数理解析研究所講究録
416巻 1981年 42-50

Spin(10)×GL(3)に係わる既約概均質ベクトル空間のholonomy diagramとb-関数

筑波大学附属盲学校
尾関育三

(Spin(10)×GL(3), $\Lambda \otimes \Lambda_1$, $V(16) \otimes V(3)$)(Λは偶の半Spin表現, Λ_1は恒等表現)については1974年川原洋人氏が研究し「31個のorbitsに分解される」と報告されている([1]参照)が、holonomy diagramやb-関数については今日まで未解決であった。筆者は川原氏の研究を引継ぎ、holonomy diagramとb-関数について明らかにすることを試み、一応の結果を得たので以下にそれを記す。なお、これによって既約概均質ベクトル空間のholonomy diagramは全て明らかになった。([3]〜[6]参照)

定義および記号

$G = Spin(10) \times GL(3)$

$\rho = \Lambda \otimes \Lambda_1$

$V = V(16) \otimes V(3)$ 但し$V(n)$はn次元ベクトル空間

S_{ijk} : codimension i の G-orbit で、dual な orbit が codimension j，代表点の isotropy subgroup の unipotent 部分が k 次元のもの。但し i, j で他と区別できる場合には k は省略することもある

x_{ijk} : S_{ijk} の代表点

G_x : 点 x の isotropy subgroup

V_x^* : 点 x における conormal vector space．すなわち
$V_x^* = \{ y \in V^* \mid \langle d\rho(A)x, y \rangle = 0 \text{ for } \forall A \in \mathfrak{g} \}$
（但し $\mathfrak{g}$ は G の Lie 環．V^* は V の dual space．$d\rho$ は ρ の微分表現）

Λ_{ijk} : S_{ijk} の conormal bundle，すなわち
$\Lambda_{ijk} = \{ (x, V_x^*) \subset V \times V^* \mid x \in S_{ijk} \}$ の Zariski 閉包．

W $= \{ (x, \varepsilon \operatorname{grad} \log f(x)) \in V \times V^* \mid x \in V - S, \varepsilon \in \mathbb{C} \}$ の Zariski 閉包．$f(x)$ は (G, ρ, V) の相対不変式（12次の斉次多項式）
$S = \{ x \in V \mid f(x) = 0 \}$

（[2] 参照）

1. (G. ρ. V) の orbit 分解

Proposition 1. (G. ρ. V) は表1に示す各点によって代表される32個の orbit に分解される。

注① 川原氏は「31個の orbit に分解される」と記しているが、点 $x_{11,15}$ に代表される orbit が見落されている。他はすべて川原氏によって見出されたものに一致する。

注② 表1の点がすべて異なる orbit に属することは、isotropy subgroup が互いに異なることから知られる。(表2)

注③ ある orbit の conormal bundle Λ が W に含まれ、かつ G-prehomogeneous であれば f^s (f は相対不変式) のみたす micro-differential equations $\mathcal{M} = \mathcal{E}f^s$ は simple holonomic system になり、特にそこでの order $\mathrm{ord}_\Lambda f^s$ が一意的に定まる。([2] 参照)

表1中、$\not\subset$ W と記された orbits はその conormal bundle Λ が W に含まれないものである。それは $S_{13,13,14}$ を除き、それらに関する order $\mathrm{ord}_\Lambda f^s$ が求められない (不定となる) ことから知られる。

$\Lambda_{13,13,14} \not\subset W$ は $\Lambda_{13,13,11} \not\subset W$ から知られる。但し order $\mathrm{ord}_{\Lambda_{13,13,14}} f^s$ が形式的には決定できる。これは注目すべき例である。

注④ 表1中 N.P と記した orbits の conormal bundle と $\Lambda_{11,11}$ については W に含まれるか否かは目下のところ不明である。他はすべて W に含まれる。(証明後記)

[表 I]　各orbitの代表点

$V(16)$の basis	: $1,\ e_{i_1},\ e_{i_2},\ e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3}e_{i_4},\ 1 \leqq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leqq 5$
この略記法	: $e,\ i_1 i_2,\ \hat{i}_j$ (但し $\hat{i}_j\, e_{i_j} = e_1 e_2 e_3 e_4 e_5$)
$V(3)$の basis	: e_6, e_7, e_8 (略記法 6, 7, 8)
e.g.	: $e6 = 1 \otimes e_6$, $\hat{2}6 = -e_1 e_3 e_4 e_5 \otimes e_6$, $127 = e_1 e_2 \otimes e_7$
s.d.	: self dual
N.P.	: not prehomogeneous.

i	j	k	S_{ijk}の代表点		$S_{jik'}$の代表点	j	i	k'
0.	48.	0	$e6+\hat{3}6+127-\hat{2}7+138+\hat{1}8$		0	48.	0.	0.
1,	27	7	$156-246-147+237+e8+\hat{2}8$		$e6+127$	27.	1.	17.
3.	35.	5	$e6+\hat{1}6+257+\hat{5}7+158$	$\not\subset W$	$e6$	35.	3.	12.
3.	19.	5	$e6+\hat{4}6+347+\hat{3}7+138-248$		$136+246+127+e8$	19.	3.	17.
5.	23.	7	$e6+\hat{5}6+2\times 137+257+148-\hat{4}8$	N.P.	$e6+127+138$	23.	5.	14.
5.	15.	7.	$e6-2\times\hat{4}6+347-\hat{3}7+138+\hat{5}8$	$\not\subset W$	$156+\hat{5}6+e7+128$	15.	5.	15.
6.	22.	2.	$156+\hat{1}6+e7+\hat{5}8$	$\not\subset W$	$e6+\hat{5}7$	22.	6.	10.
6.	14.	9.	$e6+\hat{5}6+237+\hat{3}7+158$		$e6+157+\hat{5}8$	14.	6.	7.
7.	23.	8.	$256-\hat{2}6+e7-\hat{5}7+128$		$126+346+e7$	23.	7.	14.
7.	17.	10.	$246-\hat{4}6-147-\hat{5}7+e8$	N.P.	$126+347+e8$	17.	7.	14.
8.	8.	11.	$256+\hat{5}6+237-157+e8$		s.d.	8.	8	
9.	9.	9.	$156-\hat{4}6+\hat{5}7+e8$		s.d.	9.	9.	
10.	10.	10.	$156+236+\hat{5}7+e8$	$\not\subset W$	s.d	10.	10	
11.	15.	9.	$256+\hat{5}6-157+e8$	$\not\subset W$	$e6+\hat{5}6+147+\hat{4}7$	15.	11.	13.
11.	11.	12	$e6-\hat{4}6+157+\hat{5}7+148$		s.d	11.	11.	
13,	13.	14	$e6-\hat{4}6+157+\hat{5}7+128$	$\not\subset W$	$346-\hat{4}6+127+e8$	13.	13.	11.
14.	30.	2	$e6+\hat{5}6+157+\hat{1}7$	N.P.	$e6+\hat{5}6$	14.	30.	10
16.	16.	8.	$\hat{5}6+127+347+e8$	N.P.	s.d.	16.	16.	
18.	18.	13.	$156+\hat{5}6+e7$	$\not\subset W$	s.d.	18.	18.	

注(1) Vにおける G-orbit Sの conormal bundle $\Lambda \subset V \times V^*$と, V^*における G-orbit S^*の conormal bundle $\Lambda^* \subset V \times V^*$とが一致するとき SとS^*は互いに dual な orbit という。

(2) Vの G-orbitsとV^*の G-orbitsとは全体として一致する。よって $S^*_{ijk} \subset V^*$を $S_{ijk} \subset V$と同一視する。

(3) S_{ijk}と $S_{jik'}$とは互いに dual

[表 2]　各代表点における isotropy subgroup の連結成分

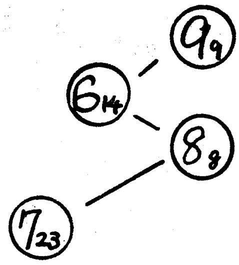
X_{ijk} における isotropy subgroup				$X_{jik'}$ における isotropy subgroup			
i	j	k			j	i	k'
0	48	0	$SL(2)^2$	$Spin(10)GL(3)$	48	0	0
1	27	7	$GL(1)^2\cdot U(7)$	$(SL(3)\times SL(2)^2\times GL(1)^2)\cdot U(17)$	27	1	17
3	35	6	$GL(1)^3\cdot U(6)$	$(SL(5)\times GL(2)\times GL(1))\cdot U(12)$	35	3	12
3	19	5	$(SL(2)\times GL(1))\cdot U(5)$	$(SL(2)^2\times GL(1)^2)\cdot U(17)$	19	3	17
5	23	7	$(SL(2)\times GL(1))\cdot U(7)$	$(SL(3)\times SL(2)^2\times GL(1))\cdot U(14)$	23	5	14
5	15	7	$(SL(2)\times GL(1))\cdot U(7)$	$(SL(2)\times GL(1)^3)\cdot U(15)$	15	5	15
6	22	2	$(SL(3)\times GL(1)^2)\cdot U(2)$	$(SL(4)\times GL(1)^3)\cdot U(10)$	22	6	10
6	14	9	$GL(1)^3\cdot U(9)$	$(SL(3)\times SL(2)\times GL(1)^2)\cdot U(7)$	14	6	7
7	23	8	$(SL(2)\times GL(1)^2)\cdot U(8)$	$(Sp(2)\times GL(1)^2)\cdot U(14)$	23	7	14
7	17	10	$GL(1)^3\cdot U(10)$	$(SL(2)^2\times GL(1)^3)\cdot U(14)$	17	7	14
8	8	11	$GL(1)^3\cdot U(11)$	s. d.			
9	9	9	$(SL(2)\times GL(1)^3)\cdot U(9)$	s. d.			
10	10	10	$(SL(2)\times GL(1)^3)\cdot U(10)$	s. d.			
11	15	9	$(SL(2)^2\times GL(1)^2)\cdot U(9)$	$(SL(2)^2\times GL(1)^2)\cdot U(13)$	15	11	13
11	11	12	$(SL(2)\times GL(1)^2)\cdot U(12)$	s. d.			
13	13	14	$(SL(2)\times GL(1)^2)\cdot U(14)$	$(SL(2)^2\times GL(1)^2)\cdot U(11)$	13	13	11
14	30	2	$(G_2\times SL(2)\times GL(1))\cdot U(2)$	$(Spin(7)\times SL(2)\times GL(1)^2)\cdot U(10)$	30	14	10
16	16	8	$(Sp(2)\times SL(2)\times GL(1))\cdot U(8)$	s. d.			
18	18	13	$(SL(3)\times GL(1)^3)\cdot U(13)$	s. d.			

2. Holonomy diagram と b-関数

Proposition 2 (G, ρ, V) の holonomy diagram は図1の通りである。

注⑤ $⓪_{48}$ − $①_{27}$ − $③_{19}$ の交わりはすべて G_0 prehomogeneous である。但し $G_0 = Spin(10) \times SL(3)$

また



の交わりもすべて G_0 prehomogeneous である。よってこれらの dual な variety の間の交わりも G_0 prehomogeneous である。$\Lambda_{0,48} \subset W$ は自明だから $\Lambda_{8,8} \subset W$ を証明すればこれらと交わる上記の各 variety が W に含まれることが証明できる（[2] 参照）

$\Lambda_{8,8} \subset W$ の証明

$x_{8,8} = 256 + \hat{5}6 + 237 - 157 + e8$

$V^*_{x_{8,8}}$ の代表点として

$y_{8,8} = \frac{3}{2}(456 + 347) + \frac{1}{2}(\hat{3}7 + 248) - 2 \cdot \hat{4}8$ をとる。

これらに対し

$x = x_{8,8} + 456 + 347 + \hat{3}7 + 248 - \hat{4}8$

$y = \frac{1}{2} \cdot 256 + 2 \cdot \hat{5}6 + \frac{1}{2} \cdot 237 - \frac{3}{2} \cdot 157 + \frac{3}{2} \cdot e8 + y_{8,8}$

をとると

$y = \operatorname{grad} \log f(x)$ すなわち.

$\langle d\rho(A)x, y\rangle = \delta\chi(A)$ (AはGのLie環の元)

$$g = \begin{pmatrix} t^{-2} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & t^2 & & \\ & & & t^4 & \\ & & & & t^4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & & \\ & t^2 & \\ & & t^4 \end{pmatrix} \in G_{x_{8,8}} \text{ をとり}$$

$$\lim_{t\to 0} (\rho(g)x, t^4\rho^*(g)y) = (x_{8,8}, y_{8,8})$$

但しρ^*はρの反傾表現

$\therefore \Lambda_{8,8} \subset W$

(証明終り)

以上により.

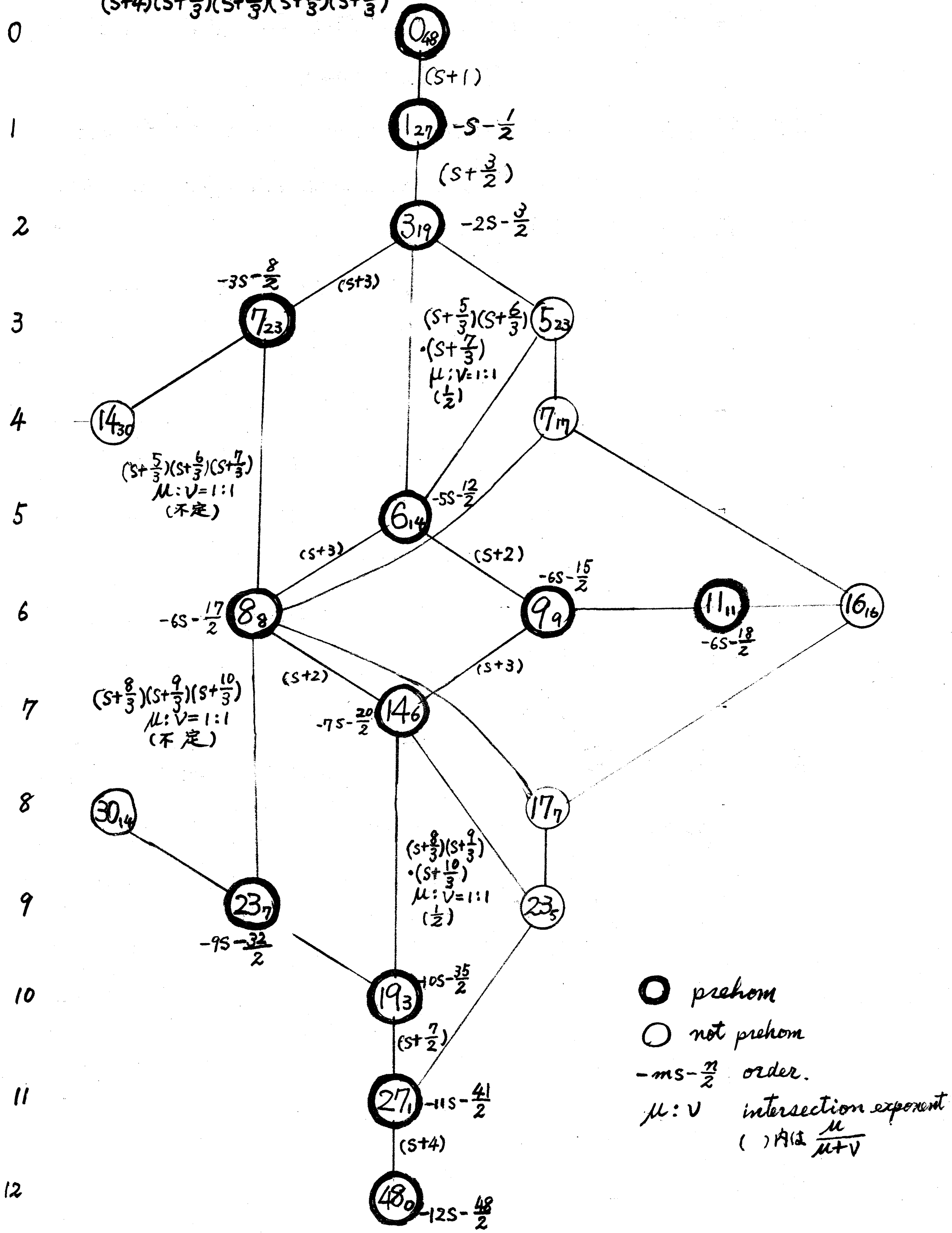
Proposition 3. (G, ρ, V)のb-関数$b(s)$は

$$b(s) = (s+1)(s+\tfrac{3}{2})(s+2)(s+\tfrac{5}{3})(s+\tfrac{6}{3})(s+\tfrac{7}{3})(s+\tfrac{8}{3})(s+\tfrac{9}{3})(s+\tfrac{10}{3})(s+3)(s+\tfrac{7}{2})(s+4)$$

である。証明はb-関数に関するmicro-local calculusによる.

Holonomy diagram $(Spin(10)\times GL(3), \Lambda\otimes\Lambda_1, V_{16}\otimes V_3)$

$$b(s)=(s+1)(s+\tfrac{3}{2})(s+2)^2(s+3)^2(s+\tfrac{7}{2})(s+4)(s+\tfrac{5}{3})(s+\tfrac{7}{3})(s+\tfrac{8}{3})(s+\tfrac{10}{3})$$



参考文献

[1] 川原洋人：「Spin(10)に関連した概均質空間について」 東京大学修士論文(1974)

[2] M. Sato, M. Kashiwara, T. Kimura and T. Oshima: Micro-local analysis of prehomogeneous vector spaces (to appear in Inv. Math)

[3] M. Sato and T. Kimura: A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants. Nagoya Math J. 65, 1~155 (1977)

[4] T. Kimura: The holonomy diagrams and the b-functions of irreducible regular prehomogeneous vactor spaces (to appear in Nagoya Math. J)

[5] I. Ozeki: On the micro-local structure of the regular prehomogeneous vector space associated with SL(5) × GL(4). I. Proc. Japan Acad. 55 A, 37~40 (1979)

[6] I. Ozeki: On the micro-local structure of the regular prehomogenaous vector space associated with GL(8). Proc. Japan Acad. 56 A, 18~21 (1980)