

## How to List up All of 3-Manifolds

東工大 理学部

根上生也

### §1 Introduction

すでに知られているように, genus 1 の 3-manifold の分類は完全に終了している。orientable の場合はいわゆるレンズ空間  $L(p, q)$  で, それらの同相性の判定法も分かっている。一方, non-orientable の場合はおもしろいことにただ 1 つしか存在しない。以後それを  $K^3$  で引用するが,  $K^3$  は non-trivial  $S^2$ -bundle over  $S^1$  に同相である。そこで我々は次の定理にあるように genus 2 の non-orientable 3-manifold のリスト作成を試みた。

定理 1 genus 2 の non-orientable 3-manifold  $M^3$  は次のいずれかに同相である。

- i)  $K^3 \# K^3$ ,  $K^3 \# L(p, q)$
- ii)  $P^2 \times S^1$
- iii) Table 1. の  $A(m, n) \sim E(\alpha, \beta, \gamma; m, n)$

上の i) は  $M^3$  が irreducible でない, 即ち prime でない場合で, 容易に genus 1 に帰着できる。ii) は,  $\tau$  を  $D^2 \times S^1$  上の free involution とするとき,  $D^2 \times S^1 / \tau$  の形で与えられるものである。これは double covering:  $S^2 \times S^1 \rightarrow D^2 \times S^1 / \tau$  を考えれば [2] の結果から直ちに分かる。iii) は残り物をすべて含んでいるが, i) ii) と重複するものもある。実際,  $A(1,0) \approx K^3$ ,  $B(x,y;1,0) \approx K^3 \# L(x+y,x)$ ,  $D_2(2n;1,0) \approx P^2 \times S^1$  ( $\approx$  は同相を示す) となっている。が, iii) の特徴はどれも  $D^2 \times S^1$  からその境界を適当に同一視して与えられるという点で, この意味では  $P^2 \times S^1$  も iii) に入れることができる。

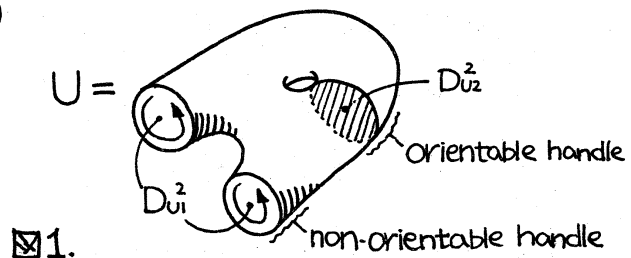
以下では主に Table 1 を作る手続を概説する。おそらく “non-orientable” というのを気にされる方もあろうが, 別に “orientable” だと難しいというわけではなく, 単にこちらを初めにやってみただけである。実際, ここで紹介する手法は容易に一般化することができる。が, non-orientable だからこそ “genus 1 はただ 1 つ” という事実が尾を引いて genus 2 のリストがあまり大きくふくれなかつたのかもしれない…。

## §2 $M^3$ を $D^2 \times S^1$ に展開する

まず, 幾何学的準備として genus  $n$  ( $\geq 2$ ) の irreducible closed 3-manifold  $M^3$  が以下のようにして  $D^2 \times S^1$  に展開されることを示す。が, その前段階として  $M^3$  を ball に切り開くことから考える。単に

ball にするのなら  $M^3$  を単体分割して おいて tree 状に 3-単体を拾って いけばよいし,  $M^3$  が  $P^2$ -irreducible sufficiently large ならば hierarchy という手法もあるが,  $M^3$  の genus を反映するものを得るために  $M^3$  の Heegaard 分解  $(M^3; U, V)$  から構成した 2-(cell)-complex  $L_0$  に沿って ナイフを入水てみる。ここで  $U, V$  は handle body で  $M^3 = U \cup V, U \cap V = \partial U = \partial V$ , さらに  $\text{genus } U = \text{genus } V = \text{genus } M^3 = n$  と仮定しておく。

$D_{U1}^2, \dots, D_{Un}^2; D_{V1}^2, \dots, D_{Vn}^2$  をそれぞれ  $U, V$  の meridian disk の complete system とし, それらで  $U, V$  の handle を切断して得られる ball を  $B_U^3, B_V^3, P_{U(V)}: B_{U(V)}^3 \rightarrow U(V)$  を自然な射影とする。特に  $M^3$  が non-orientable のときは  $D_{U1}^2, D_{V1}^2$  のみが  $U, V$  の "non-orientable handle" を切ると規約しておく。(実際, そのように meridian disk を取り直すことはできる。)



$\partial B_U^3$  にはいわゆる "Whitehead-graph"  $W_U$  が描かれるが,  $D_{U1}^2$  をその中心  $d_1$  と  $\partial D_{U1}^2$  との join,  $D_{U1}^2 = d_1 * \partial D_{U1}^2$  とみたとき,

$$\mathcal{U}(W_U) = P_U^{-1}(\{d_1, \dots, d_n\})$$

$$P_U^{-1}(\bigcup_{j=1}^n \partial D_{Uj}^2 \cup \bigcup_{i=1}^n d_i * (D_{Uj}^2 \cap (\bigcup_{j=1}^n D_{Uj}^2))) = W_U \subset \partial B_U^3$$

であるとする。ただし,  $\mathcal{U}(G)$  は graph  $G$  の vertex set を表わす。

このとき,  $B_M^3 = 0 * \partial B_M^3$  ( $0 \in B_M^3$  は  $B_M^3$  の中心) と考えて,

$$L_0 = P_0(0 * W_U) \cup D_{V_1}^2 \cup \dots \cup D_{V_n}^2 \subset M^3$$

とおく。  $L_0$  に complex の構造を入れるには,  $P_0(0)$  を唯一の 0-cell,  $L_0^{(1)} = P_0(0 * \cup(W_U))$  を  $L_0$  の 1-skelton と思えばよい。  $L_0^{(1)}$  は  $D_{V_1}^2, \dots, D_{V_n}^2$  をそれぞれ通過する  $S^1$  が 1 点  $P_0(0)$  で交わったもので, いわば  $U$  の "芯" である。そこに  $D_{V_1}^2, \dots, D_{V_n}^2$  をそれぞれ含みむら枚の 2-cell を attach したのが  $L_0$  であるから,  $\pi_1(M^3) \cong \pi_1(L_0)$  は明らかだろう。また, 直観的には  $L_0 = \overline{\lim_{U \rightarrow \text{芯}} (D_{V_1}^2 \cup \dots \cup D_{V_n}^2)}$  と理解してもよい。

$M^3$  を  $L_0$  で切ったとき ball になるかどうかは  $\partial B_M^3$  に描かれる Whitehead-graph  $W_U$  の構造に依存する。その様子は具体的に  $P^2 \times S^1$  でやってみれば分かるだろう。(図 2. を見よ) 実は ball にならないのは  $W_U$  が非連結のときだけで, その場合 Heegaard diagram は一目で  $M^3$  が irreducible でないと分かる形になっている。したがって, 我々の  $M^3$  は irreducible だからいつでも ball  $B_M^3$  に展開できる。

$P_M: B_M^3 \rightarrow M^3$  を自然に定義して,  $G_U = P_M^{-1}(L_0^{(1)})$  とおく。  $\cup(G_U) = P_M^{-1}(P_0(0))$  と思えば  $G_U$  に graph の構造が入る。  $G_U \subset \partial B_M^3$  は  $D_{V_i}^2$  に対応して 2 個ずつ, 合わせて  $2 \times \text{genus } M^3$  個の face, 即ち,  $\partial B_M^3 - G_U$  の component  $A_1^+, A_1^-, \dots, A_n^+, A_n^-$  を持っているから, この ball への展開は我々の目的に合ったものと言えるだろう。お

そらく上述の操作を経て  $G_U$  を構成するのは厄介だと思われるだろうが、実は  $G_U$  は  $W_U$  の dual graph になっているので ( $G_U = W_U^*$ ) Heegaard diagram から容易に与えられるのである。

今度は  $M^3$  を  $D^2 \times S^1$  に切り開くことを考えよう。図 2 の例では  $B_M^3$  を  $D^2 \times I$  のように描いてあるから、 $A_n^+$  と  $A_n^-$  を貼り合せれば  $D^2 \times S^1$  になるのがよく分かる。これは  $D^2 \times S^1$  を得るには  $L_0$  にナイフを入れたのでは少し切りすぎだ、たことを示している。

そこで、この事実を一般化して 2-complex  $L_1 = L_0 - P_M(A_n^+ \cup A_n^-)$  で切って  $M^3$  を展開する。そうしてできた空間を  $X$  として、 $A_n^+$  と  $A_n^-$  の貼り合せを表わす射影  $P_i: B_M^3 \rightarrow X$  と  $L_1$  での切り開きを表わす射影  $g_M: X \rightarrow M^3$  を  $P_M = g_M \circ P_i$  となるように自然に定義する。 $P_i(G_U)$  の構造を調べると分かることだが、 $X$  は  $D^2 \times S^1$  いくつか (長個) の 2-handle を attach したものになり、長はちょうど  $\text{Int } X \cap P_i(G_U)$  の component の個数に等しい。もし長  $> 0$  だとすると、 $g_M$  により  $M^3$  の中に  $L(p, g)$  から ball を除去したものが embed されてしまい  $M^3 = M_1 \# L(p, g)$  になってしまう。これは、 $p=1$  のときを除いて、 $M^3$  が irreducible, genus 2 に矛盾するが、 $p=1$  のときも詳しく調べていくと  $\text{genus } M^3 < \text{genus } U$  が結論されてしまい Heegaard 分解の取り方に反する。したがって長  $= 0$  となり  $X$  は  $D^2 \times S^1$  に同相になる。つまり、 $M^3$  を  $L_1$  で切り開くと  $D^2 \times S^1$  になるのである。

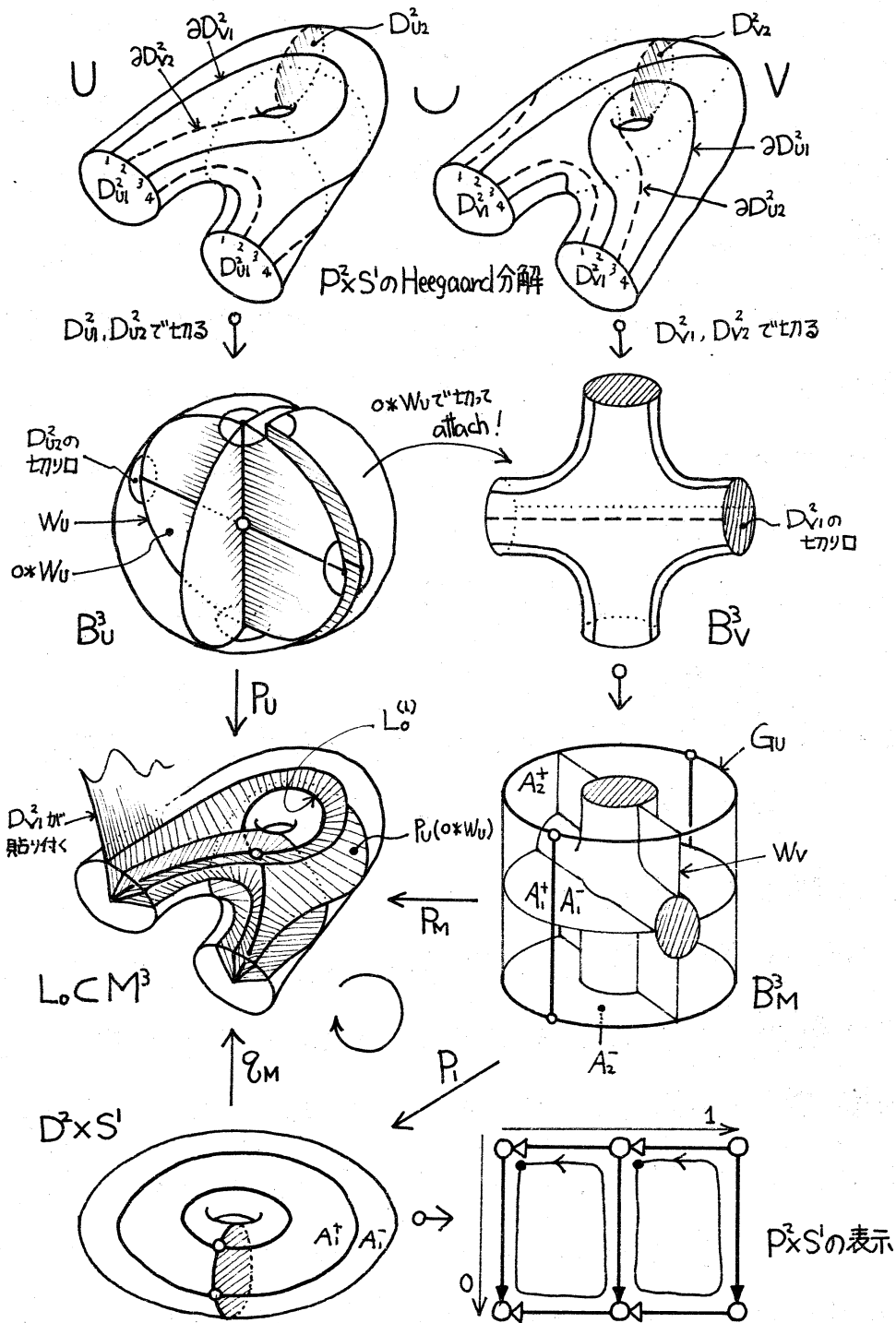


図2.  $P^2 \times S^1$  を  $D^2 \times S^1$  に展開する。

§3  $M^3$ の表示 (Table 1.の見方)

以上で genus 2 の irreducible 3-manifold  $M^3$  が  $D^2 \times S^1$  に展開されることが分かった。そこで、この展開の表示を考えよう。

$M^3$  を §2 の操作で  $D^2 \times S^1$  に切り開くと、 $\partial D^2 \times S^1$  には 2 つの face  $A^+$ ,  $A^-$  を持った graph  $G$  が描かれる。作り方から  $G = \mathcal{I}_M(L_1^{(1)})$ ,  $\partial D^2 \times S^1 - G = A^+ \cup A^-$  であり、 $A^+$  と  $A^-$  は  $\mathcal{I}_M$  で貼り合せて  $L_1$  の唯一の 2-cell に重なっていく。そこで、その 2-cell を  $e^2 \approx D^2$ , attaching map を  $g: \partial e^2 \rightarrow L_1^{(1)} = \infty$  として、 $L_1 = L_1^{(1)} \cup_g e^2$  とおくと次の図式を commute するように  $f^\pm: e^2 \rightarrow \bar{A}^\pm$  を定義できる。

$$\begin{array}{ccc}
 \partial D^2 \times S^1 \supset \bar{A}^+ & \begin{array}{c} \xleftarrow{f^+} \\ \searrow \\ \xrightarrow{f^-} \end{array} & e^2 \\
 & \text{inclusion} & \downarrow \\
 & & \bar{A}^- \subset \partial D^2 \times S^1 \\
 & \swarrow \mathcal{I}_M & \searrow \mathcal{I}_M \\
 & & L_1
 \end{array}
 \quad \text{図 3.}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 \partial e^2 & \begin{array}{c} \xleftarrow{f^+} \\ \searrow \\ \xrightarrow{f^-} \end{array} & \\
 & \text{inclusion} & \downarrow \\
 & & \bar{A}^- \subset G \\
 & \swarrow \mathcal{I}_M & \searrow \mathcal{I}_M \\
 & & L_1^{(1)}
 \end{array}$$

さらに  $D^2 \times S^1$  上の同値関係  $\sim$  を

$$(*) : x^+ \in \bar{A}^+, x^- \in \bar{A}^-, \exists x \in e^2, f^+(x) = x^+, f^-(x) = x^- \Leftrightarrow x^+ \sim x^-$$

を満す最弱のものと定義すると  $D^2 \times S^1 / \sim$  と  $M^3$  が同相になり、 $\mathcal{I}_M$  は射影  $D^2 \times S^1 \rightarrow D^2 \times S^1 / \sim = M^3$  と一致して  $\mathcal{I}_M(\partial D^2 \times S^1) = L_1$ ,  $\mathcal{I}_M(G) = L_1^{(1)}$  となるようにできる。したがって、 $\mathcal{I}_M$  と  $L_1$  を忘れても、 $G \subset \partial D^2 \times S^1$  と  $(f^+, f^-)$  だけ覚えておけば  $M^3$  を再構成できることになる。そこで  $\langle G \subset \partial D^2 \times S^1, (f^+, f^-) \rangle$  を  $M^3$  の  $D^2 \times S^1$  への展開の表示と呼ぶことにする。

Table 1. ではこの表示を具体的に図で表現してある。  $G \subset \partial D^2 \times S^1$

は  $\text{torus } \partial D^2 \times S^1$  を disk (長方形 or 六角形) に切り開いて描いてある。どの図も平行な対辺を同一視すれば torus になるが、そのとき  $m, n$  の添えられた矢印  $(\begin{smallmatrix} m \\ n \end{smallmatrix})$  が走っている部分が閉じて  $\pi_1(\text{torus}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  を生成する有向 loop になる。ここで  $m, n$  を  $[\partial D^2 \times 1] = (m, n) \in \pi_1(\text{torus})$  となる互いに素な整数であると決めれば  $G$  が単に torus に描かれているというのではなく、 $D^2 \times S^1$  の表面に乗っている様子を表現したことになる。一方、 $(f^+, f^-)$  は  $A^+$  と  $A^-$  のそれぞれの周  $\overline{A^+} - A^+$  に沿って走る2つの閉じた矢印  $\bigcirc$  で表現してある。  $f^\pm: \text{Int } e^2 \rightarrow A^\pm$  は homeo であるから、 $f^\pm$  は  $f^\pm|_{\partial e^2}$  だけで決まると言ってもよい。そこで、 $\partial e^2 = \bigcirc$  と考えて  $f^\pm$  によるそれぞれの行き先を書き込んである。

さらに Table 1. では  $G$  の edge は  $\uparrow$ ,  $\downarrow$  で置き換えられている。これはその edge が  $\mathcal{S}_M$  で  $L_i^{(1)} = \bigcirc$  のどちらの  $S^1$  にどの向きで重なっていくのかを識別するためのものである。これによって  $e^2$  の  $L_i^{(1)}$  への attach の仕方、即ち  $g: \partial e^2 \rightarrow L_i^{(1)}$  が分かるから  $\pi_1(M^3)$  の表示を与えることができる。それぞれに記されている基本群の表示の2つの relator は  $\uparrow$  を  $a$ ,  $\downarrow$  を  $b$  として  $A^+$  の周 ( $A^-$  の周でも同じ) と  $[\partial D^2 \times 1] = (m, n)$  を表わす  $G$  上の閉曲線に沿って読んでいったものである。これが実際に  $\pi_1(M^3)$  の表示を与えていることは §2 の議論から容易に分かるだろう。



## §4 拾い上げ

ここまでの議論は専ら  $M^3$  からその表示を作ることだった。Table 1. を完成するには逆にそのような表示  $\langle G \subset \partial D^3 \times S^1, (f^+, f^-) \rangle$  全体の中から 3-manifold を与えるものだけ拾い出すことを考えなくてはならない。そこで、まず無限個の異なる表示を有限個の類に分類することから始めよう。

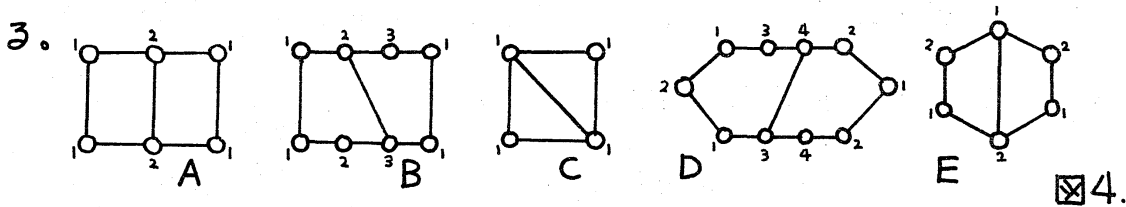
オイラー数を計算すると分かることだが、§3の(\*)から  $D^3 \times S^1$  上の同値関係  $\sim$  を定義したとき、 $D^3 \times S^1 / \sim$  が genus 2 の Heegaard 分解を持つ 3-manifold になるための必要十分条件は  $G / \sim$  の 1次元バッチ数が  $\beta_1(G / \sim) = 2$  となることである。が、§2の議論から、 $G / \sim = \infty$  となる表示を“正系”と呼ぶことにして、正系の拾い上げだけ考えればよい。ここで重要なのは  $G$  と  $(f^+|_{\partial e}, f^-|_{\partial e})$  だけを注目していれば表示が正系かどうか判定できるということである。つまり  $\text{torus} = \partial D^3 \times S^1$  という framing は忘れてしまってもよい、即ち §3 で述べたパラメーター  $(m, n)$  は正系の判定には無関係ということである。

そこで、 $G \subset \partial D^3 \times S^1$  を

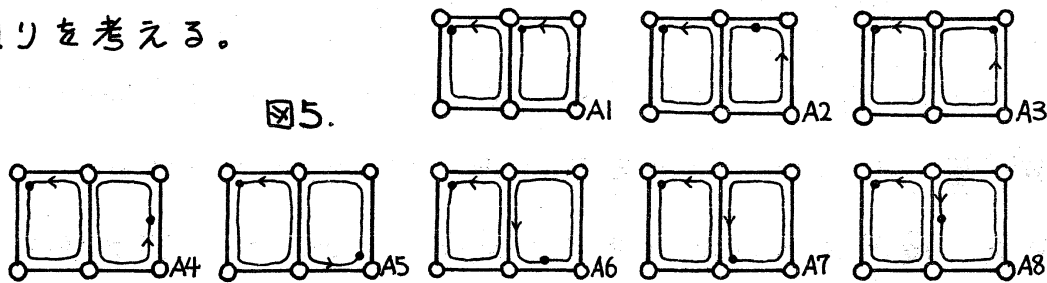
$$G_1 \approx G_2 \Leftrightarrow \exists h: \partial D^3 \times S^1 \rightarrow \partial D^3 \times S^1: h \text{ homeo s.t. } h(G_1) = G_2$$

で定義される同値関係  $\approx$  で分類してみる。ただし、 $G$  が degree 1 の vertex を持っていると同じ空間を定めるより“小さな” graph を持った表示が作れるので、 $G$  のすべての vertex の degree は

2以上とする。  $A^+$  と  $A^-$  の周の長さ (周に沿って数えた edge の本数) が等しくないとき  $(f^+, f^-)$  で重ならないからそういうものも除いてやると, 2つの face を持つように torus に embed された  $G$  は以下の  $A \sim E$  (平行な対辺を同一視せよ) に分類される。 Table 1 の  $A \sim E$  はこの  $A \sim E$  に対応しているが, 以後の処理で  $C$  からは正系を作れないことが分かるので抜けている。



$(f^+, f^-)$  は  $\bullet (\in \partial e^2 = \mathbb{Q})$  の行き先の相対関係が重要だから,  $f^+$  を固定して  $f^-(\bullet)$  の位置で分類する。たとえば  $A$  の場合は次の 8通りを考える。



今は non-orientable の場合だから  $(f^+, f^-)$  は上図の様に同調する向きを持っているが, orientable の場合は互いに逆向きにすればよい。

かくして  $A \sim E$  通して 44個の代表元が勢揃いする。後はそれらを組み立てて  $\infty$  になっていく様子を調べていく。そのとき代表元  $X = \langle G_x, (f_x^+, f_x^-) \rangle$  の  $G_x$  の edge は任意に細分されたも

のを代表していることに注意しなければならない。

いろいろな  $G_X$  を統一的に扱うために、第1段階の処理として  $G_X$  の vertex (0) と  $\bullet$  の打たれている所をすべて1点  $o$  に同一視する。そもそも、それらは  $X$  が代表する正系に於ては1点になるべきものである。すると  $X$  は  $o$  で交わる  $k$  個の loop  $L_i$  ( $i=1, \dots, k$ ) と  $(f_x^+, f_x^-)$  に対応して  $\bigcup_{i=1}^k L_i$  上を走る2本の矢印  $\alpha^+$ ,  $\alpha^-$  からなるパターン  $\mathcal{P} = \langle \bigcup_{i=1}^k L_i, (\alpha^+, \alpha^-) \rangle$  に変形される。たとえば  $X=A_2$  のときは図6のとおりである。

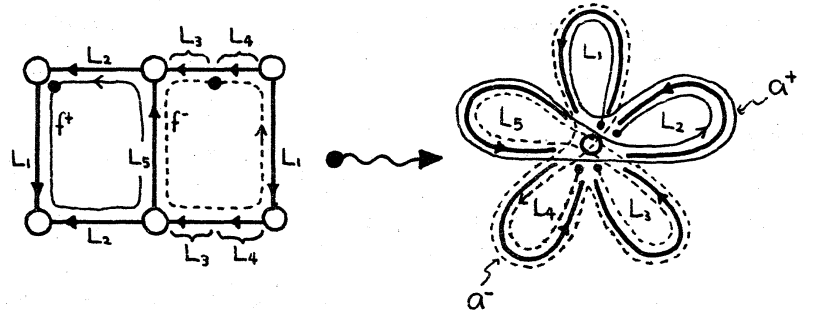



図6.

次に loop  $L_i$  たちを貼り合わせていく。その基本操作は、先程注意したように  $L_i$  は任意に細分されたものを代表しているから、図7に示される4つの操作 CS, EQ, LT, GT を考える必要がある。CS は  $\alpha^+$  と  $\alpha^-$  の最初の部分が1つの  $L_i$  を同じ向きに通過する場合で、すでに  $\alpha^+$  と  $\alpha^-$  が重なっているから何もする必要はない。ただ、“ここは貼った” という意味でその部分の矢印をひっ込めて短くしたものを改めて  $\alpha^+$ ,  $\alpha^-$  としてやる。 $\alpha^+$  と  $\alpha^-$  が  $L_i$  を互いに逆向きに通るときは  $L_i$  が  になってしまうから最後に  $\infty$  が得られないので考えない。EQ は  $\alpha^+$

と  $\alpha$  がそれぞれ異なる loop  $L_i, L_j$  を通過する場合であるが、特に  $L_i$  と  $L_j$  が同じ個数の vertex で細分されていたと想定しての操作である。このときはただ  $L_j$  を  $L_i$  に重ねて  $\alpha^+, \alpha^-$  を縮めてやる。LT は  $L_j$  の方が  $L_i$  より細かく細分されている場合で、 $L_i$  は  $L_j$  の一部と同一視されなければならない。そこで、 $L_j$  をくびらせてその部分を  $L_i$  に重ねてやる。GT はその逆で  $L_i$  の方が  $L_j$  より“長い”ときである。

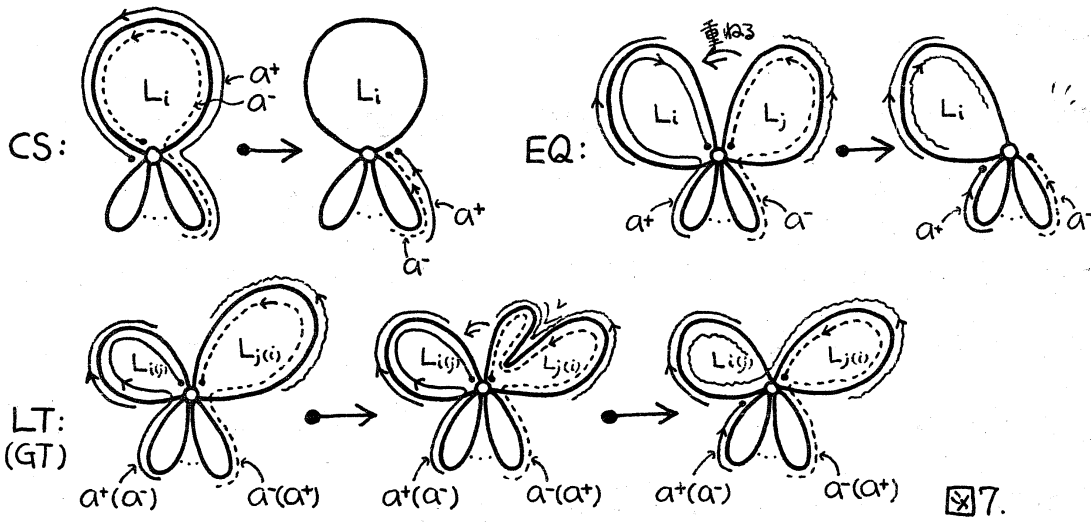


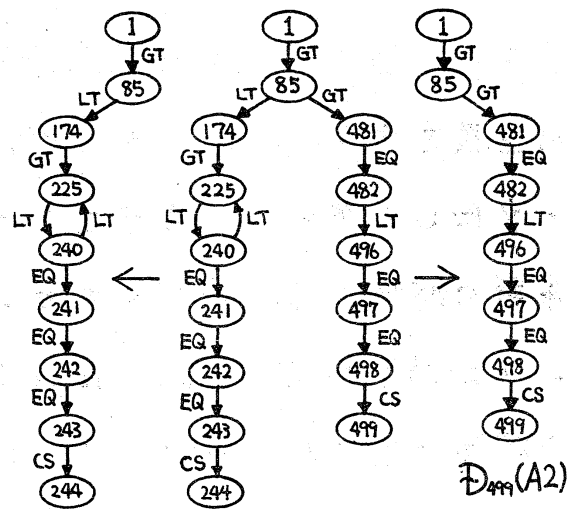
図7.

もし  $X$  の類が正系を含むならば、それに対応して  $\mathcal{P}$  を  $\infty$  に変形していく CS ~ GT の操作の列が存在することは明らかだろう。が、一般にはその逆、つまりそのような列が存在すればそれに対応した正系があるということはいえない。というのは、正系でないと  $G$  の vertex がすべて 1 点に同一視されるという保障がないから第 1 段階の処理をして CS ~ GT で貼り合せてできたものと  $G/\sim$  とが異なる可能性があるからである。と

ところが、今回の結果に限れば両者の差異はなかった。 $\mathcal{P}_i$  から  $\infty$  に至る操作の列を逆にたどって  $\circ$  に重なっていた部分に vertex を設けながら loop をはがしていけば一意に  $G_X$  の細分が与えられるから、議論を簡単にするために torus の framing を制御するパラメータ  $(m, n)$  の違いを除いて正系とそういう操作の列とは 1 対 1 に対応すると考えてしまうことにする。

そこで、第 2 段階の処理として  $\mathcal{P}_i$  を  $\infty$  に変形していく任意の操作の列を有向路として含む有向 graph  $\mathcal{D}(X)$  を次のように構成する。まず、 $\circ$  で交わる高々長個の loop  $L_{i_\ell}$  ( $\ell=1, \dots, p$ ) と  $\bigcup_{\ell=1}^p L_{i_\ell}$  上を走る 2 本の矢印  $\alpha^+$ ,  $\alpha^-$  とからなるパターン全体  $\{\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_x\}$  を vertex set とし、 $\mathcal{P}_i$  から  $\mathcal{P}_j$  へ操作  $OP (= CS, EQ, LT, GT)$  で移れるとき  $\mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}_j$  とし得られる 4 種類の arc を持った有向 graph  $\mathcal{D}_R$  を考える。もちろん  $\mathcal{D}_R$  は有限である。 $\mathcal{D}_R$  の sink ( $\downarrow$ ) は  $CS \sim GT$  を施せないおかしなパターンか、 $(\alpha^+, \alpha^-)$  がなくなった貼り合わせ終了のパターンである。このとき、 $\mathcal{P}_i$  から後者でちょうど 2 個の loop からなる任意のパターンに至るすべての有向路 (同じ所を何回通ってもよい) を含む  $\mathcal{D}_R$  の最小の部分有向 graph を  $\mathcal{D}(X)$  とする。すると、 $\mathcal{D}(X)$  の source ( $\uparrow$ ) は  $\mathcal{P}_i$  のみで、sink  $\mathcal{P}_{s_1}, \dots, \mathcal{P}_{s_x}$  はどれも  $(L_{i_1} \circ L_{i_2})$  という形になっている。また、 $\mathcal{P}_i$  から  $\mathcal{P}_{s_i}$  ( $i=1, \dots, x$ ) へ至る任意の有向路が  $X$  の類に含まれる正系にもれなく対応している。

$\mathcal{D}(X)$ の数学的定義は簡単であるが、実際にそれを構成するのはおそらく人力では不可能だろう。となれば当然コンピューターのお世話になるわけだが、それでも結構時間がかかる。A2



から右図中央の $\mathcal{D}(A2)$ を得るのにも30分はかかっている。

$\mathcal{D}_{244}(A2)$

$\mathcal{D}(A2)$

$\mathcal{D}_{499}(A2)$

図8.

それにもめげず44個の $X$ に対して $\mathcal{D}(X)$ を構成してみると18個を除いてすべて空になってしまった。つまり、それらの類には正系が存在しなかったのである。特にCのタイプ $^0$ は皆無だった。

第3段階の処理は $\mathcal{D}(X)$ をsource と sink をそれぞれ1個ずつ持つ有向graph  $\mathcal{D}_{s_1}(X), \dots, \mathcal{D}_{s_x}(X)$  に分解することである。ただし $\mathcal{D}_{s_i}(X) (i=1, \dots, x)$  は $\mathcal{P}$  から  $\mathcal{P}_{s_i}$  へ至る有向路をすべて含む $\mathcal{D}(X)$ の最小の部分有向graphである。A2の例では $\mathcal{D}(A2)$ は図8の左右の $\mathcal{D}_{244}(A2)$ と $\mathcal{D}_{499}(A2)$ に分解される。この処理で18個の $\mathcal{D}(X)$ は分解されて再び44個(!?)になった。

あとは各 $\mathcal{D}_{s_i}(X)$  に封じ込められている正系を把握して整理すればTable 1.が完成する。 $\mathcal{D}_{499}(A2)$ はただの1本道だから容易

に唯一の正系を見出すことができる。それが Table 1. の  $A(m, n)$  である。  $\mathcal{D}_{240}(A2)$  の方は  $(225) \rightarrow (240)$  の cycle があるから無限に多くの正系を含んでいる。そこで、この cycle を回る回数をパラメータにしてそれらの表示を 1 つにまとめ上げてやる。が、基本群の評価からそのどれもが irreducible 3-manifold を与えないことが分かるので、Table 1. には載っていない。一般には  $\mathcal{D}_{5i}(X)$  の構造はもう少し複雑なのだが、適当にパラメータを定めて表示をまとめることができた。最後に基本群から irreducible でないと断言するのが困難な 11 個の中から  $P^2 \times S^1$  になるための十分条件を満すものと容易に他に帰着できるものを除いて、具体的な“絵”にしたのが Table 1. である。

したがって、Table 1. に  $P^2 \times S^1$  と irreducible でないものを添えれば genus 2 の non-orientable 3-manifold をもれなく拾い上げたことになる。

## §5 展望

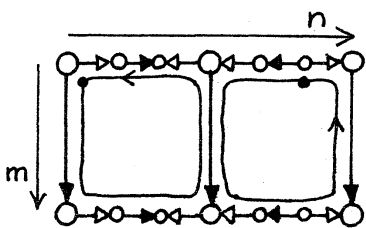
この手法を orientable genus 2 に適用するにはほとんど修正する必要はない。というのは  $\mathcal{D}(X)$  を構成する手順は完全に組合せ的で 3-manifold の orientability など全く無関係だからである。実際、今回使用したのと同じプログラムを動かして“定理 2”を作ることができるはずである。genus が高くなっても  $(f, f)$

の組が多くなるだけで論理的拡張は容易にできる。が、 $\mathcal{D}(X)$ を構成するプログラムを組むのが少々厄介になる。それはわかりか実行時間が恐しく長くなるだろう。もちろん有限終了することは保証されているが、100年かかるかもしれないプログラムを安易に実行するわけにもいかないのである...

いずれにせよ、当面の目標はTable 1.のリストをより見やすい表現、たとえばlinkのDehn surgeryなどに直して、重複をなくすか、同相性の判定法を編み出すことだろう。

★ Table 1. (genus 2 の non-orientable 3-manifolds)

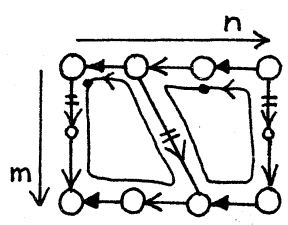
●  $A(m, n)$



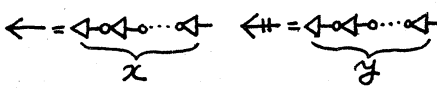
$(m, n) = 1$

$$\pi_1(A(m, n)) = \langle a, b \mid abab^{-1}a^{-1}ba^{-1}b^{-1} = a^m (bab^{-2}a^{-1}b)^n = 1 \rangle$$

●  $B(x, y; m, n)$

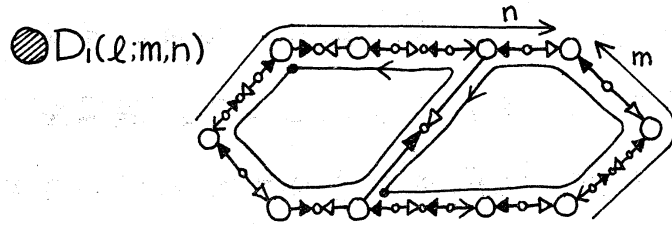


$x, y \geq 1$   $(x, y) = 1, (m, n) = 1$

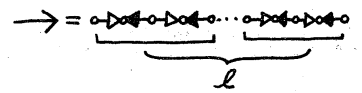


$$\pi_1(B(x, y; m, n)) = \langle a, b \mid b^{x+y} a^{-1} b^{-(x+y)} a = b^{m(x+y)} (a^{-1} b^{(x+y)} a^{-1})^n = 1 \rangle$$

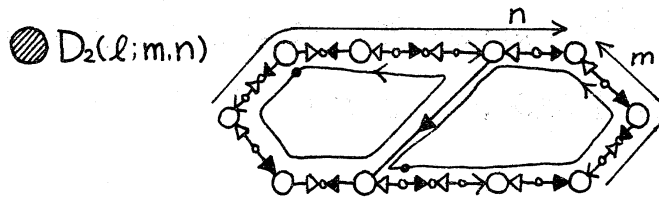




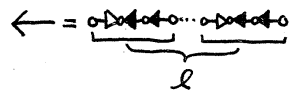
$l \geq 0, (m, n) = 1$



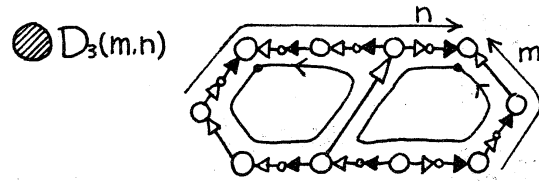
$$\pi_1(D_1(l; m, n)) = \langle a, b \mid a^{-1}(ba^{-1})^{2l+1}a^{-1}b(ab^{-1})^{2l+3}aba^{-1} \\ = [(ab^{-1})^{2l+2}a]^m \times [(ab^{-1})^{2l+1}a^{-1}b^{-1}a^{-1}(ba^{-1})^{2l+1}a^{-1}b]^n = 1 \rangle$$



$l \geq 0, (m, n) = 1$

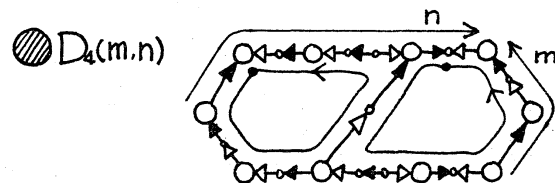


$$\pi_1(D_2(l; m, n)) = \langle a, b \mid ab^{-1}(a^2b^{-1})^l b^{-1}a(ba^{-2})^{l+1}ba^{-1}bab^{-1} \\ = [(ba^{-2})^{l+1}b]^m \times [(ba^{-2})^l ba^{-1}b^{-1}b^{-1}a^{-1}b^{-1}(a^2b^{-1})^l b^{-1}a]^n = 1 \rangle$$



$(m, n) = 1$

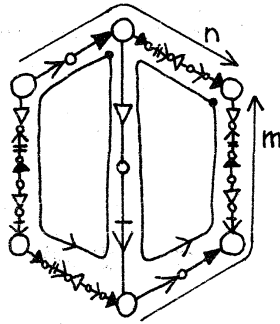
$$\pi_1(D_3(m, n)) = \langle a, b \mid a^{-1}b^{-3}a^{-1}babab = (bab)^m \times (bab^{-1}b^{-1}a^{-1}ba)^n = 1 \rangle$$



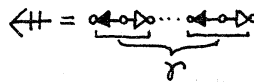
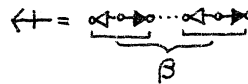
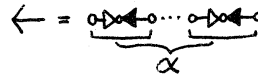
$(m, n) = 1$

$$\pi_1(D_4(m, n)) = \langle a, b \mid a^{-2}b^{-2}a^{-1}bab^{-1}bab = (aba)^m \times (aba^{-1}b^{-1}bab^{-1})^n = 1 \rangle$$

●  $E(\alpha, \beta, \gamma; m, n)$

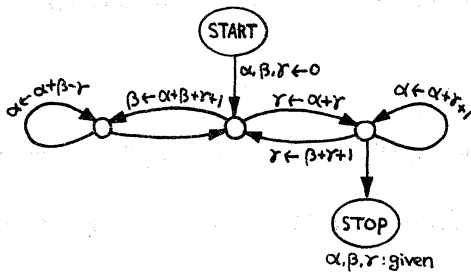


$(\alpha, \beta, \gamma)$ : admissible,  $(m, n) = 1$



$\pi_1(E(\alpha, \beta, \gamma; m, n))$

$$= \langle a, b \mid (a^{-1}b)^{\alpha+\beta+\gamma+2} (ab^{-1})^{\alpha+\beta+\gamma+2} = (ab^{-1})^{m(\alpha+\beta+\gamma+2)} [(ab^{-1})^{\alpha} a^2 (ba)^{\alpha+\gamma+1}]^n = 1 \rangle$$



admissible な  $(\alpha, \beta, \gamma)$  は

左の graph を START から  $\rightarrow$  に沿って

その指示に従いながら 任意に STOP

までたどれば与えられる。



参考文献

- [1] J. Hempel, 3-manifolds, Ann. of Math. Studies 86, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1976.
- [2] Y. Tao, "On fixed point free involutions of  $S^1 \times S^2$ ," Osaka Math. J. 14 (1962), 145-152.
- [3] W. Haken, "Some results on surfaces in 3-manifolds," Studies in Modern Topology, Math. Assoc. Amer., distributed by Prentice Hall (1968), 34-98.