数理解析研究所講究録
418巻 1981年 108-120

AR(1)モデルにおける推定量の漸近的比較

放射線影響研究所　疫学統計部
越智　義道

1. 序

1次の自己回帰モデル(AR(1))

$$X_t = \theta X_{t-1} + U_t \qquad t = \cdots, -1, 0, 1, \cdots \tag{1.1}$$

$|\theta| < 1$

$\{U_t\}$；互いに独立に正規分布$N(0, \sigma^2)$に従う確率変数列

からのn個の標本$X_1, X_2, \cdots, X_n$にもとづくパラメーターθの推定量としては，最小二乗推定量

$$\hat{\theta}_{LS} = \frac{\sum_{t=2}^{n} X_t X_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2} \tag{1.2}$$

および，この推定量の修正が考えられている。M. Akahira [2]，[3]はいくつかの条件のもとで2次の漸近有効推定量として，

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)\hat{\theta}_{LS} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\frac{\sum_{t=2}^{n} X_t X_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2} \tag{1.3}$$

を導出している．またT. W. Anderson [1]は上のモデルのもと

で，最大推定量の漸近的近似解を与えているが，ここではその漸近解を若干修正した推定量 $(1-\frac{1}{n})\hat{\theta}_{LS}$ を考える。

さらに，ここでは上記の3つの推定量を含む次の様な推定量の族

(1.4) $\hat{\theta}_c = (1+\frac{c}{n})\hat{\theta}_{LS}$，ただし，c は定数

を定義し，平均二乗誤差にもとづく漸近的挙動を調べる。

2. 偏りと平均二乗誤差

今 最小二乗推定量 $\hat{\theta}_{LS}$ と真の母数の値との差は

$$\theta_{LS} - \theta = \frac{\sum_{t=2}^{n} X_t X_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2} - \theta \tag{2.1}$$

$$= \frac{\sum_{t=2}^{n} X_t X_{t-1} - \theta \sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2}{\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2}$$

$$= \frac{\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}(X_t - \theta X_{t-1})}{\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2}$$

$$= \frac{\sum_{t=2}^{n} X_{t-1} U_t}{\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2}$$

と書ける。ここで

$$V = \frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1}^2 \tag{2.2}$$

$$W = \frac{1}{n}\sum_{t=2}^{n} X_{t-1} U_t \tag{2.3}$$

とおくと，nを無限大にするとき，Wは0に，Vは$\frac{\sigma^2}{1-\theta^2}$に確率収束し，$\sqrt{n}\,W$，$\sqrt{n}\,V$はそれぞれ平均0，$\frac{\sigma^2}{1-\theta^2}$を持つ正規分布を持つ確率変数に法則収束することが示される（Anderson [1]）従ってさらに

$$(2.4) \qquad \widetilde{W} = \sqrt{n}\,W$$

$$(2.5) \qquad \widetilde{V} = \left(\frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\right)^{-1} \sqrt{n}\left(V - \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\right)$$

と置くと，$\hat{\theta}_{LS} - \theta$は，

$$(2.6) \qquad \hat{\theta}_{LS} - \theta = \frac{W}{\frac{\sigma^2}{1-\theta^2} + V - \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}}$$

$$= \frac{W}{\frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\left(1 + \frac{V - \frac{\sigma^2}{1-\theta^2}}{\frac{\sigma^2}{1-\theta^2}}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\widetilde{W}}{\frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\widetilde{V}\right)}$$

$$= \frac{1-\theta^2}{\sigma^2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\widetilde{W} - \frac{1}{n}\widetilde{W}\widetilde{V} + \frac{1}{n\sqrt{n}}\widetilde{W}\widetilde{V}^2\right) + o_p(n^{-\frac{3}{2}})$$

と書ける。これを用いて$\hat{\theta}_c$の展開を求めると，

$$(2.7) \qquad \theta_c - \theta = \left(1 + \frac{c}{n}\right)\hat{\theta}_{LS} - \theta$$

$$= \left(1 + \frac{c}{n}\right)\left(\hat{\theta}_{LS} - \theta\right) + \frac{c\theta}{n}$$

$$= \frac{1-\theta^2}{\sigma^2}\left\{ \frac{1}{\sqrt{n}}\tilde{W} + \frac{1}{n}\left(-\tilde{W}\tilde{V} + \frac{c\theta}{1-\theta^2}\sigma^2\right) + \frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\tilde{W}\tilde{V}^2 + c\tilde{W}\right)\right\} + o_p(n^{-\frac{3}{2}})$$

となる。さらに $(\hat{\theta}_c - \theta)^2$ については

(2.8) $$(\hat{\theta}_c - \theta)^2 = \left(\frac{1-\theta^2}{\sigma^2}\right)^2 \left\{ \frac{1}{n}\tilde{W}^2 + \frac{1}{n\sqrt{n}}\left(-2\tilde{W}^2\tilde{V} + \frac{2c\theta^2}{1-\theta^2}\tilde{W}\right) + \frac{1}{n^2}\left(3\tilde{W}^2\tilde{V}^2 + 2c\tilde{W}^2 - \frac{2c\theta\sigma^2}{1-\theta^2}\tilde{W}\tilde{V} + \left(\frac{c\theta\sigma^2}{1-\theta^2}\right)^2\right)\right\} + o_p(n^{-2})$$

が成立する。

ここで(1,1)のモデルのもとでの期待値を考え，その order を評価することによって，バイアスについては

(2.9) $$E_\theta(\hat{\theta}_c - \theta) = (-2 + c)\frac{\theta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

が成立する。また $\hat{\theta}_c$ と $\hat{\theta}_0$ における平均二乗誤差に関する差で定義される関数を

(2.10) $$D_\theta(c) = E_\theta\left\{(\hat{\theta}_c - \theta)^2 - (\hat{\theta}_0 - \theta)^2\right\}$$

とし，各項の期待値についての order を評価すると，

(2.11) $$\begin{aligned} D_\theta(c) &= E_\theta\left\{(\hat{\theta}_c - \theta)^2 - (\hat{\theta}_0 - \theta)^2\right\} \\ &= E_\theta\left\{ \left(\frac{\sigma^2}{1-\theta^2}\right)^{-2}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\frac{2c\theta^2\sigma^2}{1-\theta^2}\tilde{W} + \frac{1}{n^2}\left(2c\tilde{W}^2 - \frac{2c\theta\sigma^2}{1-\theta^2}\tilde{W}\tilde{V} + \left(\frac{c\theta\sigma^2}{1-\theta^2}\right)^2\right) + o_p(n^{-2})\right)\right\} \\ &= \left(2c + (c^2 - 6c)\theta^2\right)\frac{1}{n^2} + o(n^{-2}) \end{aligned}$$

なる結果が得られる。

3. 推定量の比較

(2.11)における $\frac{1}{n^2}$ の order の係数を

$$\tilde{D}_\theta(C) = 2C + (C^2 - 6C)\theta^2 \qquad (3.1)$$

とおき、C, θ の値によって、この $\tilde{D}_\theta(C)$ がどの様な挙動を示すかを調べる。

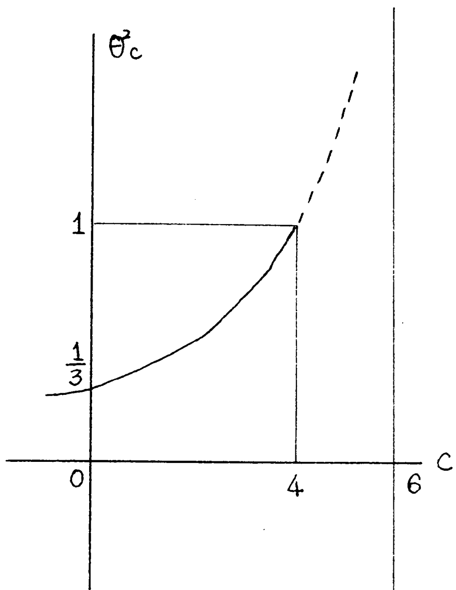
まずCが与えられた時

$$\tilde{D}_\theta(C) = 0 \qquad (3.2)$$

の根は $C \geq 6$ の時は根を持たず、$C < 6$ の時その根は

$$\theta_C = \pm\sqrt{\frac{-2}{C-6}} \qquad (3.3)$$

によって与えられる。今 $|\theta|<1$ において考えると、$C<4$ において $\tilde{D}_\theta(C)$ は根を持つと言える。図(3.1)．つまり $C<4$ において $\tilde{D}_\theta(C)$ の符号が逆転し θ_C と θ_0 における平均二乗誤差を $\frac{1}{n^2}$ の order の部分において評価すると、θ_C の点において等しくなり $|\theta|<|\theta_C|$ で定義される部分と $|\theta|>|\theta_C|$ で定義される部分においては大小関係が逆転していることが分る。特に興味ある値としては $\theta_{-1} = \pm 0.53452$, $\theta_1 = \pm 0.63246$, $\theta_2 = \pm 0.707011$ が得られる。ここで $C=1$ は漸近中央値不偏になる様に $\hat{\theta}_{LS}$ を



図(3.1)

修正した推定量，$c=2$ は漸近的に不偏となる様修正を行った推定量に対応している。

さらに θ を固定して考えると，

(3.4) $$\begin{aligned}\tilde{D}_\theta(c) &= 2c + (c^2-6c)\theta^2\\ &= \theta^2c^2 + 2(1-3\theta^2)c\\ &= \theta^2\left(c + \frac{1-3\theta^2}{\theta^2}\right)^2 - \frac{(1-3\theta^2)^2}{\theta^2}\end{aligned}$$

と書けることから，$\tilde{D}_\theta(c)$ は $c = 3 - \frac{1}{\theta^2}$ の時，最小値 $-\frac{1}{\theta^2}(1-3\theta^2)^2$ を取ることが分る。特に $\theta=1$ の時 $c=2$ で最小値 -4 を取ることが上のことから言えるが，

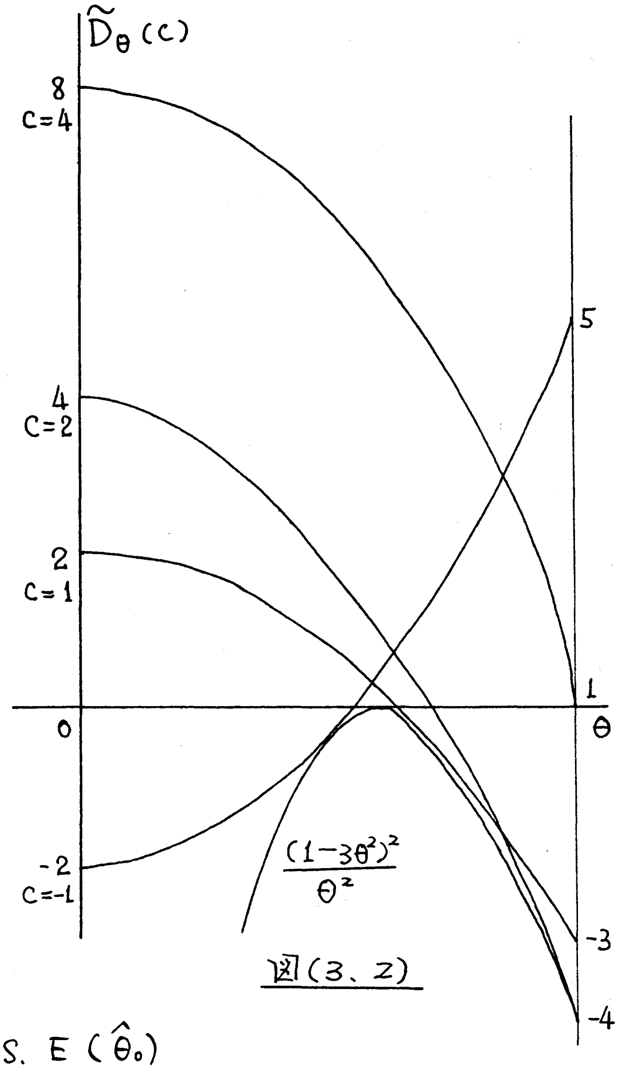
(3.5) $$\tilde{D}_1(c) = c(c-4)$$

となることから，$c<0$，$c>4$ では $\tilde{D}_1(c)>0$ であることが示される。

今 $\tilde{D}_\theta(c)$ において，これを θ の関数と見た時，θ^2 の係数に注目すると，$c<0$，$c>6$ では下に凸な関数であり，$0<c<6$ においては上に凸な関数である。さらに $\theta=0$ の時 $\tilde{D}_0(c)=2c$ であることから，これらは，c の符号を保存する。以上のことから $c>4$ では $|\theta|<1$ の範囲で $\tilde{D}_\theta(c)>0$ となり，$\hat{\theta}_c$ は $\hat{\theta}_0$ よりも漸近的には改良できないことが分る。これらを図示すると図(3.2)の様になる。

4．数値実験

Nを時系列の長さにとりN＝10, 50, 100, 300 の時 $\hat{\theta}_0$, $\hat{\theta}_{-1}$, $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$ についての $\theta = 0.1, 0.3, 0.5, 0.6, 0.7, 0.9$ に対する数値実験の結果が表(4.1)に掲げてある。この時 平均(MEAN)，平均二乗誤差(M.S.E)については各々100回の繰り返しによって標本平均を求めている。この時 $\hat{\theta}_0$ に対する $\hat{\theta}_c$ についての平均二乗誤差の差 つまり



図(3、2)

$$(4.1) \qquad \mathrm{M.S.E}(\hat{\theta}_c) - \mathrm{M.S.E}(\hat{\theta}_0)$$

が次の表(4.2)に掲げてある。この表において上下2つ並んでいる数の上の方が数値実験によって得られた値であり，これに対し下の方の数値は，漸近的な平均二乗誤差についての理論値において $o(\frac{1}{N^2})$ の項を除いたものである。

表(4.1.1)

N=10		$\hat{\theta}_0$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_{-1}$	$\hat{\theta}_2$
θ=0.1	Mean	0.102236	0.112459	0.092012	0.122683
	M.S.E.	0.079730	0.096623	0.064641	0.115319
θ=0.3	Mean	0.212560	0.233816	0.191305	0.255072
	M.S.E.	0.087040	0.100448	0.076124	0.116347
θ=0.5	Mean	0.370051	0.407057	0.333047	0.444063
	M.S.E.	0.085692	0.091893	0.083605	0.102210
θ=0.6	Mean	0.454936	0.500429	0.409442	0.545924
	M.S.E.	0.078646	0.079614	0.082970	0.085874
θ=0.7	Mean	0.539206	0.593126	0.485285	0.647047
	M.S.E.	0.089602	0.088558	0.097737	0.094603
θ=0.9	Mean	0.656947	0.722641	0.591253	0.788387
	M.S.E.	0.107576	0.090144	0.134610	0.082314

N=50		$\hat{\theta}_0$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_{-1}$	$\hat{\theta}_2$
θ=0.1	Mean	0.104149	0.106232	0.102066	0.108315
	M.S.E.	0.017426	0.018150	0.016723	0.018898
θ=0.3	Mean	0.268159	0.273522	0.262796	0.278885
	M.S.E.	0.022439	0.022991	0.021960	0.023619
θ=0.5	Mean	0.471581	0.481013	0.462150	0.490445
	M.S.E.	0.017651	0.017885	0.017609	0.018309
θ=0.6	Mean	0.551330	0.562356	0.540304	0.573384
	M.S.E.	0.014048	0.013568	0.014780	0.013341
θ=0.7	Mean	0.664881	0.678178	0.651583	0.691477
	M.S.E.	0.010082	0.009683	0.010843	0.009644
θ=0.9	Mean	0.842880	0.859738	0.826022	0.876596
	M.S.E.	0.012219	0.010939	0.014074	0.010236

表(4.1.2)

N=100		$\hat{\theta}_0$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_{-1}$	$\hat{\theta}_2$
θ=0.1	Mean	0.115177	0.116328	0.114025	0.117480
	M.S.E.	0.009393	0.009614	0.009177	0.009839
θ=0.3	Mean	0.302779	0.305807	0.299752	0.308835
	M.S.E.	0.011086	0.011334	0.010858	0.011604
θ=0.5	Mean	0.490543	0.495448	0.485636	0.500354
	M.S.E.	0.007241	0.007316	0.007215	0.007440
θ=0.6	Mean	0.586710	0.592577	0.580843	0.598444
	M.S.E.	0.006328	0.006341	0.006406	0.006413
θ=0.7	Mean	0.684264	0.691107	0.677421	0.697948
	M.S.E.	0.005783	0.005726	0.005935	0.005763
θ=0.9	Mean	0.869438	0.878132	0.860744	0.886826
	M.S.E.	0.003040	0.002627	0.003605	0.002365

N=300		$\hat{\theta}_0$	$\hat{\theta}_1$	$\hat{\theta}_{-1}$	$\hat{\theta}_2$
θ=0.1	Mean	0.097046	0.097369	0.096722	0.097693
	M.S.E.	0.003326	0.003346	0.003306	0.003367
θ=0.3	Mean	0.294013	0.294993	0.293033	0.295973
	M.S.E.	0.002716	0.002723	0.002711	0.002732
θ=0.5	Mean	0.498883	0.500546	0.497220	0.502208
	M.S.E.	0.002864	0.002882	0.002851	0.002906
θ=0.6	Mean	0.597357	0.599348	0.595366	0.601339
	M.S.E.	0.002029	0.002036	0.002030	0.002050
θ=0.7	Mean	0.702248	0.704589	0.699907	0.706929
	M.S.E.	0.001474	0.001500	0.001459	0.001536
θ=0.9	Mean	0.892198	0.895171	0.889224	0.898145
	M.S.E.	0.000956	0.000925	0.001006	0.000911

表(4.2.1)

Difference of Mean Square Errors

N=10	$M.S.E.\hat{\theta}_1 - M.S.E.\hat{\theta}_0$	$M.S.E.\hat{\theta}_{-1} - M.S.E.\hat{\theta}_0$	$M.S.E.\hat{\theta}_2 - M.S.E.\hat{\theta}_0$
θ=0.1	0.016893	-0.015089	0.035589
	0.019500	-0.019300	0.039200
θ=0.3	0.013408	-0.010916	0.029307
	0.015500	-0.013700	0.032800
θ=0.5	0.006201	0.002087	0.016518
	0.007500	-0.002500	0.020000
θ=0.6	-0.000968	0.004324	0.007228
	0.002000	0.005200	0.011200
θ=0.7	-0.001044	0.008135	0.005001
	-0.004500	0.014300	0.000800
θ=0.9	-0.017432	0.027034	-0.025262
	-0.020500	0.036700	-0.024800

N=50	$M.S.E.\hat{\theta}_1 - M.S.E.\hat{\theta}_0$	$M.S.E.\hat{\theta}_{-1} - M.S.E.\hat{\theta}_0$	$M.S.E.\hat{\theta}_2 - M.S.E.\hat{\theta}_0$
θ=0.1	0.000724	-0.000703	0.001472
	0.000780	-0.000772	0.001568
θ=0.3	0.000552	-0.000479	0.001180
	0.000620	-0.000598	0.001312
θ=0.5	0.000234	-0.000042	0.000658
	0.000300	-0.000100	0.000800
θ=0.6	-0.000048	0.000732	-0.000707
	0.000080	0.000208	0.000448
θ=0.7	-0.000399	0.000761	-0.000438
	-0.000180	0.000572	0.000032
θ=0.9	-0.001280	0.001855	-0.001983
	-0.000820	0.001468	[illegible]992

表(4.2.2)

Difference of Mean Square Errors

N=100	M.S.E. $\hat{\theta}_1$ - M.S.E.$\hat{\theta}_0$	M.S.E.$\hat{\theta}_{-1}$ - M.S.E.$\hat{\theta}_0$	M.S.E.$\hat{\theta}_2$ - M.S.E.$\hat{\theta}_0$
θ=0.1	0.000221	-0.000216	0.000446
	0.000195	-0.000193	0.000392
θ=0.3	0.000248	-0.000228	0.000518
	0.000155	-0.000137	0.000328
θ=0.5	0.000075	-0.000026	0.000199
	0.000075	-0.000025	0.000200
θ=0.6	0.000013	0.000078	0.000085
	0.000020	0.000052	0.000112
θ=0.7	-0.000057	0.000152	-0.000020
	-0.000045	0.000143	0.000008
θ=0.9	-0.000413	0.000565	-0.000675
	-0.000205	0.000367	-0.000248

N=300	M.S.E.$\hat{\theta}_1$- M.S.E.$\hat{\theta}_0$	M.S.E.$\hat{\theta}_1$- M.S.E.$\hat{\theta}_0$	M.S.E.$\hat{\theta}_2$ - M.S.E.$\hat{\theta}_0$
θ=0.1	0.000020	-0.000020	0.000041
	0.000022	-0.000021	0.000044
θ=0.3	0.000007	-0.000005	0.000016
	0.000017	-0.000015	0.000036
θ=0.5	0.000018	-0.000013	0.000042
	0.000008	-0.000003	0.000022
θ=0.6	0.000007	0.000001	0.000022
	0.000002	0.000006	0.000012
θ=0.7	0.000025	-0.000014	0.000063
	-0.000005	0.000016	0.000001
θ=0.9	-0.000032	0.000049	-0.000045
	-0.000023	0.000041	-0.000028

5．注

3までの議論において(2.7)，(2.8)における各項の期待値は(1.1)のモデルのもとで考えられ，

$$(5.1)\qquad E_\theta(\tilde{W}) = 0$$

$$(5.2)\qquad E_\theta(\tilde{W}\tilde{V}) = 2\theta - 2\left(2\theta + \frac{\theta^3}{1-\theta^2}\right)\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$(5.3)\qquad E_\theta(\tilde{W}\tilde{V}^2) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$(5.4)\qquad E_\theta(\tilde{W}^2) = \frac{\sigma^4}{1-\theta^2} - \frac{\sigma^4}{1-\theta^2}\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

等の結果を得ているが，これらは(1.1)のモデルにおいて初期条件 $X_0=0$ を置いて修正を行ったモデル，つまり

(5.5) $X_t = \theta X_{t-1} + U_t \qquad t=1,2,\cdots$

$X_0 = 0$

$|\theta|<1$

$\{U_t\}_{t=1,2,\cdots}$；互に独立に $N(0,\sigma^2)$ の正規分布に従う確率変数列

のもとでの期待値を取ったものに一致している．従って以上の結論はこの修正されたモデルにおいても同様に成立する。

REFERENCES

[1] Anderson T W.(1971), The Statistical Analysis of Time Series. Wiley

[2] Akahira M. (1975),"A note on the second order asymptotic efficiency of estimators in an autoregressive process", Rep. Univ. Electro-Comm. 26-1, 143-149.

[3] Akahira M. (1979),"On the second order asymptotic optimality of estimators in an autoregressive process", Rep. Univ. Electro-Comm.,29-2, 213-218.