

単純代数群の概均質ベクトル空間の分類

筑波大数学系 木村達雄

連結線型代数群 G の有限次元有理表現 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ が Zariski-稠密な orbit をもつとき (G, ρ, V) を概均質ベクトル空間 (prehomogeneous vector space) という。但しすべて複素数体 \mathbb{C} 上で定義されているとする。群 G が reductive ならば、 $G = GL(1)^s \times G_1 \times \dots \times G_r$ ($s \leq l$), $\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_l$, $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_l$, と仮定してよい。但し $\rho_j: G \rightarrow GL(V_j)$ ($j=1, \dots, l$) は G の既約表現である。 ρ が既約, 即ち $l=1$ の場合の分類は既に完成している (佐藤幹夫-木村達雄 [1])。ここでは $l=1$ の場合 ($l \geq 2$ としよ) の分類を行なう。完全に述べると長くなるので, やり方の説明と例をあげ, 結果と相対不変式についてのみ完全に記述する。詳しくは (木村 [2]) を参照して下さい。

§1. 分類の方針といくつかの例

まず $G = GL(1)^s \times G_1$, $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_l$, $G_1 =$ 単純群, の場合をやれば, $G = GL(1)^s \times G_1$ ($s \leq l$) の場合は, それらのうちから選ぶの

は簡単である。 G_1 のリー環 \mathfrak{g}_1 が $A_n, B_n, C_n, D_n, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$

の場合にのけて各々調べればよい。原理は、 (G, ρ, V) 概均質

$$\Leftrightarrow \exists x \in V \text{ s.t. } \dim G_x = \dim G - \dim V, \text{ 但し } G_x = \{g \in G; \rho(g)x = x\}$$

より、特に (G, ρ, V) 概均質 $\Rightarrow \dim G \geq \dim V$, に注目して、ま

ず $\dim G \geq \dim V$ となる三つ組 (G, ρ, V) を求め、その各々に

ついて概均質性を check する方法をとる。とくに (G, ρ, V)

概均質 $\Rightarrow (G, \rho_i, V_i) (i=1, \dots, \ell)$ 既約概均質ベクトル空間、ゆえ

(G, ρ_i, V_i) は [1] で得られた既約概均質ベクトル空間の表に表わ

れる。得られた各々の空間の概均質性の証明はそれぞれ工夫

がいる。例えば、次の2つの空間の概均質性を調べてみよう。

$$(1) (GL(1)^3 \times SL(6), \text{目} \oplus \square \oplus \square^*, V(20) \oplus V(6) \oplus V(6)^*)$$

$$(2) (GL(1)^2 \times Spin(12), \text{偶半スピノ表現} \oplus \text{奇半スピノ表現}, V_e(32) \oplus V_o(32))$$

Proposition (1) は概均質ではない。

証明) $(GL(1) \times SL(6), \text{目}, V(20))$ の generic isotropy subalgebra

は $\left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}; A, B \in \mathfrak{sl}(3) \right\}$ である ([1]) から (1) の概均質性は

$$G = GL(1)^3 \times (SL(3) \times SL(3)) \ni \mathfrak{g} = (\alpha, \beta; A, B), \quad V =$$

$$\{X = (x, x', y, y') \in (\mathbb{C}^3)^4\}, \quad \rho(g)X = (\alpha Ax, \alpha Bx', \beta^* A^{-1}y, \beta^* B^{-1}y')$$

で与えられる (G, ρ, V) の概均質性に帰着するが、 $f(X) = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x', y' \rangle}$

はその絶対不変式で (勿論定数でないから) あるから (G, ρ, V)

は概均質ではあり得ない。実際もし概均質ならば、絶対不変

式は Zariski-dense orbit 上で定数、従って全体でも定数とす

るからである(証明終)

Proposition (2)も概均質ではない。

証明) $(GL(1) \times Spin(12), \text{偶半スピン表現}, V_0(32))$ の generic isotropy subgroup は $SL(6)$ である。これを $Spin(12)$ の奇半スピン表現に制限してみると, weights の分解から, $SL(6)$ の表現空間として $V_0(32)$ は $V_0(32) = V(20) \oplus V(6) \oplus V^*(6)$, $\square \oplus \square \oplus \square^*$ と分解する事がわかる。よって(2)の概均質性と $(GL(1) \times SL(6), \square \oplus \square \oplus \square^*, V(20) \oplus V(6) \oplus V^*(6))$ の概均質性は同値であるが, より大きな群の作用による(1)ですら概均質でないのだから, これは概均質ではない(証明終)

このような調子で調べていくのであるが, 長くなるので略し次に結果のみを記そう。

§2. 単純代数群の(既約でない)概均質ベクトル空間とその相対不変式の表

$\frac{G}{\rho} / H$ は (G, ρ, V) の generic isotropy subgroup が H と局所同型な事を表わす。 N は独立な相対不変式の個数, f_1, \dots, f_N は相対不変式の既約多項式からなる free base, f_1, \dots, f_N を具体的に与える必要があるとき, V を具体的に書き, また action ρ もそれに応じて記す事もある。

$GL(1)^l \times G_1, V = V_1 \oplus \dots \oplus V_e$ のとき, $\rho = GL(1)^l$ の action を記さ

ないが, $GL(1)^2$ は V の各既約成分の scalar 倍として作用する。

S 等となる $GL(1)^S$ でも概均質になる場合には, そうなる最小の S について G/H を記す。この場合の $GL(1)^S$ の scalar 倍の action は ■ で記す事にしよう。

(I) 正則概均質ベクトル空間 (regular P.V. 即ち Hessian $f = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}) \neq 0$ とする相対不変式 f の存在する空間)

$$(1) \quad GL(1)^2 \times SL(n) / \square \oplus \square^* / GL(1) \times SL(n-1) \quad \left(\begin{array}{c} GL(1) \times SL(n) \\ \blacksquare \otimes (\square \oplus \square^*) / SL(n-1) \end{array} \right)$$

$$N=1, \quad f_1(\tilde{x}) = \langle x, y \rangle \quad \text{for } \tilde{x} = (x, y) \in V(n) \oplus V^*(n).$$

$$(2) \quad GL(1)^n \times SL(n) / \underbrace{\square \oplus \dots \oplus \square}_n / GL(1)^{n-1} \quad \left(\begin{array}{c} GL(1) \times SL(n) \\ \blacksquare \otimes \underbrace{(\square \oplus \dots \oplus \square)}_n / 1 \end{array} \right)$$

$$N=1, \quad f_1(X) = \det X \quad \text{for } X \in V = M(n) (= n \times n \text{ 行列全体})$$

$$(3) \quad GL(1)^{n+1} \times SL(n) / \underbrace{\square \oplus \dots \oplus \square}_{n+1} / 1, \quad N = n+1,$$

$$f_k(X) = \det(x_1, \dots, \check{x}_k, \dots, x_{n+1}) \quad \text{for } k=1, \dots, n+1 \quad \text{for } X = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in M(n, n+1)$$

$$(4) \quad GL(1)^3 \times SL(2m) / \square \oplus \square \oplus \square / GL(1) \times S_p(m-1) \quad \left(\begin{array}{c} GL(1)^3 \times SL(2m) \\ \blacksquare \otimes \square \oplus (\blacksquare \otimes (\square \oplus \square)) / S_p(m-1) \end{array} \right)$$

$$N=2, \quad f_1(\tilde{x}) = Pf(X) (= X \text{ の Pfaffian}), \quad f_2(\tilde{x}) = {}^t y \Delta(X) \cdot z$$

($\Delta(X)$ は X の余因子行列) for $\tilde{x} = (X; y, z) \in V =$
 $\{(X; y, z); {}^tX = -X \in M(2m), y, z \in \mathbb{C}^{2m}\}$, $\rho(g)\tilde{x} = (\alpha AX^tA; \beta Ay, \gamma Az)$
 for $g = (\alpha, \beta, \gamma; A) \in GL(1)^3 \times SL(2m)$.

$$(5) \quad GL(1)^3 \times SL(2m) / \left(\begin{array}{c} \square \oplus \square \oplus \square^* \\ GL(1) \times Sp(m-1) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} GL(1)^2 \times SL(2m) \\ (\square \oplus \square) \oplus (\square \oplus (D \oplus D^*)) \\ Sp(m-1) \end{array} \right)$$

$N=2$, $f_1(\tilde{x}) = Pf(X)$, $f_2(\tilde{x}) = \langle y, z \rangle$ for $\tilde{x} = (X; y, z) \in V =$
 $\{(X; y, z); {}^tX = -X \in M(2m), y, z \in \mathbb{C}^{2m}\}$, $\rho(g)\tilde{x} = (\alpha AX^tA; \beta Ay, \gamma {}^tA^t z)$
 for $g = (\alpha, \beta, \gamma; A) \in GL(1)^3 \times SL(2m)$, $\tilde{x} \in V$.

$$(6) \quad GL(1)^3 \times SL(2m) / \left(\begin{array}{c} \square \oplus \square^* \oplus \square \\ GL(1) \times Sp(m-1) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} GL(1)^2 \times SL(2m) \\ (\square \oplus \square) \oplus (\square \oplus (D \oplus D^*)) \\ Sp(m-1) \end{array} \right)$$

$N=2$, $f_1(\tilde{x}) = Pf(X)$, $f_2(\tilde{x}) = {}^t y X z$ for $\tilde{x} = (X; y, z) \in V =$
 $\{(X; y, z); {}^tX = -X \in M(2m), y, z \in \mathbb{C}^{2m}\}$, $\rho(g)\tilde{x} = (\alpha AX^tA, \beta {}^tA^t y, \gamma {}^tA^t z)$
 for $g = (\alpha, \beta, \gamma; A) \in GL(1)^3 \times SL(2m)$.

$$(7) \quad GL(1)^2 \times SL(2m+1) / \left(\begin{array}{c} \square \oplus \square \\ GL(1) \times Sp(m) \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} GL(1) \times SL(2m+1) \\ \square \oplus (\square \oplus \square) \\ Sp(m) \end{array} \right)$$

$N=1$, $f_1(\tilde{x}) = Pf(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in V = \left\{ \tilde{x} = \begin{bmatrix} X & y \\ -{}^t y & 0 \end{bmatrix}; {}^tX = -X \right.$
 $\left. \in M(2m+1), y \in \mathbb{C}^{2m+1} \right\}$, $\rho(g)\tilde{x} = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha} A & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \end{bmatrix} \tilde{x} {}^t \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha} A & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha AX^tA & \beta Ay \\ -\beta {}^t y {}^t A & 0 \end{bmatrix}$

for $g = (\alpha, \beta, A) \in GL(1)^2 \times SL(2m+1)$

$$(8) \quad \frac{GL(1)^4 \times SL(2m+1)}{\square \oplus \square \oplus \square \oplus \square} / Sp(m-1)$$

$$N=4, \quad f_1(\tilde{x}) = Pf \left[\begin{array}{c|c} X & y \\ \hline -y & 0 \end{array} \right], \quad f_2(\tilde{x}) = Pf \left[\begin{array}{c|c} X & z \\ \hline -z & 0 \end{array} \right], \quad f_3(\tilde{x}) = Pf \left[\begin{array}{c|c} X & w \\ \hline -w & 0 \end{array} \right]$$

$$f_4(\tilde{x}) = Pf \left[\begin{array}{c|c} X & yzW \\ \hline -{}^t(yzW) & 0 \end{array} \right] \quad \text{for } \tilde{x} \in V = \{ \tilde{x} = (X; y, z, w) \};$$

$${}^tX = -X \in M(2m+1), \quad y, z, w \in \mathbb{C}^{2m+1}, \quad P(g)\tilde{x} = (\alpha AX^tA; \beta Ay, \delta Az, sAw)$$

$$\text{for } g = (\alpha, \beta, \delta, s; A) \in GL(1)^4 \times SL(2m+1).$$

$$(9) \quad \frac{GL(1)^4 \times SL(2m+1)}{\square \oplus \square \oplus \square^* \oplus \square^*} / Sp(m-1)$$

$$N=4, \quad f_1(\tilde{x}) = Pf \left[\begin{array}{c|c} X & y \\ \hline -y & 0 \end{array} \right], \quad f_2(\tilde{x}) = \langle y, z \rangle, \quad f_3(\tilde{x}) = \langle y, w \rangle,$$

$$f_4(\tilde{x}) = {}^t z X w \quad \text{for } \tilde{x} = (X; y, z, w) \in V, \quad P(g)\tilde{x} = (\alpha AX^tA; \beta Ay, \delta A^t z, s A^t w)$$

$$(10) \quad \frac{GL(1)^2 \times SL(n)}{\square \oplus \square} / O(n)$$

$$N=2, \quad P(g)\tilde{x} = (\alpha AX^tA; \beta Ay) \quad \text{for } g = (\alpha, \beta; A) \in GL(1)^2 \times SL(n),$$

$$\tilde{x} \in V = \{ \tilde{x} = (X; y); {}^tX = X \in M(n), y \in \mathbb{C}^n \}, \quad f_1(\tilde{x}) = \det X,$$

$$f_2(\tilde{x}) = {}^t y \cdot \Delta(X) \cdot y, \quad \text{but } \Delta(X) \text{ is the cofactor matrix of } X.$$

$$(11) \quad \frac{GL(1)^2 \times SL(n)}{\square \oplus \square^*} / O(n-1)$$

$$N=2, \quad f_1(\tilde{x}) = \det X, \quad f_2(\tilde{x}) = {}^t y X y \quad \text{for } \tilde{x} \in V = \{ (X, y); X =$$

$${}^tX \in M(n), y \in \mathbb{C}^n \}, \quad P(g)\tilde{x} = (\alpha AX^tA, \beta {}^t A^{-1} y) \quad \text{for } g = (\alpha, \beta; A) \in GL(1)^2 \times SL(n).$$

$$(12) \quad \frac{GL(1)^2 \times SL(7)}{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}} / SL(3)$$

$$N=2, \quad V = \{ \tilde{x} = (x, y); x = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 7} x_{ijk} u_i \wedge u_j \wedge u_k \in \wedge^3 \mathbb{C}^7, y \in \mathbb{C}^7 \}$$

$P(g)\tilde{x} = (\alpha \beta(A)x, \beta Ay), \beta_3(A)x = \sum x_{ijk} (Au_i) \wedge (Au_j) \wedge (Au_k)$ for $g = (\alpha, \beta; A) \in GL(1)^2 \times SL(7)$. $\mathbb{Q} = \sum_{i=1}^7 y_i \frac{\partial x}{\partial u_i}$ とおき 7×7 行列 $\varphi(x)$ と $\varphi^*(x)$ を次の様に定める。 $\varphi(x) = (\varphi_{ij}(x))$, 但し $\varphi_{ij}(x)$ は $x \wedge \mathbb{Q} \wedge \mathbb{Q} = \left(\sum_{i,j} \varphi_{ij}(x) y_i y_j \right) \omega$ ($\omega = u_1 \wedge \dots \wedge u_7$) で定める。 $\varphi^*(x) = (\varphi_{ij}^*(x))$, $\varphi_{ij}^*(x) = \sum_{s,t} f_{it}^s(x) f_{sj}^t(x)$, $x \wedge \mathbb{Q} = \sum_{s,i,t} f_{it}^s(x) y_s u_i \wedge u_t$ 但し $u_i \wedge u_j \wedge u_k = \omega$ 。 然るに $\varphi(\beta_3(A)x) = A \varphi(x)^t A$, $\varphi^*(\beta(A)x) = {}^t A^{-1} \varphi^*(x) A^{-1}$ for $A \in SL(7)$ が成立 ([3] を参照), このとき $f_1(\tilde{x}) = \text{tr} \varphi(x) \varphi^*(x)$, $f_2(\tilde{x}) = {}^t y \cdot \varphi^*(x) y$.

$$(13) \quad \frac{GL(1)^2 \times SL(7)}{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^*} / SL(3)$$

$$N=2. \quad P(g)\tilde{x} = (\alpha \beta_3(A)x, \beta \cdot {}^t A^{-1} y) \Rightarrow f_1(\tilde{x}) = \text{tr} \varphi(x) \varphi^*(x),$$

$$f_2(\tilde{x}) = {}^t y \cdot \varphi(x) \cdot y.$$

$$(14) \quad \frac{GL(1)^2 \times Spin(8)}{\text{ベクトル表現} \oplus \text{半スピノ表現}} / (G_2)$$

$$N=2. \quad Spin(8) \xrightarrow[\substack{\text{ベクトル表現} \\ \text{(偶, 奇) 半スピノ表現}}]{\cong} SO(8) \quad \text{中へ 相対不変式は}$$

$$2\text{つの2次式. } f_1(\tilde{x}) = g_1(x), f_2(\tilde{x}) = g_2(y), \tilde{x} = (x, y) \in V(8) \oplus V(8)$$

(注) $Spin(8)$ の 3 つの表現, (ベクトル表現, 偶半スピノ表現, 奇半スピノ表現) のどの相異なる 2 つの組合せも (14) と (擬均質ベクトル空間として) 同型になる。

$$(15) \quad GL(1)^2 \times Spin(7) \quad \Big/ \quad SL(3)$$

ベクトル表現 ⊕ スピノ表現

$N=2$, $Spin(7) \xrightarrow{\text{ベクトル表現}} SO(7)$, $Spin(7) \xrightarrow{\text{スピノ表現}} SO(8)$, 中之相対不変式は 7変数, 8変数の二次式である。

$$(16) \quad GL(1)^2 \times Spin(10) \quad \Big/ \quad GL(1) \times (G_2)$$

偶半スピノ表現 ⊕ 偶半スピノ表現

$$N=1. \quad \text{偶半スピノ } \alpha \text{ は } \alpha = \alpha_0 + \sum_{1 \leq i < j \leq 5} \alpha_{ij} e_i e_j + \sum_k \alpha_k^* e_k^*,$$

$e_k e_k^* = e_1 \cdots e_5$ と表わせる ([1] を見よ). $X = (\alpha_{ij})$ をこれから得られる 5×5 歪対称行列, X_i を $(-1)^i X$ から i 行 i 列を除いて得られる 4×4 歪対称行列. 一般に 4×4 歪対称行列 $Y = (y_{ij})$ に対し $Pf(Y) = y_{12}y_{34} - y_{13}y_{24} + y_{14}y_{23}$ とおく (即ち Pfaffian)。

偶半スピノ表現空間 $V(16)$ 上に次の 10 個の 2 次形式 $Q_i(x)$ ($i=1, \dots, 10$) を定義する. $Q_i(x) = \sum_{j=1}^5 \alpha_{ij} \alpha_j^*$, $Q_{i+5}(x) = \alpha_0 \alpha_i^* + Pf(X_i)$

($i=1, \dots, 5$). 更に $B_i(x, y) = Q_i(x+y) - Q_i(x) - Q_i(y)$ とおく. 然らば

$$F_1(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^5 B_i(x, y) B_{i+5}(x, y) \quad \text{となる。}$$

$$\left(\begin{array}{l} GL(1) \times Spin(10) \\ \bullet \text{ (偶半スピノ} \oplus \text{偶半スピノ)} \end{array} \right) \Big/ (G_2)$$

$$(17) \quad GL(1)^2 \times Spin(10) / Spin(7)$$

ベクトル表現 \oplus 半スピノ表現

$N=2$, $f_1(\tilde{x}) = q(x)$ (=10変数2次形式), $f_2(\tilde{x}) = \langle x, Q(y) \rangle$
 但し $Q(y) = {}^t(Q_1(y), \dots, Q_{10}(y))$ for $\tilde{x} = (x, y) \in V(10) \oplus V(16)$.

(単に半スピノ表現と記した場合は, 偶でも奇でもどちらでもよい, 即ち同型になる, 事を示している)

$$(18) \quad GL(1)^2 \times Spin(12) / SL(5)$$

ベクトル表現 \oplus 半スピノ表現

$N=2$, 相対不変式は 12変数2次式, 32変数4次式である。

$$(19) \quad GL(1)^2 \times Sp(n) / GL(1) \times Sp(n-1) \left(\frac{GL(1) \times Sp(n)}{\square \otimes (\square \oplus \square)} / Sp(n-1) \right)$$

$N=1$, $f_1(\tilde{x}) = Pf {}^t(xy)J(xy)$ for $\tilde{x} = (x, y) \in V(2n) \oplus V(2n)$,
 $J = \begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$.

$$(20) \quad GL(1)^2 \times Sp(3) / SL(2)$$

目 \oplus \square

$N=2$, $f_1(\tilde{x})$ は $Sp(3)$ の 14変数4次式, $f_2(\tilde{x})$ は $SL(6)$ の 20変数4次の相対不変式.

(II) 非正則楕円空間ベクトル空間 (この空間の相対不変式は正則の場合ほど重要でないため省略し、個数 N のみ示す)

$$(1) \quad \frac{GL(1)^\ell \times SL(n)}{\underbrace{\square \oplus \dots \oplus \square}_\ell} / (GL(1)^\ell \times SL(n-l)) \cdot G_a^{\ell(n-l)} \quad (2 \leq \ell \leq n-1)$$

$$N=0, \quad \left(\frac{SL(n)}{\underbrace{\square \oplus \dots \oplus \square}_\ell} / SL(n-l) \cdot G_a^{\ell(n-l)} \right), \quad G_a \cong \mathbb{C}; \text{1次元加法群}$$

$$(2) \quad \frac{GL(1)^\ell \times SL(n)}{\underbrace{\square \oplus \dots \oplus \square \oplus \square^*}_{\ell-1}} / (GL(1) \times SL(n-l+1)) \cdot G_a^{(n-l+1)(\ell-2)} \quad (n+l \geq 3)$$

$$N=\ell-1, \quad \left(\frac{GL(1)^{\ell-1} \times SL(n)}{(\underbrace{\blacksquare \oplus \square}_{\ell-1}) \oplus \dots \oplus (\blacksquare \oplus \square) \oplus \square^*} / SL(n-l+1) \cdot G_a^{(n-l+1)(\ell-2)} \right)$$

$$(3) \quad \frac{GL(1)^2 \times SL(2m+1)}{\square \oplus \square} / GL(1)^2 \cdot G_a^{2m} \quad \left(\frac{SL(2m+1)}{\square \oplus \square} / G_a^{2m} \right)$$

$$N=0$$

$$(4) \quad \frac{GL(1)^2 \times SL(2m)}{\square \oplus \square} / (GL(1) \times Sp(m-1)) \cdot U(m-1)$$

$N=1$, $U(m-1)$ は $m-1$ 次元 unipotent 群, という意味.

$$\left(\frac{GL(1) \times SL(2m)}{\blacksquare \oplus (\square \oplus \square)} / Sp(m-1) \cdot U(m-1) \right)$$

$$(5) \quad \frac{GL(1)^2 \times SL(2m)}{\square \oplus \square^*} / (GL(1) \times Sp(m-1)) \cdot U(m-1)$$

$$N=1, \quad \left(\frac{GL(1) \times SL(2m)}{\blacksquare \oplus (\square \oplus \square^*)} / Sp(m-1) \cdot U(m-1) \right)$$

40

$$(6) \quad \frac{GL(1)^2 \times SL(2m+1)}{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^*} / \left((GL(1)^2 \times S_p(m-1)) \cdot U(4m-2) \right),$$

$$N=0 \quad \left(\frac{SL(2m+1)}{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^*} / S_p(m-1) \cdot U(4m-2) \right)$$

$$(7) \quad \frac{GL(1)^3 \times SL(2m+1)}{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}} / \left((GL(1) \times S_p(m-1)) \cdot U(2m-1) \right)$$

$$N=2, \quad \left(\frac{GL(1)^2 \times SL(2m+1)}{\mathbb{R} \otimes (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \oplus (\mathbb{R} \otimes \mathbb{R})} / S_p(m-1) \cdot U(2m-1) \right)$$

$$(8) \quad \frac{GL(1)^3 \times SL(2m+1)}{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^*} / \left((GL(1) \times S_p(m-1)) \cdot U(2m-1) \right)$$

$$N=2 \quad \left(\frac{GL(1)^2 \times SL(2m+1)}{\mathbb{R} \otimes (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \oplus (\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}^*)} / S_p(m-1) \cdot U(2m-1) \right)$$

$$(9) \quad \frac{GL(1)^3 \times SL(2m+1)}{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^* \oplus \mathbb{R}^*} / \left((GL(1)^2 \times S_p(m-1)) \cdot U(2m-2) \right)$$

$$N=1 \quad \left(\frac{GL(1) \times SL(2m+1)}{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \otimes (\mathbb{R}^* \oplus \mathbb{R}^*)} / S_p(m-1) \cdot U(2m-2) \right)$$

$$(10) \quad \frac{GL(1)^2 \times SL(6)}{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}} / \left((GL(1) \times SL(2) \times SL(2)) \cdot G_a^4 \right) \quad \left(\frac{GL(1) \times SL(6)}{\mathbb{R} \otimes (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R})} / (SL(2) \times SL(2)) G_a^4 \right)$$

$N=1,$

$$(11) \quad \frac{GL(1)^3 \times SL(6)}{\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}} / GL(1)^2 \cdot G_a^4 \quad \left(\frac{GL(1) \times SL(6)}{\mathbb{R} \otimes (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R})} / G_a^4 \right)$$

$N=1,$

参考文献

- [1] M. Sato and T. Kimura, *A Classification of Irreducible Prehomogeneous Vector Spaces and Their Relative Invariants*
Nagoya Math. J. Vol 65 (1977) 1-155
- [2] T. Kimura, *A Classification of Prehomogeneous Vector Spaces of Simple Algebraic Groups*, (preprint)
- [3] T. Kimura, *Remark on Some Combinatorial Construction of Relative Invariants*, (Tsukuba J. of Math. Vol 5, No 1, 1981 June)
- [4] M. Sato, M. Kashiwara, T. Kimura and T. Oshima, *Microlocal Analysis of Prehomogeneous Vector Spaces*,
Inv. Math. (1981)
- [5] T. Kimura and M. Muro, *On Some Series of Regular Irreducible Prehomogeneous Vector Spaces*, Proc. Japan Acad., Vol 55, Ser A, No. 10 (1979), 384-389
- [6] T. Kimura, *The ℓ -functions and holonomy diagrams of Irreducible Regular Prehomogeneous Vector Spaces*,
(Nagoya Math. J. Vol 85 (1982))
- [7] 木村達雄, 概均質ベクトル空間の理論 (論説) 数学オ 32巻 2号 (1980)
- (注) 最近, 一般の Reductive 群の場合の概均質ベクトル空間の分類原理がみつかった。これについては他の機会にゆづる。)