数理解析研究所講究録
417巻 1981年 9-27

On Heegaard diagrams of S^3

筑波大 数学系　金戸 武司

0. 序

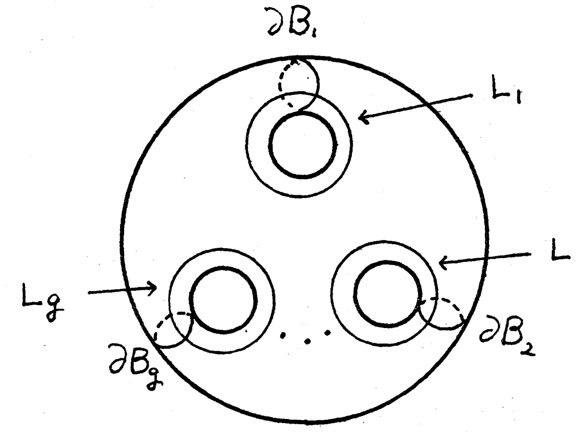
二つの話題について述べる。最初に，S^3のHeegaard diagramによる基本群の表示に関する一つのreduction theoremを一般の種数について示し，これを種数2の場合に適用して，relatorsの相互代入による表示の簡略化の可能性（c.f. [3], [4], [5]）についての現状を報告する。

次に，相互代入は代数的（or homotopy的な）性質であるが，直接，diagramを幾何的に簡略化する手法として，wave（[10], [1] or cut-vertex in [11]）の概念がある。両者の関係について，種数3以上では互に独立であることを例によって示す。

1. a reduction theorem

Mを向き付け可能な3次元閉多様体，Tを種数gの

solid torus，∂T をその境界とする。T の標準的な longitudinal system 及び meridian system を，それぞれ，$\mathcal{A}=\{L_1,\cdots,L_g\}$，$\mathcal{B}=\{\partial B_1,\cdots\partial B_g\}$ とする。（下図参考）



T

$D=(\partial T;\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2)$ を M（を表わす一つ）の Heegaard diagram（正確な定義は [1] 参照）とする。$\mathcal{C}_2$ の各 loop に沿って $\mathcal{C}_1$ の各 loop との交わりを順に読み取って得られる $\pi_1(M)$ の表示を $\pi_1(D)=\langle a_1,\cdots,a_g;r_1,\cdots,r_g\rangle$ とする。各 relator r_i は文字 $a_1^{\pm},\cdots,a_g^{\pm}$ による word である。r_i の cyclically reduced form を $\hat{r}_i$ とする。（i.e. $\hat{r}_i$ はどんな cyclic permutation を施しても $a_j a_j^{-1}$ or $a_j^{-1}a_j$ のような

部分を含まない。) $\pi_1(D)$ の cyclically reduced form, i.e. $\langle a_1, \dots, a_g ; \hat{r}_1, \dots, \hat{r}_g \rangle$ を $\hat{\pi}_1(D)$ と書くことにする。

定理1. S^3の任意のHeegaard diagram $D = (\partial T ; \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2)$に対し, S^3のHeegaard diagram D_0で次を満たすものが存在する:

(1) $D_0 = (\partial T ; \mathfrak{b}, \varphi_0 h \mathfrak{b})$ ($\equiv (\partial T ; h^{-1}\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$, $\equiv$は同値の意), ここにφ_0はS^3の標準的なHeegaard sewing, i.e. ∂T上の向きを保つhomeomorphismで$\varphi_0(\partial B_i) = L_i$, 又, hはT上の向きを保つhomeomorphism。

(2) $\hat{\pi}_1(D_0) \equiv \hat{\pi}_1(D)$, ここに, $\equiv$はrelatorsのcyclic permutation及びinversionによる違いを除いて等しいの意。

注。一般にS^3のHeegaard diagram Dは同値なdiagram $\varphi D = (\partial T ; \varphi \mathfrak{C}_1, \varphi \mathfrak{C}_2)$ (φは∂T上の向きを保つhomeomorphism)で, $\varphi D = (\partial T ; \mathfrak{b}, g \varphi_0 f \mathfrak{b})$ …①
(f, gはT上の向きを保つhomeomorphism)の形

に出来る（Waldhausen）。定理1の主張は「cyclically reduced presentation $\widehat{\pi}_1(D)$を考える上では，①において，更に，$g=1$として良い」ということである。

定理の証明のため，命題を一つ用意する。

命題．DをHeegaard diagram $(\partial T;\mathcal{B},\mathcal{C})$とし，cyclically reduced presentation $\widehat{\pi}_1(D) = \langle a_1,\cdots,a_g;\widehat{r}_1,\cdots,\widehat{r}_g\rangle$の各relator $\widehat{r}_i$を表わすwordを$W_i(a_1,\cdots,a_g)$とする。このとき，任意の向きを保つhomeomorphism $g:T\to T$によって得られるHeegaard diagram $D_1=(\partial T;\mathcal{B}, g\mathcal{C})$に対し，そのcyclically reduced presentation $\widehat{\pi}_1(D_1)$は$\langle a_1,\cdots,a_g;\widehat{r}_1',\cdots,\widehat{r}_g'\rangle$（ここに，$r_i' = W_i(g_\#(a_1),\cdots,g_\#(a_g))$，但し，$g_\#$は$\pi_1(T)=\langle a_1,\cdots,a_g\rangle$上のinduced isomorphism）で与えられる。

証明．$\widehat{\pi}_1(D_1)$の定義より，直接，導かれる（c.f.［3］，［4］）。

定理1の証明．

注より，$D=(\partial T;\mathcal{B}, g\varphi_0 f\mathcal{B})$としてよい。

Suzuki [9] により，g は S-generators (i.e. $\{\rho^{\pm}, \omega_1^{\pm}, \rho_{12}^{\pm}, \tau_1^{\pm}, \theta_{12}^{\pm}, \xi_{12}^{\pm}\}$ cf. [9]) の積 $g_n \cdots g_1$ と isotopic。cyclically reduced presentation は isotopy invariant だから，

$$\widehat{\pi}_1(D) \equiv \widehat{\pi}_1((\partial T;\ \mathcal{B},\ g_n \cdots g_1 \varphi_0 f\, \mathcal{B}))$$

ここで，$\tau_{1\,\#}^{\pm} = 1$，$\xi_{12\,\#}^{\pm} = 1$ に注意すれば，前命題より，$g_n, \cdots, g_1$ には $\tau_1^{\pm}$，$\xi_{12}^{\pm}$ は含まれていないとしてよい。i.e. $g_n, \cdots, g_1 \in \{\rho^{\pm}, \omega_1^{\pm}, \rho_{12}^{\pm}, \theta_{12}^{\pm}\}$
従って，$\varphi_0^{-1} g_n \cdots g_1 \varphi_0 : \partial T \to \partial T$ は T 上の向きを保つ homeomorphism $g' : T \to T$ に拡張できる。なぜなら，各 $\varphi_0^{-1} g_i \varphi_0$ が拡張可能だから。（より幾何的には，T が S^3 に標準的に埋め込まれているとすると，g_i は S^3 上の homeomorphism に拡張できることに対応する。）よって，

$$\begin{aligned} g_n \cdots g_1 \varphi_0 f &= \varphi_0 (\varphi_0^{-1} g_n \cdots g_1 \varphi_0) f \\ &= \varphi_0\, g' f \end{aligned}$$

となり，$h = g'f$ をうる。

参考。定理1は [5] の最後で，「問題2から問題1はそう遠くないように思われる」と述べたことが正しいことを意味している。

2. S^3の種数2のHeegaard diagramsへの応用

定義. words W_1, W_1', W_2 が $W_1 = W_1'W_2$ を満たすとき, $\{W_1, W_2\}$ は 代入 により $\{W_1', W_2\}$ に変形できるといい, $\{W_1, W_2\} \xrightarrow{S} \{W_1', W_2\}$ と書く.

次の問題(cf. [4], [5])を考える。

問題。 S^3の任意の種数2のHeegaard diagram D による cyclically reduced presentation $\widehat{\pi}_1(D) = \langle a_1, a_2 ; \widehat{r}_1, \widehat{r}_2 \rangle = \langle a_1, a_2 ; W_1, W_2 \rangle$ (ここに, $\{\widehat{r}_1, \widehat{r}_2\} = \{W_1, W_2\}$) に対し, 代入 $\{W_1, W_2\} \xrightarrow{S} \{W_1', W_2\}$ で次を満たすものが存在するか?

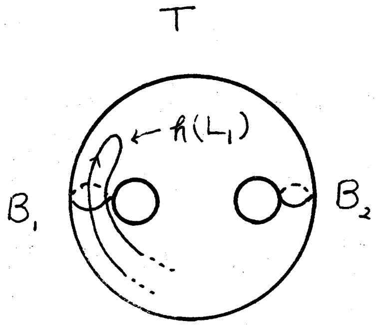
(*) $\{W_1', W_2\}$ の cyclically reduced form $\{\widehat{W_1'}, W_2\}$ は ある S^3 の Heegaard diagram D_1 の cyclically reduced presentation $\widehat{\pi}_1(D_1) = \langle a_1, a_2 ; \widehat{r}_1', \widehat{r}_2' \rangle$ の set of relators $\{\widehat{r}_1', \widehat{r}_2'\}$ に対応する。

注。肯定的な解決は「S^3の種数2のHeegaard diagramによる基本群の表示は, cyclic reduction

, cyclic permutation, inversion 及び代入の繰り返しにより, trivial presentation $\langle a_1, a_2; a_1, a_2 \rangle$ に変形できる。」(cf. [4]) を含む。

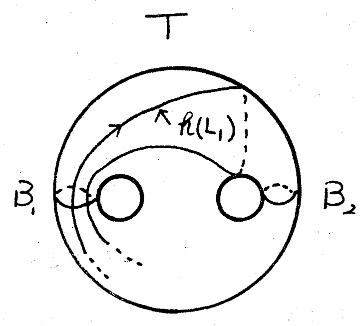
以下, この問題に対する現状を述べる。

定理1より, 一般の場合 $(\partial T;\, b,\, g\varphi_0 f\, b)$ が特別の場合 $(\partial T;\, ha,\, b)$ (= D とおく。) に帰着された。これは, 更に, loop $h(L_i)$ $(i=1,2)$ に沿って, B_1, B_2 との交わりを読んで得られる word $W(h(L_i)) = W_i(b_1, b_2)$ ($W_i(b_1,b_2)$ は文字 $b_1^{\pm}, b_2^{\pm}$ による word。i.e. $\pi_1(D)$ をうるとき b の各 loop に沿って読むのと区別して, $h(b)$ の各 loop に沿って読む場合, 文字 $a_1^{\pm}, a_2^{\pm}$ に代えて, 文字 $b_1^{\pm}, b_2^{\pm}$ を用いることにする。) の様子によって, 次の二つの場合に分けられる。まず, $W(h(L_i))$ には isotopy で除ける annihilation part ($b_j b_j^{-1}$ or $b_j^{-1} b_j$, 及び cyclic sense で $b_j \cdots b_j^{-1}$, $b_j^{-1} \cdots b_j$, cf. 下図) は含まないものとする。(isotopy による変形は cyclically reduced presentation $\pi_1(D)$ に影響を与えない。)



isotopy で除けるannihilation part $b_1 b_1^{-1}$ を含む

(この場合ははじめから除外する)



isotopy では除けない annihilation part $b_1 b_1^{-1}$ を含む

(この場合は起り得る)

Case 1. $W(h(L_1))$, $W(h(L_2))$ はどちらも annihilation part (cyclic sense で)を持たない, i.e. cyclically reduced である。

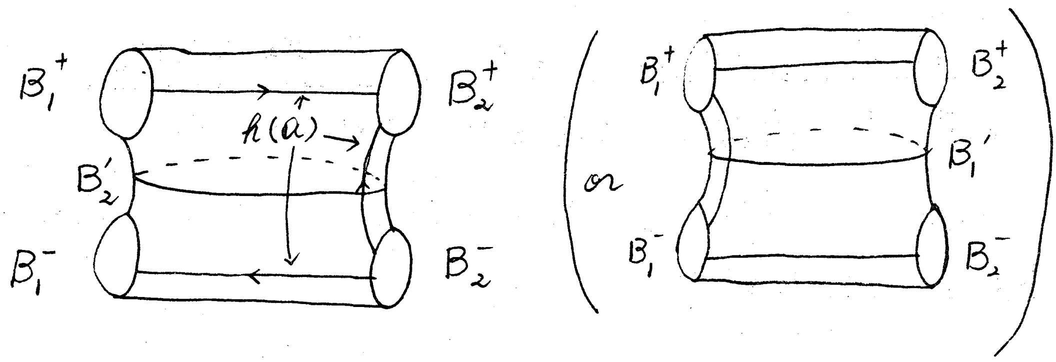
Case 2. $W(h(L_1))$, $W(h(L_2))$ は少なくとも一方が cyclically reduced でない。

<u>Case 1. について, 問題は肯定的に解決される。</u>

実際, [5]′ により, $\{W(h(L_1)), W(h(L_2))\}$ の cyclically reduced form は cyclic permutation と inversion の違いを除いて,

$$\{a_1 a_2^{\alpha_1} \cdots a_1 a_2^{\alpha_k},\ a_1 a_2^{\beta_1} \cdots a_1 a_2^{\beta_{k'}}\}$$

(又は, $\{a_1^{\alpha_1}a_2\cdots a_1^{\alpha_k}a_2,\ a_1^{\beta_1}a_2\cdots a_1^{\beta_{k'}}a_2\}$)
(ここに, すべての指数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\beta_1,\cdots,\beta_{k'}$ は 0 ではなく, 同附号をもつ.) と表わされる。今, $W(h(L_1))$, $W(h(L_2))$ はともに cyclically reduced だから, ∂T を $\mathfrak{b}$ で切り開いて得られる cut diagram ($\partial T-\mathfrak{b}$, $h\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$) は up to homeomorphism で, 下図の type となり, しかも, $\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\beta_1,$



(ここに, 図上の arc は一般には pararel な複数の arcs を表わしている.)

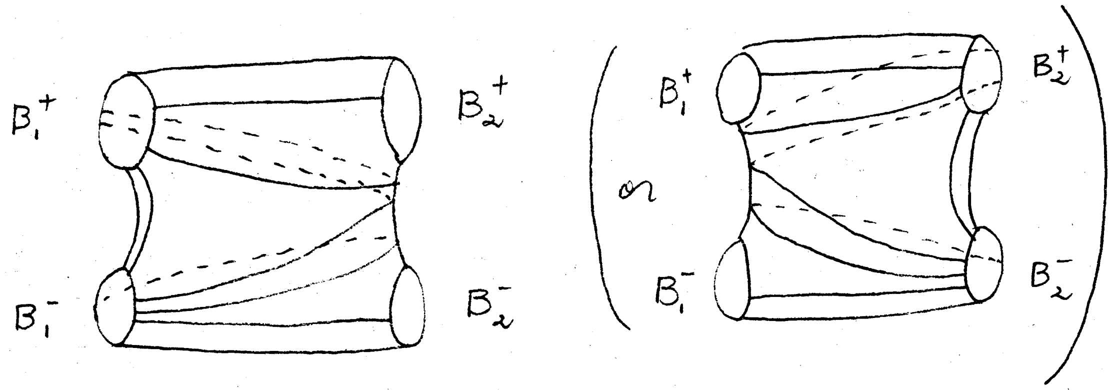
$\cdots,\beta_{k'}$ が同附号をもつことから, 図上の pararel arcs は同じ向きをもつ。従って, $\pi_1(D)=\langle a_1,a_2;\hat{r}_1,\hat{r}_2\rangle$ において, $\partial B_1,\partial B_2$ に沿った $h(\mathfrak{a})$ との交わりの読み r_1, r_2 はそれぞれ cyclically reduced i.e. $\hat{r}_1=r_1$, $\hat{r}_2=r_2$ で, 図より明らかに, r_1 は r_2 に (or, r_2 は r_1 に) 代入でき, 更に代入により縮小された word は図中に示めされた

, 新らたな meridian curve $\partial B_2'$ (or $\partial B_1'$) に沿った読みで得られるから, $D_1 = (\partial T;\ h(a), \{B_1, B_2'\})$ (or $= (\partial T;\ h(a), \{B_1', B_2\})$) が求める Heegaard diagram である。(D_1 もまた, case 1 であることに注意すれば, Case 1 では, 代入の繰り返しで, trivial presentation $\langle a_1, a_2; a_1, a_2\rangle$ に変形できることがわかる。)

Case 2. 現在のところ, 不明である。

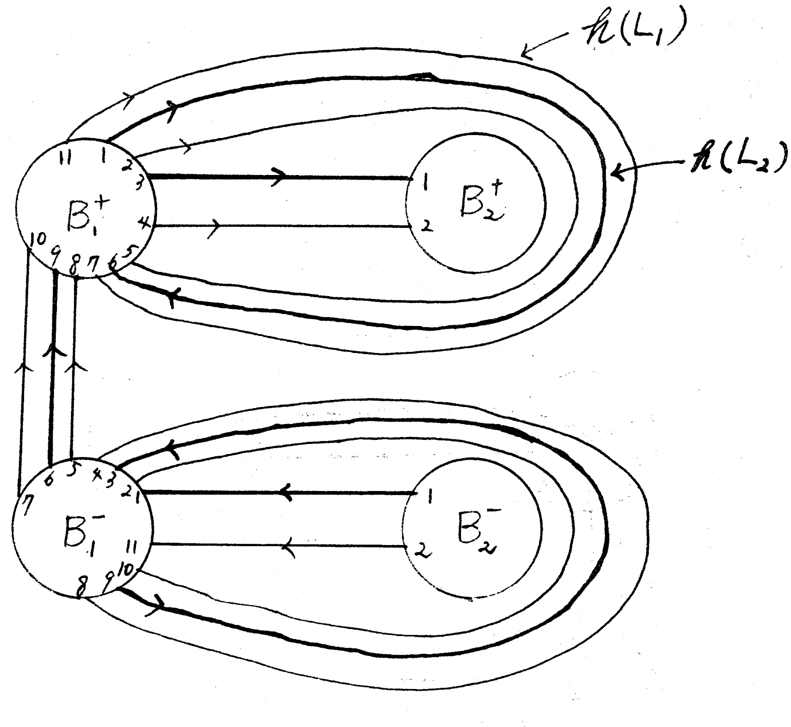
以下, その困難さの所在について触れておこう.

Case 1 と同様に, ∂B_1, ∂B_2 による cut diagram を示せば, 次の形である。



この場合の本質的な困難は case 1 と違って, pararel arcs が異なる向きをもち得ることにある。従って, ∂B_1, ∂B_2 に沿った読み r_1, r_2 は一般には, cyclically reduced ではなく，それ故，cut diagram から r_2 が r_1 (or r_1 が r_2) に代入可能は言えるが，cyclically reduced form $\hat{r}_1$，$\hat{r}_2$ については不明である。実際，次の例は「r_2 は r_1 に代入可能であるが，$\hat{r}_2$ は $\hat{r}_1$ に代入不能」である。(しかし，$\hat{r}_1$ は $\hat{r}_2$ に代入可能で，問題の反例ではない。)

例. 1. (S^3 について)



$$D = (\partial T\ ;\ h(\alpha),\ \beta)$$

$$\pi_1(D) = \langle a_1, a_2\ ;\ r_1, r_2 \rangle$$

$$r_1 = a_2 a_1 \underline{a_2 a_1} a_1^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1} a_1^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1} a_1$$

$$r_2 = a_2 a_1$$

$$\hat{r}_1 = a_1^{-1} \quad , \quad \hat{r}_2 = r_2 = a_2 a_1$$

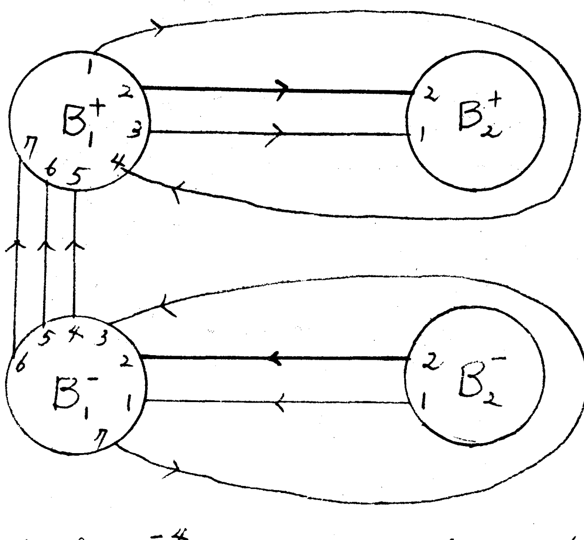
cut diagram から，明らかに，r_2 は r_1 に代入でき，

$$\{r_1, r_2\} \xrightarrow{S} \{a_2 a_1 a_1^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1} a_1^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1} a_1,\ a_2 a_1\}$$

であるが，$\hat{r}_2$ は $\hat{r}_1$ に subword として含まれない i.e 代入できない．

参考. S^3 の Heegaard diagram に限らなければ，complete words r_1, r_2 としてのみ代入可能で，cyclically reduced words $\hat{r}_1$, $\hat{r}_2$ としては相互代入が不可能な例がある。（次の例2.）

例2. （Lens space $L(3,1)$ について）



$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

$$r_1 = \underline{a_1 a_2} a_1 a_1^{-4} \ , \ r_2 = a_1 a_2 \ , \ \hat{r}_1 = a_1^{-2} a_2 \ , \ \hat{r}_2 = a_1 a_2$$

cut diagram から，r_2 は r_1 に代入でき，

$$\{r_1, r_2\} \xrightarrow{S} \{a_1 a_1^{-4}, a_1 a_2\}$$

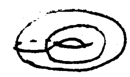
であるが，$\{\hat{r}_1, \hat{r}_2\}$ は相互代入不可。

3. wave と相互代入の独立性

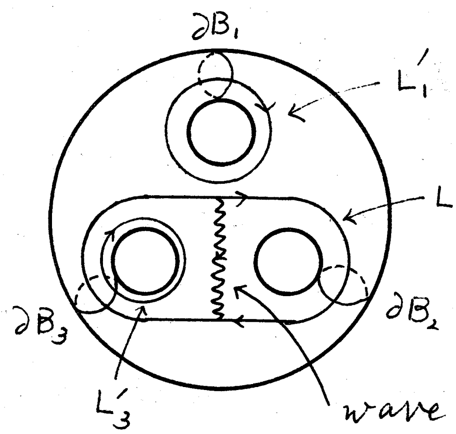
幾何的に Heegaard diagram の交点数を減らすような meridian curve の取り直しの簡単な方法として，「wave」(cf. [10] [1] or Whitehead graph における cut vertex [11]) の概念がある。S^3 の種数2の Heegaard diagrams については，交点数が3以上のとき，常に wave が存在する ([2]) が，種数3以上のときは，種数を越える交点数をもつ diagram で wave が存在しない例 ([12], [6], [8], [4]) が知られている。面白いことに，これらの例 ([4] を除く) はすべて，その cyclically reduced presentation の relators において相互代入が不能な例にもなっている。そこで，「wave がなければ，relators の相互代入は不能か」という自然な問題が生じた。より一般に，幾何的な概念，wave と代数的な概念，相互代入の間の関係が問われた。これについ

て，次を得た。

定理 2. S^3 の種数3以上のHeegaard diagramsにおいて，二つの概念 wave と相互代入は独立である。

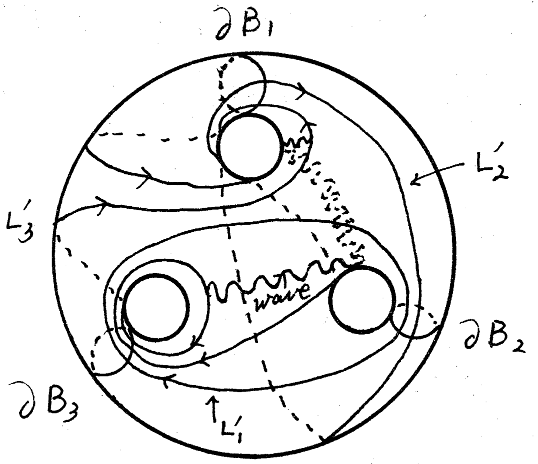
証明。以下の種数3の例によって示される。種数4以上については種数1の自明なdiagram  を connected sum すればよい。

例 3. wave が存在しかつ代入可能な例。



$r_1 = a_1$, $r_2 = a_2$, $r_3 = \underline{a_2}\, a_3$, r_2 は r_3 に代入可.

例 4. wave は存在するが代入不能な例.



∂B_iに沿った読み：

$r_1 = a_2 a_3^{-1}$　$(= \hat{r}_1)$

$r_2 = a_2 a_1$　$(= \hat{r}_2)$

$r_3 = a_1 a_3^2$　$(= \hat{r}_3)$

L_i'に沿った読み：

$r_1' = a_2 a_3$　$(= \hat{r}_1')$

$r_2' = a_1 a_2$　$(= \hat{r}_2')$

$r_3' = a_3^2 a_1^{-1}$　$(= \hat{r}_3')$

注。この diagram は $(\partial T; \mathcal{B}, g\mathcal{A})$ $(= (\partial T; \mathcal{B}, g\varphi_0\mathcal{B}))$（ここに，$g$ は T 上の向きを保つ homeomorphism）の type であり，種数2ではこの type による cyclically reduced presentation は，常に代入可能（[5]）であることと比較すると，一層，興味深い例である。

例5.　wave は存在しないが代入可能な例。（[4] の Example 3）

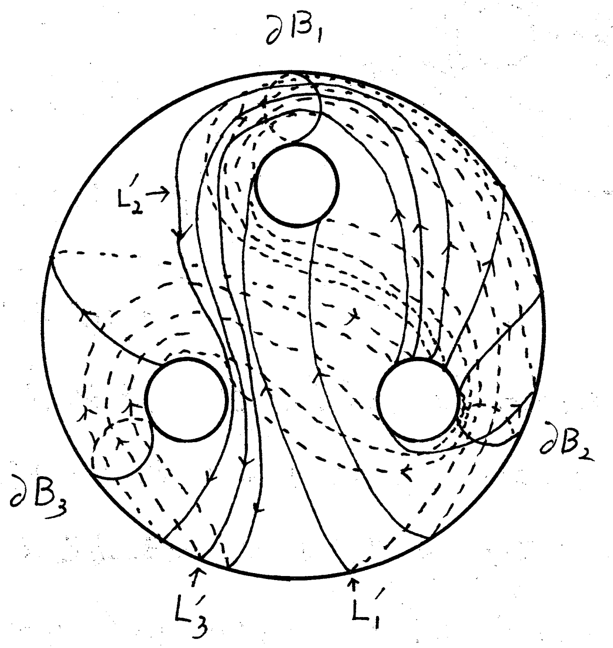
∂B_iに沿った読み：　$r_1 = a_3^{-1} a_2^{-1} a_1 a_3^{-1} a_2^{-3}$ $(= \hat{r}_1)$

$r_2 = a_3^{-1} a_2^{-1} a_3 a_1^2$ $(= \hat{r}_2)$，$r_3 = a_3 a_2^2$ $(= \hat{r}_3)$

r_3 に inversion と cyclic permutation を施せ

ば，$a_3^{-1}a_2^{-2}$ となり，r_1 に代入可能。

L_1' に沿った読み：$r_1' = a_1 a_2^2$ $(=\widehat{r_1'})$，$r_2' = a_3 a_1^{-1} a_3 a_2^{-1} a_1^{-3}$ $(=\widehat{r_2'})$，$r_3' = a_3 a_2^{-1} a_1^{-1} a_2 a_1^{-1}$ $(=\widehat{r_3'})$.
これらは相互代入不可。



例.6. wave は存在せず，かつ代入不能な例.
[12]，[7]（以上，種数3），[8]（種数4）の例がこの例にもなっている。

参考文献

[1]. J.S. Birman, Heegaard splittings, Diagrams and Sewings for closed

orientable 3-manifolds, Lecture notes for CBMS conference at Oct. 8~12, 1977.

[2] T. Homma, M. Ochiai and M. Takahashi; An algorithm for recognizing S^3 in 3-manifold with Heegaard splittings of genus two, (to appear)

[3] T. Kaneto, S^3の Heegaard 分解による π_1 の表示について, 数理研講究録 297 (1977), 69-84.

[4] ________, On presentations of the fundamental group of the 3-sphere associated with Heegaard diagrams, J. Math. Soc. Japan (To appear)

[5] ________, S^3の種数2の Heegaard diagrams に対応する基本群の表示について, 数理研講究録, 369 (1979), 144-163

[5]′ ________, A characterization of the special loops on a genus 2 solid torus, preprint.

[6] O. Morikawa, Poincaré 予想に関する

computer 実験（反例を求めて），数理研講究録 346 (1979), 29–58

[7] ________, A counterexample to a conjecture of Whitehead, Math. Sem. Notes Kobe Univ, (to appear)

[8] M. Ochiai, A counterexample to a conjecture of Whitehead and Volodin-Kuznetsov-Fomenko, J. Math. Soc. Japan, vol 31 (1979), 687–691

[9] S. Suzuki, On homeomorphisms of a 3-dimensional handlebody, Can. J. Math. 29 (1977), 111–124

[10] I. A. Volodin, V. E. Kuzunetsov and A. T. Fomenko, The problem of discriminating algorithmically the standard three-dimensional sphere, Russian Math. Surveys, 29 ; 5 (1974), 71–172

[11] J. H. C. Whitehead, On certain sets of elements in a free group, London Math. Soc (2) 41 (1936), 48–56

[12] O. Ja. Viro and Kobel'skii, V. L., The

Volodin-Kuznecov-Fomenko conjecture on Heegaard diagrams is false, Uspehi Mat. Nauk 32 (1977) no.5 (197), 175-176