial^\nabla ;\ A^{p,q}(\mathfrak{g}_P) \longrightarrow A^{p+1,q}(\mathfrak{g}_P)$ および $\bar\partial^\nabla ;\ A^{p,q}(\mathfrak{g}_P) \longrightarrow A^{p,q+1}(\mathfrak{g}_P)$ は複体をなす。

<反自己双対接続の無限小変形>



反自己双対 G-接続 ∇ をひとつ固定する。∇^t を $\nabla^0=\nabla$ なる反自己双対 G-接続の族 ($|t|<\varepsilon$) とする。パラメータ t に C^∞ に依存した ∇^t の接続形式 $A_U^{\nabla^t} =: A_U(t)$ に対して，(1-4) から $A_V(t) = dg\cdot g^{-1} + g\cdot A_U(t)\cdot g^{-1}$ なので，$A_U := \frac{d}{dt}A_U(t)\big|_{t=0}$ とおくと，

$$(2\text{-}9)\quad A_V = g\cdot A_U\cdot g^{-1} \quad (U\cap V \text{上で})\text{。}$$

よって，無限小変形 $A = \{A_U\}_U$ は $\mathfrak{g}_P$ に値をもつ1-形式を定める。$A_U(t) = A_U(0) + tA_U + o(t) = A^\nabla + tA + o(t)$ により，∇^t の曲率形式 R^{∇^t} は $R^{\nabla^t} = dA(t) - A(t)\wedge A(t) = R^\nabla + t\{dA - (A(0)\wedge A + A\wedge A(0))\} + o(t)$，(1-12)，(1-13) から，

$$(2\text{-}10)\quad R^{\nabla^t} = R^\nabla + t\,d^\nabla A + o(t)\text{。}$$

無限小変形 A は実形式だから $A = A^+ + \overline{A^+}$ ($A^+ = A_\mu{}^i_j dz^\mu$) とおくと $d^\nabla A = (\partial^\nabla + \bar\partial^\nabla)(A^+ + \overline{A^+}) = \underset{(2,0)}{\partial^\nabla A^+} + \underset{(1,1)}{(\partial^\nabla \overline{A^+} + \bar\partial^\nabla A^+)} + \underset{(0,2)}{\bar\partial^\nabla \overline{A^+}}$ となる。 (2-5) より

$$(2\text{-}11) \quad \begin{cases} \partial^\nabla A^+ = 0, \quad \bar\partial^\nabla \overline{A^+} = 0 \\ \langle \partial^\nabla \overline{A^+} + \bar\partial^\nabla A^+, \Omega \rangle = 0 \text{。} \end{cases}$$

$A^2_+(\mathfrak{g}_P) = \{ \Phi + \overline{\Phi} + \Omega\cdot\phi,\ \Phi \in A^{2,0}(\mathfrak{g}_P),\ \phi \in A^0(\mathfrak{g}_P) \}$ とする。 反自己双対 G-接続 ∇ に同伴した作用素 $\delta^\nabla ;\ A^1(\mathfrak{g}_P) \longrightarrow A^2_+(\mathfrak{g}_P)$ を

$$(2\text{-}12) \quad \delta^\nabla(A^+ + \overline{A^+}) = \partial^\nabla A^+ + \Omega \langle \bar\partial^\nabla A^+ + \partial^\nabla \overline{A^+}, \Omega \rangle + \bar\partial^\nabla \overline{A^+} \qquad (A^+ + \overline{A^+} \in A^1(\mathfrak{g}_P))$$

で定義すると,

<u>命題</u> 2-4　　$A \in A^1(\mathfrak{g}_P)$ が反自己双対 G-接続 ∇ の無限小変形 $\iff$ $A \in \mathrm{Ker}\,\delta^\nabla$ ($\delta^\nabla(A) = 0$)。

＜ゲージ変換＞

ゲージ変換でうつりうる接続は物理的に同一物と考えられるから, ゲージ変換で同一視した接続全体の中で反自己双対接続の族を考察する必要が生じ, 無限小変形のなす空間は $\mathrm{Ker}(\delta^\nabla)$ の商空間で与えられ, その結果, ある楕円型複体 の

コホモロジーが物理的意味をもつ変形の自由度を表わすことになる。

定義 2-5（ゲージ変換）　U 上 G 値 C^∞ 関数 f_U の系 $f = \{f_U\}_U$ で

(2-13)　$f_U(x) = g_{UV}(x) \cdot f_V(x) \cdot g_{UV}^{-1}(x), \quad x \in U \cap V$

をみたすものを ゲージ変換 という。

ゲージ変換全体は群の構造をもつ。それを $\mathcal{G}_P$ で表わす。ゲージ変換 f は G-接続 ∇ に対して

(2-14)　$f(\nabla) = f^{-1} \circ \nabla \circ f$

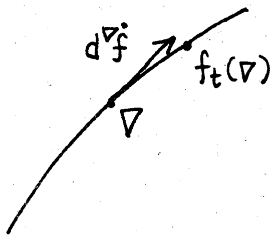
で作用する。U 上の局所フレーム $\{e_i\}$ に対して $f_U(e_i) = f_i^j e_j$　（$f_U = (f_i^j)$）であるから，$f(\nabla)$ の接続形式，曲率形式は U 上それぞれ，

(2-15)
$$\begin{cases} A^{f\nabla}{}_j^i = df_j^k f^{-1}{}_k^i + f_j^k \cdot A^{\nabla}{}_k^l \cdot f^{-1}{}_l^i \\ \left(\quad A^{f\nabla} = df \cdot f^{-1} + f \cdot A^{\nabla} \cdot f^{-1} \right) \\ R^{f\nabla} = f \cdot R^{\nabla} \cdot f^{-1} \end{cases}$$

このように，f は空間座標には働かないので，反自己双対性はゲージ変換で保たれる。

さて，$f_t \in \mathcal{G}_P$（f_0 = 単位元）をゲージ変換の族とする（$|t| < \varepsilon$）。すると，$\dot{f} = \frac{d}{dt} f_t \big|_{t=0}$ は Adjoint 束 $\mathfrak{G}_P$ の切断を与える。なんとなれば，$f_t = \{f_U(t)\}_U$，$f_U(t): U \longrightarrow G$，$f_U(0)$ = 単位元。

$f_U(t)\cdot{}^t\overline{f_U(t)} = \mathrm{Id}$ より $\dot f_U + {}^t\overline{\dot f_U} = 0$ すなわち $\dot f_U$ は $\mathfrak{g}$ に値をとる U 上の関数で，$U\cap V$ 上 $\dot f_U = g_{UV}\cdot \dot f_V\cdot g_{UV}^{-1}$ なので，$\dot f = \{\dot f_U\}_U$ は $\mathfrak{g}_P$ の切断を定める。



1-パラメータ族 $f_t(\nabla) = f_t^{-1}\circ\nabla\circ f_t$ の接続形式は (2-15) より

$$A^{f_t\nabla} = df_t\cdot f_t^{-1} + f_t\cdot A^\nabla\cdot f_t^{-1},$$

また $f_t = 1 + t\dot f + o(t)$, $f_t^{-1} = 1 - t\dot f + o(t)$ なので，

$$\begin{aligned} A^{f_t\nabla} &= t\,d\dot f\,(1 - t\dot f) + (1 + t\dot f)\,A^\nabla\,(1 - t\dot f) + o(t) \\ &= A^\nabla + t\,(d\dot f + \dot f A^\nabla - A^\nabla \dot f) + o(t) \\ &= A^\nabla + t\,d^\nabla \dot f + o(t), \end{aligned}$$

よって $f_t(\nabla)$ の無限小変形は $d^\nabla\dot f$ である。$f_t(\nabla)$ が反自己双対なので，命題 2-4 から $d^\nabla\dot f \in \mathrm{Ker}\,\delta^\nabla$，すなわち $\delta^\nabla\circ d^\nabla\dot f = 0$。

＜楕円複体＞

このようにして，反自己双対 G-接続 ∇ の無限小変形空間は次の複体

(2-16)
$$0 \longrightarrow A^0(\mathfrak{g}_P) \xrightarrow{d^0 = d^\nabla} A^1(\mathfrak{g}_P) \xrightarrow{d^1 = \delta^\nabla} A^2_+(\mathfrak{g}_P) \longrightarrow 0$$

の 1-コホモロジー $H^1 = \mathrm{Ker}\,\delta^\nabla / \mathrm{Im}\,d^\nabla$ に一致する。

<u>命題</u> 2-5 (<u>楕円複体</u>)　複体 (2-16) は楕円型である。

証明 略. 楕円複体については Atiyah-Bott [1] 参照。

＜消滅定理＞

(2-16) が楕円型なので コホモロジー $H^i = \mathrm{Ker}\, d^i / \mathrm{Im}\, d^{i-1}$ $(i=0,1,2)$ は $\{\Phi \in A^i(\mathfrak{g}_P)\,;\, D^{(i)}\Phi = 0\}$ に同型である。ここに $D^{(i)}$ は d^i に同伴した Laplace 作用素; $D^{(i)} = (d^i)^* \circ d^i + d^{i-1} \circ (d^{i-1})^*$。 $(d^i)^*$ は d^i の随伴作用素。

Atiyah-Singer の指数定理を用いると, 指数 $h^0 - h^1 + h^2$ ($h^i = \dim H^i$) は 空間 M と Adjoint 束 $\mathfrak{g}_P$ の特性類を用いて表現される。

<u>定理</u> 2-6 (<u>消滅定理</u>)

M をコンパクト複素2次元 Kähler 多様体, h を Kähler 計量とし, その スカラー曲率 ρ はいたるところ正とする。
このとき, 反自己双対 G-接続 ∇ が既約ならば,
$h^0 = h^2 = 0$。

<u>注</u>. Hermite 計量 h が Kähler 計量とは基本形式 Ω が d-閉形式 ($d\Omega = 0$) のときをいう。 $\dfrac{\partial h_{\mu\bar{\nu}}}{\partial z^{\sigma}} = \dfrac{\partial h_{\sigma\bar{\nu}}}{\partial z^{\mu}}$, μ, ν, σ が同値な条件式である。 また h に同伴した Levi-Civita 接続の接続係数 Γ^{C}_{AB} $(A, B, C = 1, \cdots, 4, \bar{1}, \cdots, \bar{4})$ が $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$, $\Gamma^{\bar{\sigma}}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ 以外すべて零 $(\mu, \nu, \sigma = 1, \cdots, 4)$ で $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu}$ をみたす条件といいかえてもよい (Kobayashi & Nomizu

[8] 参照）。

定理の証明． $D^{(0)}\phi=0,\ \ \phi\in A^0(\mathfrak{g}_E)\Rightarrow\phi=0$,

$D^{(2)}\Phi=0,\ \ \Phi\in A^2_+(\mathfrak{g}_E)\Rightarrow\Phi=0$ を示せば十分である。

そのまえに，随伴作用素 $(d^i)^*$ の定義に必要な $A^i(\mathfrak{g}_E)$ の内積を定めよう；

$A^0(\mathfrak{g}_E)$ の内積 $\langle\phi,\psi\rangle_M=\int_M\langle\phi,\psi\rangle\det(h_{\mu\bar\nu})dz^1\wedge dz^2\wedge d\bar z^1\wedge d\bar z^2$,

$\langle\phi,\psi\rangle=-\mathrm{Tr}(\phi\psi)=-\phi^i_j\psi^j_i$, $\phi,\psi\in A^0(\mathfrak{g}_E)$,

$A^1(\mathfrak{g}_E)$ の内積 $\langle\Phi,\Psi\rangle_M=\int_M\langle\Phi,\Psi\rangle\det(h_{\mu\bar\nu})dz^1\wedge\cdots$,

$\langle\Phi,\Psi\rangle=-h^{\mu\bar\nu}(\Phi_{\mu}{}^i_j\overline{\Psi_\nu{}^j_i}+\Psi_\mu{}^i_j\overline{\Phi_\nu{}^j_i})$,

$\Phi=\Phi_\mu{}^i_j dz^\mu+\overline{\Phi_\mu{}^i_j}d\bar z^\mu$, $\Psi=\Psi_\mu{}^i_j dz^\mu+\overline{\Psi_\mu{}^i_j}d\bar z^\mu$,

$A^2_+(\mathfrak{g}_E)$ の内積 $\langle\Phi,\Psi\rangle_M=\int_M\langle\Phi,\Psi\rangle\det(h_{\mu\bar\nu})dz^1\wedge\cdots$,

$\langle\Phi,\Psi\rangle=-\frac{1}{2}h^{\mu\bar\sigma}h^{\nu\bar\tau}(\Phi_{\mu\nu}{}^i_j\overline{\Psi_{\sigma\tau}{}^j_i}+\Psi_{\mu\nu}{}^i_j\overline{\Phi_{\sigma\tau}{}^j_i})$

$+2\langle\phi,\psi\rangle$ ここに $\Phi=\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu}(\Phi_{\mu\nu}{}^i_j dz^\mu\wedge dz^\nu$

$+\overline{\Phi_{\mu\nu}{}^i_j}d\bar z^\mu\wedge d\bar z^\nu)+\phi\Omega$ ，$(\phi\in A^0(\mathfrak{g}_E)$ ，$\Phi_{\mu\nu}=-\Phi_{\nu\mu})$

$\Psi=\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu}(\Psi_{\mu\nu}{}^i_j dz^\mu\wedge dz^\nu+\overline{\Psi_{\mu\nu}{}^i_j}d\bar z^\mu\wedge d\bar z^\nu)+\psi\Omega$,

注． $\frac{1}{2}\Omega\wedge\Omega=\det(h_{\mu\bar\nu})dz^1\wedge dz^2\wedge d\bar z^1\wedge d\bar z^2$ が体積要素を与える。

随伴作用素 $(d^i)^*$ は $\langle(d^i)^*\Phi,\Psi\rangle_M=\langle\Phi,d^i\Psi\rangle_M$

で定義される。

＜$\mathfrak{h}^0=0$＞

$D^{(0)}\Phi=0$, $\Phi\in A^0(\mathfrak{g}_E)$ とする。 $\langle D^{(0)}\Phi, \Phi\rangle_M = \langle (d^\nabla)^* \circ d^\nabla\Phi, \Phi\rangle_M = \langle d^\nabla\Phi, d^\nabla\Phi\rangle_M = 0$ より $d^\nabla\Phi = \nabla\Phi = 0$ である。

点 $x\in M$ を始点，終点とする閉曲線を $c(t)$, $0\le t\le 1$ とする。

c にそう E の平行な切断を $\phi(t)$ とする（$\frac{\nabla}{dt}\phi=0$）。すると

$\frac{\nabla}{dt}\Phi(\phi) = (\frac{\nabla}{dt}\Phi)(\phi) + \Phi(\frac{\nabla}{dt}\phi) = 0$, すなわち $\Phi(\phi)$ も平行。

c によって定まるホロノミー群 Ⓗ(x) の元 g_c に対して，

(2-17) $\Phi\circ g_c(\phi) = g_c\circ\Phi(\phi)$, ϕ ; x 上のファイバーの元，

すなわち， $\Phi = g_c\circ\Phi\cdot g_c^{-1}$ ($\forall g_c\in$ Ⓗ(x)), ∇ は既約だから，

$\Phi = g\circ\Phi\circ g^{-1}$ ($\forall g\in G$) さらに G は半単純なので，点 x で

$\Phi=0$, よって $\Phi\equiv 0$ ($\mathfrak{h}^0=0$)。

＜$\mathfrak{h}^2=0$＞

次のふたつの補題を用いて，$\mathfrak{h}^2=0$ が示される。

<u>補題</u> 2-7 $\Omega\cdot\phi = \phi^i_j\cdot\sqrt{-1}\,h_{\mu\bar\nu}\,dz^\mu\wedge d\bar z^\nu$ ($\phi\in A^0(\mathfrak{g}_E)$) に対して

(2-18) $d^1\circ(d^1)^*(\Omega\cdot\phi) = -4\,\Omega\cdot\{h^{\mu\bar\nu}(\partial^\nabla\bar\partial^\nabla\phi^i_j)_{\mu\bar\nu}\}$

<u>注</u>. $d^1\circ(d^1)^*(\Omega\cdot\phi)$ はタイプ $(1,1)$ の 2-形式である。

補題 2-8　$\Phi = \frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu}\Phi_{\mu\nu}{}^{i}_{j}\, dz^{\mu}\wedge dz^{\nu} \in A^{2,0}(\mathfrak{g}_P)$　$(\Phi_{\mu\nu} = -\Phi_{\nu\mu})$ に対して

$$(2\text{-}19)\quad (\{\partial^{\nabla}\circ(\partial^{\nabla})^{*} + (\partial^{\nabla})^{*}\circ\partial^{\nabla}\}\,\Phi)_{\beta\gamma}$$
$$= -\frac{1}{2}h^{\alpha\bar{\mu}}\,\tilde{\nabla}_{\bar{\mu}}\tilde{\nabla}_{\alpha}\Phi_{\beta\gamma} - \frac{1}{2}h^{\alpha\bar{\mu}}(R_{\bar{\mu}\beta}\Phi_{\alpha\gamma} - R_{\bar{\mu}\gamma}\Phi_{\alpha\beta})$$

ここに，$\tilde{\nabla}_{\alpha}(\cdot) = D_{\alpha}(\cdot) + [(\cdot), A^{\nabla+}_{\alpha}]$，$\tilde{\nabla}_{\bar{\alpha}}(\cdot) = D_{\bar{\alpha}}(\cdot) + [(\cdot), \overline{A^{\nabla+}_{\alpha}}]$　（ D は Levi-Civita 接続 ），$R_{\bar{\alpha}\beta}$ は Kähler 計量の Ricci テンソル。

証明は §4 参照。

$h^{2}=0$ の証明．　$\Psi = \Psi^{2,0} + \overline{\Psi^{2,0}} + \Omega\cdot\phi \in A^{2}_{+}(\mathfrak{g}_P)$ が $D^{(2)}\Psi = (d')\circ(d')^{*}\Psi = 0$ をみたすと仮定する。　すると，

$0 = \langle D^{(2)}\Psi,\ \Psi^{2,0} + \overline{\Psi^{2,0}}\rangle = \langle (d')\circ(d')^{*}(\Psi^{2,0} + \overline{\Psi^{2,0}} + \Omega\cdot\phi),\ \Psi^{2,0} + \overline{\Psi^{2,0}}\rangle = \langle (d')\circ(d')^{*}(\Psi^{2,0} + \overline{\Psi^{2,0}}),\ \Psi^{2,0} + \overline{\Psi^{2,0}}\rangle = \langle \partial^{\nabla}\circ\partial^{\nabla *}\Psi^{2,0},\ \Psi^{2,0}\rangle + \langle \bar{\partial}^{\nabla}\circ\bar{\partial}^{\nabla *}\overline{\Psi^{2,0}},\ \overline{\Psi^{2,0}}\rangle$

ここで，補題 2-7 から $(d')\circ(d')^{*}(\Omega\cdot\phi)$ がタイプ (1,1) であること，および　公式 (2-12) を用いて　$d'^{*}\Phi$ の (1,0)-部分 $= \partial^{\nabla *}\Phi$　$(\Phi \in A^{2,0}(\mathfrak{g}_P))$ であることを適用する。

M が複素 2 次元なので，$\partial^{\nabla}\Psi^{2,0} \in A^{3,0}(\mathfrak{g}_P) = \{0\}$，したがって

$$0 = \langle (\partial^\nabla \circ \partial^{\nabla *} + \partial^{\nabla *} \circ \partial^\nabla)\Psi^{2,0}, \Psi^{2,0} \rangle$$

$$+ \langle (\bar\partial^\nabla \circ \bar\partial^{\nabla *} + \bar\partial^{\nabla *} \circ \bar\partial^\nabla)\overline{\Psi}^{2,0}, \overline{\Psi}^{2,0} \rangle$$

$$= -\frac{1}{2} h^{\mu\bar\sigma} h^{\nu\bar\tau} \left((\partial^\nabla \circ \partial^{\nabla *} + \partial^{\nabla *} \circ \partial^\nabla)\Psi^{2,0}\right)_{\mu\nu}{}^i{}_j \overline{\Psi}_{\sigma\tau}{}^j{}_i$$

$$-\frac{1}{2} h^{\sigma\bar\mu} h^{\tau\bar\nu} \left((\bar\partial^\nabla \circ \bar\partial^{\nabla *} + \bar\partial^{\nabla *} \circ \bar\partial^\nabla)\overline{\Psi}^{2,0}\right)_{\bar\mu\bar\nu}{}^i{}_j \Psi_{\sigma\tau}{}^j{}_i$$

$(\bar\partial^\nabla \circ \bar\partial^{\nabla *} + \bar\partial^{\nabla *} \circ \bar\partial^\nabla)\overline{\Psi}^{2,0} = \overline{(\partial^\nabla \circ \partial^{\nabla *} + \partial^{\nabla *} \circ \partial^\nabla)\Psi^{2,0}}$ であるから，

補題 2-8 を用いて

$$0 = \frac{1}{2} h^{\mu\bar\sigma} h^{\nu\bar\tau} h^{\alpha\bar\beta} \left(\tilde\nabla_{\bar\beta} \tilde\nabla_\alpha \Psi^{2,0}_{\mu\nu} + R_{\bar\beta\mu} \Psi^{2,0}_{\alpha\nu} - R_{\bar\beta\nu} \Psi^{2,0}_{\alpha\mu} \right)^i{}_j \overline{\Psi}^{2,0}_{\sigma\tau}{}^j{}_i \tag{2-20}$$

の実数部

さて，$h^{\mu\bar\sigma}(x) = \delta^{\mu\sigma}$ とすると

$$\frac{1}{2} h^{\mu\bar\sigma} h^{\nu\bar\tau} h^{\alpha\bar\beta} \left(R_{\bar\beta\mu} \Psi^{2,0}_{\alpha\nu} - R_{\bar\beta\nu} \Psi^{2,0}_{\alpha\mu} \right)^i{}_j \overline{\Psi}^{2,0}_{\sigma\tau}{}^j{}_i$$

$$= \frac{1}{2} \left(R_{\bar\alpha\mu} \Psi^{2,0}_{\alpha\nu} - R_{\bar\alpha\nu} \Psi^{2,0}_{\alpha\mu} \right)^i{}_j \overline{\Psi}^{2,0}_{\mu\nu}{}^j{}_i$$

$$= (R_{\bar 1 1} + R_{\bar 2 2}) \Psi^{2,0}_{12}{}^i{}_j \overline{\Psi}^{2,0}_{12}{}^j{}_i$$

$$= \rho \langle \Psi^{2,0}, \Psi^{2,0} \rangle$$

ここに　スカラー曲率　$\rho = -h^{\nu\bar\mu} R_{\bar\mu\nu}$。

(2-20) を　M 上積分すると

$$0 = \left\{ \int_M \frac{1}{2} h^{\mu\bar\sigma} h^{\nu\bar\tau} h^{\alpha\bar\beta} \tilde\nabla_{\bar\beta} \tilde\nabla_\alpha \Psi^{2,0}_{\mu\nu}{}^i{}_j \overline{\Psi}^{2,0}_{\sigma\tau}{}^j{}_i \det(h_{\alpha\bar\beta})\, dz^1 \wedge \cdots \right.$$

$$\left. + \int_M \rho \langle \Psi^{2,0}, \Psi^{2,0} \rangle \det(h_{\alpha\bar\beta})\, dz^1 \wedge \cdots \right\} \text{の実数部。}$$

$D_a h^{\mu\bar\nu} = 0$ 等を用いると，Stokes の定理により，第一項は

$$\int_M \frac{1}{2} h^{\mu\bar{\sigma}} h^{\nu\bar{\tau}} h^{\alpha\bar{\beta}} \tilde{\nabla}_{\bar{\beta}} \tilde{\nabla}_{\alpha} \Psi^{2,0}{}_{\mu\nu}{}^{i}{}_{j} \overline{\Psi^{2,0}{}_{\sigma\tau}{}^{j}{}_{i}} \det(h_{\alpha\bar{\beta}})\, dz^1\wedge\cdots$$

$$= \int_M -\frac{1}{2} h^{\mu\bar{\sigma}} h^{\nu\bar{\tau}} h^{\alpha\bar{\beta}} \tilde{\nabla}_{\alpha} \Psi^{2,0}{}_{\mu\nu}{}^{i}{}_{j} \overline{\tilde{\nabla}_{\beta} \Psi^{2,0}{}_{\sigma\tau}{}^{j}{}_{i}} \det(h_{\alpha\bar{\beta}})\, dz^1\wedge\cdots \geqq 0。$$

よって

$$(2\text{-}21) \qquad 0 = \int_M \rho \langle \Psi^{2,0}, \Psi^{2,0} \rangle + \int_M -\frac{1}{2} h^{\mu\bar{\sigma}} h^{\nu\bar{\tau}} h^{\alpha\bar{\beta}} \tilde{\nabla}_{\alpha} \Psi^{2,0}{}_{\mu\nu}{}^{i}{}_{j} \overline{\tilde{\nabla}_{\beta} \Psi^{2,0}{}_{\sigma\tau}{}^{j}{}_{i}}$$

ρ はいたるところ正だから，$\Psi^{2,0} = 0$。したがって $\Psi = \Omega\cdot\phi$。
補題 2-7 から，

$0 = \langle d'\circ d'^{*}(\Omega\cdot\phi), \Omega\cdot\phi \rangle = -4 \langle \Omega\cdot h^{\mu\bar{\nu}}(\partial^{\nabla}\bar{\partial}^{\nabla}\phi)_{\mu\bar{\nu}}, \Omega\cdot\phi \rangle = (-4)(-2)\, h^{\mu\bar{\nu}}(\partial^{\nabla}\bar{\partial}^{\nabla}\phi)_{\mu\bar{\nu}}{}^{i}{}_{j}\, \phi^{j}{}_{i}$， $(\partial^{\nabla}\bar{\partial}^{\nabla}\phi)_{\mu\bar{\nu}} = \tilde{\nabla}_{\mu}\tilde{\nabla}_{\bar{\nu}}\phi$ なので，ふたたび積分して，Stokesの定理から，

$$0 = 8\int_M h^{\mu\bar{\nu}} \tilde{\nabla}_{\mu}\tilde{\nabla}_{\bar{\nu}}\phi^{i}{}_{j}\, \phi^{j}{}_{i} \det(h_{\cdot\cdot})\, dz^1\wedge\cdots$$

$$= -8\int_M h^{\mu\bar{\nu}} \tilde{\nabla}_{\bar{\nu}}\phi^{i}{}_{j}\, \tilde{\nabla}_{\mu}\phi^{j}{}_{i} \det(h_{\cdot\cdot})\, dz^1\wedge\cdots \geqq 0$$

したがって，$\tilde{\nabla}_{\mu}\phi^{i}{}_{j} = 0$ だから，$\nabla\phi = (\partial_{\mu}\phi - [\phi, A^{\nabla+}_{\mu}])dz^{\mu} + (\partial_{\bar{\mu}} - [\phi, \overline{A^{\nabla+}_{\mu}}])dz^{\bar{\mu}} = \tilde{\nabla}_{\mu}\phi\, dz^{\mu} + \overline{\tilde{\nabla}_{\mu}\phi}\, dz^{\bar{\mu}} = 0$. すなわち ϕ は平行（$\nabla\phi = 0$）。 よって $\phi = 0$ （$h^2 = 0$）。

§3 楕円複体の指数

楕円複体（2-16）の主シンボル系列は次で与えられる；

(3-1)
$$0 \longrightarrow \pi^*(\Lambda^0 \otimes \mathfrak{g}_P) \xrightarrow{\sigma(d)\otimes 1d_{\mathfrak{g}_P}} \pi^*(\Lambda^1 \otimes \mathfrak{g}_P) \xrightarrow{\sigma(\delta)\otimes 1d_{\mathfrak{g}_P}} \pi^*(\Lambda^2_+ \otimes \mathfrak{g}_P) \longrightarrow 0$$

ここに，π は 接ベクトル束 TM から M への射影，$\pi^*(\cdot)$ は M 上の ベクトル束の TM への π によるひきもどし，$\sigma(d)$, $\sigma(\delta)$ は 次の TM に同伴した 楕円複体の主シンボルを表わす；

(3-2)
$$0 \longrightarrow \Gamma(\Lambda^0) \xrightarrow{d} \Gamma(\Lambda^1) \xrightarrow{\delta} \Gamma(\Lambda^2_+) \longrightarrow 0$$

ここに Λ^p は M 上の p-形式のつくるベクトル束，$\Lambda^2_+ = \{\omega + \overline{\omega} + a\Omega \,;\, \omega : \text{タイプ}(2,0),\ a \in \mathbb{R}\}$ であり $\Gamma(\cdot)$ = ベクトル束の切断全体の集合。 また d は外微分，δ は

(3-3)
$$\delta(\tau) = \partial\tau^+ + \langle \overline{\partial}\tau^+ + \partial\overline{\tau^+}, \Omega \rangle \Omega + \overline{\partial}\overline{\tau^+}$$
$$(\ \tau = \tau^+ + \overline{\tau^+} \in \Gamma(\Lambda^1)\,;\ \tau^+ : \text{タイプ}(1,0)\ )。$$

Atiyah & Singer [3] の命題 2.17を用いて，指数は

(3-4)
$$h^0 - h^1 + h^2 = \frac{ch(\mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}})\{ch(\Lambda^0_{\mathbb{C}}) - ch(\Lambda^1_{\mathbb{C}}) + ch(\Lambda^2_+)_{\mathbb{C}}\}}{e(TM)}.$$

$$\times \mathcal{T}(TM\otimes\mathbb{C})[M]$$

ここに，$e(TM)$ は M の Euler 類，$ch(\cdot)$ は Chern 指標，$\mathcal{T}$ は Todd 類を表わす。

複素ベクトル束 F の第 j 次 Chern 類を $c_j(F)\in H^{2j}(M;\mathbb{Z})$ で表わす。全 Chern 類 $\sum_{j=0} c_i(F)$ を形式的に因子分解して

$$\sum_j c_i(F) = \prod_{i=1}^{r}(1+\gamma_i) \qquad (\gamma_i\in H^2(M;\mathbb{Z}))$$

としたとき，Chern 指標 ch は，

$$ch(F) = \sum_{i=1}^{r} e^{\gamma_i} = r+\sum_i \gamma_i+\frac{1}{2}\sum_i \gamma_i^2 +\cdots$$

$$= r + c_1(F)+\frac{1}{2}(c_1^2-2c_2)(F)+\cdots$$

と定義される。Todd 類 $\mathcal{T}(F)$ は次で与えられる；

$$\mathcal{T}(F)=\frac{\prod\gamma_i}{\prod(1-e^{-\gamma_i})} 。$$

したがって $ch(\mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}}) = \dim G + c_1(\mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}})+\frac{1}{2}(c_1^2-2c_2)(\mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}})+\cdots$

$\mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}}$ は実ベクトル束 $\mathfrak{g}_P$ の複素化なので，$c_1=0$，よって

$$ch(\mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}}) = \dim G + \frac{1}{2}(-2c_2)(\mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}})+\cdots 。$$

正則接ベクトル束 $T^{1,0}M$ の $c_1(T^{1,0}M)$ を x_1+x_2 と分解すると，

$e(TM)=x_1\cdot x_2$，$ch(\Lambda^1_{\mathbb{C}}) = e^{x_1}+e^{x_2}+e^{-x_1}+e^{-x_2}$，

$ch(\Lambda^2_+)_{\mathbb{C}} = 1+e^{x_1+x_2}+e^{-(x_1+x_2)}$，$\mathcal{T}(TM\otimes\mathbb{C}) = \dfrac{x_1\cdot x_2}{(1-e^{-x_1})(1-e^{-x_2})}\cdot$

$\dfrac{(-x_1)\cdot(-x_2)}{(1-e^{x_1})(1-e^{x_2})}$ を用いて (3-4) の右辺を計算すると，

$$\{\dim G + \frac{1}{2}(-2c_2)(\mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}})\}\{2+\frac{1}{6}(c_1^2(M)+c_2(M)\}[M]$$

$$= (-2c_2)(\mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}})[M] + \frac{1}{6}\dim G\,(c_1^2 + c_2)(M)。$$

Euler 数 $\chi = c_2(M)$，符号数 $\tau = \frac{1}{3}\mathrm{Pont}_1(TM) = \frac{1}{3}(c_1^2 - 2c_2)$ $(T^{1,0}M)$ だから $\chi + \tau = \frac{1}{3}(c_1^2 + c_2)(M)$，よって 指数 $=$ $\mathrm{Pont}_1(\mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}}) + \frac{1}{2}\dim G\,(\chi + \tau)$。すなわち $h^1 = \dim \frac{\mathrm{Ker}(\delta^{\nabla})}{\mathrm{Im}\, d^{\nabla}}$ $= -\mathrm{Pont}_1(\mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}}) - \frac{1}{2}\dim G\,(\chi + \tau)$。

注. $\mathfrak{g} = su(2)$ の場合，$\mathrm{Pont}_1(\mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}}) = 4\,\mathrm{Pont}_1(E) - 2c_1^2(E)$。なんとなれば，$\mathfrak{g} = su(2)$ の複素化 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = sl(2:\mathbb{C})$ に対して，$E^* \otimes E = \mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}} \oplus \mathbb{1}$ であるから，$\mathrm{Pont}_1(\mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}}) = (c_1^2 - 2c_2)(\mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}})$ を求めるには，両辺の Chern 指標をとって，

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= ch(E^* \otimes E) = ch(E)\cdot ch(E^*) \\
&= (e^{\gamma_1} + e^{\gamma_2})(e^{-\gamma_1} + e^{-\gamma_2}) = 4 + (\gamma_1 + \gamma_2)^2 - 4\gamma_1\gamma_2 \\
&= 4 + c_1^2(E) - 4c_2(E),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= ch(\mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}}) + 1 \\
&= 3 + c_1(\mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}}) + \frac{1}{2}\mathrm{Pont}_1(\mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}})
\end{aligned}$$

よって $\mathrm{Pont}_1(\mathfrak{g}_P^{\mathbb{C}}) = 2(c_1^2 - 4c_2)(E) = 4\,\mathrm{Pont}_1(E) - 2c_1^2(E)$。

§4. 補題 2-7, 2-8 の証明

$d^1 = \delta^{\nabla}$ の随伴作用素 $(d^1)^*$ は $\Omega\cdot\phi = \phi_{\lrcorner}\sqrt{-1}\,h_{\mu\bar{\nu}}\,dz^{\mu}\wedge dz^{\bar{\nu}}$ に対し，

$$(4\text{-}1)\quad (d^1)^*(\Omega\cdot\phi) = 2\sqrt{-1}\,(\partial^\nabla\phi - \bar\partial^\nabla\phi)$$
$$= 2\sqrt{-1}\,(\nabla_\mu\phi^i_j\,dz^\mu - \nabla_{\bar\mu}\phi^i_j\,dz^{\bar\mu})$$
$$\left(\nabla_\mu(\cdot) = \frac{\partial}{\partial z^\mu}(\cdot) + [(\cdot), A^{\nabla+}_\mu]\right)。$$

実際に計算を行なうことによってこれは示される。

$\langle (d^1)^*(\Omega\cdot\phi), \Phi\rangle_M = \langle \Omega\cdot\phi, \delta^\nabla\Phi\rangle$, $\Phi = \Phi^+ + \overline{\Phi^+}$,

$\Phi^+ = \Phi_\mu{}^i_j\,dz^\mu$。

$\delta^\nabla\Phi$ のタイプ (1,1) 成分は

$$(4\text{-}2)\quad \Omega\cdot\langle \bar\partial^\nabla\Phi^+ + \partial^\nabla\overline{\Phi^+}, \Omega\rangle$$
$$= -\sqrt{-1}\,h^{\mu\bar\nu}\{(D_\mu\overline{\Phi}_{\bar\nu}{}^i_j - D_{\bar\nu}\Phi_\mu{}^i_j) + ([\overline{\Phi^+_\nu}, A^{\nabla+}_\mu]^i_j$$
$$- [\Phi^+_\mu, \overline{A^{\nabla+}_\nu}]^i_j)\}\cdot\sqrt{-1}\,h_{\alpha\bar\beta}\,dz^\alpha\wedge dz^{\bar\beta}。$$

したがって $\langle \Omega\cdot\phi, \delta^\nabla\Phi\rangle_M = \int_M \langle\Omega\cdot\phi, \delta^\nabla\Phi\rangle \det(h_{\cdot\cdot})\,dz^1\wedge\cdots$

$$= -2\sqrt{-1}\int_M \{\phi^i_j(D_{\bar\mu}\Phi_\nu{}^j_i - D_\nu\overline{\Phi}_{\mu}{}^j_i)\,h^{\nu\bar\mu}$$
$$+ \phi^i_j([\Phi^+_\nu, \overline{A^{\nabla+}_\mu}]^j_i - [\overline{\Phi^+_\mu}, A^{\nabla+}_\nu]^j_i)\,h^{\nu\bar\mu}\}\det(h_{\cdot\cdot})\,dz^1\wedge\cdots$$

ここで $\int_M D_{\bar\mu}(h^{\nu\bar\mu}\phi^i_j\,\Phi_\nu{}^j_i\det(h_{\cdot\cdot}))\,dz^1\wedge\cdots = 0$ (Stokesの定理)

から,

$$\int_M \phi^i_j\,D_{\bar\mu}\Phi_\nu{}^j_i\,h^{\nu\bar\mu}\det(h_{\cdot\cdot})\,dz^1\wedge\cdots = -\int_M h^{\nu\bar\mu}D_{\bar\mu}\phi^i_j\,\Phi_\nu{}^j_i\det(h_{\cdot\cdot})\,dz^1\wedge\cdots$$

また $\phi^i_j[\Phi^+_\nu, \overline{A^+_\mu}]^j_i = -[\phi, \overline{A^+_\mu}]^i_j\,\Phi^+_\nu{}^j_i$ なので

$$上式 = 2\sqrt{-1}\int_M \{h^{\nu\bar\mu}(D_{\bar\mu}\phi^i_j + [\phi, \overline{A^+_\mu}]^i_j)\,\Phi_\nu{}^j_i$$

$$- (D_\nu \phi^i_j + [\phi, A^+_\nu]^i_j) \overline{\Phi}_{\mu}{}^j_i \} \det(h_{..}) dz^1 \cdots$$

$$= 2 \int_M < \sqrt{-1} (\nabla_\mu \phi^i_j dz^\mu - \nabla_{\bar\mu} \phi^i_j dz^{\bar\mu}), \Phi > \det(h_{..}) \cdots$$

よって (4-1) がえられる。

さて (2-18) の証明を行なう。

$$\delta^\nabla \circ (\delta^\nabla)^* (\Omega \cdot \phi) = 2\sqrt{-1}\, \delta^\nabla (\partial^\nabla \phi - \bar\partial^\nabla \phi)$$

$$= 2\sqrt{-1} \, (\partial^\nabla \circ \partial^\nabla \phi + \Omega \cdot < \bar\partial^\nabla \circ \partial^\nabla \phi - \partial^\nabla \circ \bar\partial^\nabla \phi, \Omega >$$

$$- \bar\partial^\nabla \circ \bar\partial^\nabla \phi)$$

(2-8) を用いて $= 2\sqrt{-1}\, \Omega \cdot < [\phi, R^\nabla], \Omega > - 4\sqrt{-1}\, \Omega \cdot$

$$\cdot < \partial^\nabla \circ \bar\partial^\nabla \phi, \Omega >$$

(2-5) をさらに用いて $= -4\sqrt{-1}\, \Omega\, (-\sqrt{-1})\, h^{\mu\bar\nu} (\partial^\nabla \circ \bar\partial^\nabla \phi)_{\mu\bar\nu}$ 。

＜補題 2-8 の証明＞

タイプ (1,0), (2-0) の形式 $\Phi = \sum_{\mu,\nu} \Phi_\mu{}^i_j dz^\mu$, $\Psi = \frac{1}{2} \cdot$ $\sum_{\mu,\nu} \Psi_{\mu\nu}{}^i_j dz^\mu \wedge dz^\nu$ に対して $\partial^\nabla \Phi$, $\partial^\nabla \Psi$ は,

(4-3)
$$\partial^\nabla \Phi = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} \{ (D_\mu \Phi_\nu - D_\nu \Phi_\mu)^i_j - ([\Phi_\mu, A^+_\nu] - [\Phi_\nu, A^+_\mu]) \} dz^\mu \wedge dz^\nu$$

$$\partial^\nabla \Psi = \frac{1}{3!} \sum_{\mu,\nu,\sigma} (\partial^\nabla \Psi)_{\mu\nu\sigma}{}^i_j dz^\mu \wedge dz^\nu \wedge dz^\sigma,$$

ここに

(4-4) $(\partial^\nabla \Psi)_{\mu\nu\sigma} = D_\mu \Psi_{\nu\sigma}{}^i_j + [\Psi_{\nu\sigma}, A^+_\mu]^i_j$ のサイクル和。

注. $\Phi_\mu{}^i_j$ の Levi-Civita 接続 D に関する共変微分を
$D_\mu \Phi_\nu{}^i_j = \partial_\mu \Phi_\nu{}^i_j - \Gamma_{\mu\nu}^{\varepsilon} \Phi_\varepsilon{}^i_j$ であらわす。 h が Kähler 計量
だから, $\Gamma_{\mu\nu}^{\varepsilon} = \Gamma_{\nu\mu}^{\varepsilon}$ (対称), したがって $\sum_{\mu,\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\varepsilon} dz^\mu \wedge dz^\nu = 0$。
$(\partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu) dz^\mu \wedge dz^\nu = (D_\mu \Phi_\nu - D_\nu \Phi_\mu) dz^\mu \wedge dz^\nu$ と表現できる。

次に タイプ (2,0), (3,0) の形式 $\Phi = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} \Phi_{\mu\nu}{}^i_j dz^\mu \wedge dz^\nu$,
$\Psi = \frac{1}{3!} \sum \Psi_{\mu\nu\sigma}{}^i_j dz^\mu \wedge dz^\nu \wedge dz^\sigma$ への $(\partial^\nabla)^*$ 作用を調べよう。(4-1)
の導出の仕方と全く同様にして

$$(\partial^\nabla)^* \Phi = (\partial^{\nabla *} \Phi)_\mu{}^i_j dz^\mu,$$

(4-5)
$$\begin{cases} (\partial^{\nabla *} \Phi)_\mu = - h^{\nu\bar\tau} \left(D_{\bar\tau} \Phi_{\nu\mu}{}^i_j + [\Phi_{\nu\mu}, A^+_{\bar\tau}]^i_j \right) \\ \qquad\qquad = - h^{\nu\bar\tau} \tilde\nabla_{\bar\tau} \Phi_{\nu\mu}{}^i_j, \\ (\partial^\nabla)^* \Psi = \frac{1}{2} \sum (\partial^{\nabla *} \Psi)_{\mu\nu}{}^i_j dz^\mu \wedge dz^\nu, \\ (\partial^{\nabla *} \Psi)_{\mu\nu}{}^i_j = - h^{\alpha\bar\beta} \left(D_{\bar\beta} \Psi_{\alpha\mu\nu}{}^i_j + [\Psi_{\alpha\mu\nu}, A^+_{\bar\beta}]^i_j \right) \\ \qquad\qquad = - h^{\alpha\bar\beta} \tilde\nabla_{\bar\beta} \Psi_{\alpha\mu\nu}{}^i_j \end{cases}$$

よって
$$\partial^\nabla (\partial^{\nabla *} \Phi)_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \left\{ \tilde\nabla_\mu (h^{\alpha\bar\beta} \tilde\nabla_{\bar\beta} \Phi_{\alpha\nu})^i_j - \tilde\nabla_\nu (h^{\alpha\bar\beta} \tilde\nabla_{\bar\beta} \Phi_{\alpha\mu})^i_j \right\}$$
$$= -\frac{1}{2} h^{\alpha\bar\beta} \left(\tilde\nabla_\mu \tilde\nabla_{\bar\beta} \Phi_{\alpha\nu}{}^i_j - \tilde\nabla_\nu \tilde\nabla_{\bar\beta} \Phi_{\alpha\mu}{}^i_j \right),$$

また
$$\partial^{\nabla *} (\partial^\nabla \Phi)_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} h^{\alpha\bar\beta} \tilde\nabla_{\bar\beta} (\partial^\nabla \Phi)_{\alpha\mu\nu}$$
$$= -\frac{1}{2} h^{\alpha\bar\beta} \tilde\nabla_{\bar\beta} \left(\tilde\nabla_\alpha \Phi_{\mu\nu} + \tilde\nabla_\mu \Phi_{\nu\alpha} + \tilde\nabla_\nu \Phi_{\alpha\mu} \right)$$

よって

$$(\partial^{\nabla}\circ\partial^{\nabla *}+\partial^{\nabla *}_{\circ}\cdot\partial^{\nabla})\Phi_{\mu\nu}{}^{i}_{j}$$

$$= -\frac{1}{2}h^{\alpha\bar{\beta}}\tilde{\nabla}_{\bar{\beta}}\tilde{\nabla}_{\alpha}\Phi_{\mu\nu}{}^{i}_{j} - \frac{1}{2}h^{\alpha\bar{\beta}}\left([\tilde{\nabla}_{\mu},\tilde{\nabla}_{\bar{\beta}}]\Phi_{\alpha\nu}{}^{i}_{j} - [\tilde{\nabla}_{\nu},\tilde{\nabla}_{\bar{\beta}}]\Phi_{\alpha\mu}{}^{i}_{j}\right)$$

ここで Levi-Civita 接続 D の曲率 $R^{\varepsilon}{}_{\mu\bar{\beta}\alpha}$ と G-接続 ∇ の曲率形式 R^{∇} を用いると

$$= -\frac{1}{2}h^{\alpha\bar{\beta}}\tilde{\nabla}_{\bar{\beta}}\tilde{\nabla}_{\alpha}\Phi_{\mu\nu}{}^{i}_{j} - \frac{1}{2}h^{\alpha\bar{\beta}}\left(R^{\varepsilon}{}_{\mu\bar{\beta}\alpha}\Phi_{\varepsilon\nu}{}^{i}_{j} + R^{\varepsilon}{}_{\mu\bar{\beta}\nu}\Phi_{\alpha\varepsilon}{}^{i}_{j} + [\Phi_{\alpha\nu}, R^{\nabla}_{\mu\bar{\beta}}]^{i}_{j} - R^{\varepsilon}{}_{\nu\bar{\beta}\alpha}\Phi_{\varepsilon\mu}{}^{i}_{j} - R^{\varepsilon}{}_{\nu\bar{\beta}\mu}\Phi_{\alpha\varepsilon}{}^{i}_{j} - [\Phi_{\alpha\mu}, R^{\nabla}_{\nu\bar{\beta}}]^{i}_{j}\right)$$

第2項 $R^{\cdot}\ldots$ の部分を整理して

$$-\frac{1}{2}h^{\alpha\bar{\beta}}h^{\varepsilon\bar{\tau}}\left(R_{\bar{\tau}\mu\bar{\beta}\alpha}\Phi_{\varepsilon\nu}{}^{i}_{j} + \cancel{R_{\bar{\tau}\mu\bar{\beta}\nu}\Phi_{\alpha\varepsilon}{}^{i}_{j}} - R_{\bar{\tau}\nu\bar{\beta}\alpha}\Phi_{\varepsilon\mu}{}^{i}_{j} - \cancel{R_{\bar{\tau}\nu\bar{\beta}\mu}\Phi_{\alpha\varepsilon}{}^{i}_{j}}\right) = -\frac{1}{2}h^{\varepsilon\bar{\tau}}\left(R_{\bar{\tau}\mu}\Phi_{\varepsilon\nu}{}^{i}_{j} - R_{\bar{\tau}\nu}\Phi_{\varepsilon\mu}{}^{i}_{j}\right)$$

注、 $R^{\varepsilon}{}_{\mu\bar{\beta}\alpha}$ の定義および性質は Kodaira & Morrow [9] を参照。 $R_{\bar{\alpha}\beta}=h^{\mu\bar{\nu}}R_{\bar{\nu}\mu\bar{\alpha}\beta}$。

さらに第2項，残りの $R^{\nabla}\ldots$ の部分は， $h^{\alpha\bar{\beta}}(x)=\delta^{\alpha\beta}$ として，

$$-\frac{1}{2}h^{\alpha\bar{\beta}}\left([\Phi_{\alpha\nu}, R^{\nabla}_{\mu\bar{\beta}}]^{i}_{j} - [\Phi_{\alpha\mu}, R^{\nabla}_{\nu\bar{\beta}}]^{i}_{j}\right)$$

$$= \sum_{\alpha}\left([\Phi_{\alpha\nu}, R^{\nabla}_{\mu\bar{\alpha}}]^{i}_{j} - [\Phi_{\alpha\mu}, R^{\nabla}_{\nu\bar{\alpha}}]^{i}_{j}\right),$$

(i) $\mu=\nu$ のとき， 値は 0，

(ii) $\mu \neq \nu$ のとき。 $\mu < \nu$ と仮定してよいから，Mの複素次元 $= 2$ より $\mu = 1,\ \nu = 2$ のみ考えればよい。

$$= \sum_{\alpha} \left([\Phi_{\alpha 1}, R^{\nabla}_{2\bar{\alpha}}]^i_j - [\Phi_{\alpha 2}, R^{\nabla}_{1\bar{\alpha}}]^i_j \right)$$

$$= [\Phi_{21}, R^{\nabla}_{2\bar{2}}]^i_j - [\Phi_{12}, R^{\nabla}_{1\bar{1}}]^i_j$$

$$= -[\Phi_{12}, R^{\nabla}_{1\bar{1}} + R^{\nabla}_{2\bar{2}}]^i_j = 0 \quad (\because\ (2\text{-}5))。$$

よって補題がえられた。

注. (1) これら補題は Bourguignon et al. [5] の共変外微分 d^{∇} に同伴した Laplacian に関する公式 (3, 2)，(3, 10) を用いても導くことができる。

(2) §4 までの議論はすべて一般コンパクト半単純 Lie 群と忠実な複素ベクトル空間表現に対して適用できるが，空間 M が複素2次元であること，Kähler 多様体であること，G-接続が反自己双対であることを本質的な形で用いている。

(3) C^{∞} 複素ベクトル束 E が反自己双対接続 ∇ をもったとすると，その曲率形式はタイプ (1, 1) の 2-形式となり，Atiyah et al. [2] の議論により，E は正則ベクトル束，かつ ∇ は正則接続となる。したがって反自己双対接続のモジュライの次元によって E の複素構造のモジュライの次元が下から評価される。

参考文献

[1] Atiyah,M.F.& Bott,R., A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes,I, Ann. of Math. 86(1967),374-407.

[2] Atiyah,M.F.,Hitchin,N.J.& Singer,I.M., Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, Proc. Royal.Soc.Lond.A. 362(1978) 425-461.

[3] Atiyah,M.F.& Singer,I.M., The index of elliptic operators, III, Ann. of Math.87(1968),546-604.

[4] Barth,W., Moduli of vector bundles on the projective plane, Invent.Math. 42(1977),63-91.

[5] Bourguignon,J.P.& Lawson,H.B., Stability and isolation phenomena for Yang-Mills fields (preprint).

[6] Drinfeld,V.G.& Manin,Yu.I., A description of instantons, Commun. Math. Phys. 63(1978), 177-192.

[7] Kobayashi,S.& Nomizu,K., Foundations of differential geometry, vol I, (1963), Interscience Pub.

[8] Kobayashi,S.& Nomizu,K., Foundations of differential geometry, vol II, (1969), Interscience Pub.

[9] Kodaira,K& Morrow,J., Complex manifolds, (1971), Holt, Rinehart & Winston, Inc.

[10] Rawnsley,J.H., Self-dual Yang-Mills fields, Lect. notes in Math. 755 (1979) Springer

[11] Schwarz,A.S., Instantons and Fermions in the field of instanton, Commun. Math. Phys. 64(1979), 233-268.

[12] Spivak,M., A comprehensive introduction to differential geometry, vol II, (1970), Publish and Perish Inc.