数理解析研究所講究録
420巻 1981年 168-172

Caianiello 方程式について

京大 数学　畑 政義

Caianiello 方程式は、形式神経細胞の数学的モデルとして知られている。以下、次のような方程式を考察する。

$$x_{n+1} = \mathbb{1}\left[A - \alpha \sum_{r=0}^{n} \frac{x_{n-r}}{b^r} - \theta \right]$$

ここで、$\mathbb{1}[x]$ は Heaviside関数であり、x_n は時間 n における細胞の状態を表わし、値0または1をとる。0は静止状態を、1は興奮状態をそれぞれ表わしている。また、A は入力刺激の大きさを表わし、ここでは定数であるとする。また θ はスレッホルド値であり、α は正の、また b は1より大きな定数である。

南雲、佐藤[1] 両氏は、適当な変数変換によって、この方程式が、ある不連続な区分的線型な関数のダイナミックスの問題に変換できることを示し、また周期的アトラクターの出現する場合について研究を行なった。ここでは、彼らの結果を補足するとともに、Cantor アトラクターに関する新しい

結果を報告する。なお、定理の証明は省略する。

変数変換 $y_n = 1 + \frac{A-\theta}{\alpha b} - \sum_{r=0}^{n} \frac{x_{n-r}}{b^r}$ によって

$y_{n+1} = f(y_n, \beta, c)$ を得る。

ただし、

$$f(x) \equiv f(x, \beta, c) = \begin{cases} \beta(x-c)+1 & (x < c) \\ \beta(x-c) & (x \geq c) \end{cases}$$

$\beta = \frac{1}{b}$, $c = 1 - \frac{A-\theta}{\alpha}(1-\frac{1}{b})$, $x_{n+1} = \mathbb{1}[y_n - c]$ とおく。以下、$(\beta, c) \in (0,1) \times (0,1)$ に対して、$f(x, \beta, c)$ を考察していく。

§1 周期的アトラクターとCantorアトラクター

$I = [0, 1]$ とし、次のように場合分けして考える。

A: $0 \leq i \leq N-1$ に対して $c \in \mathrm{Int}\, f^i(I)$、かつ $c \notin \mathrm{Int}\, f^N(I)$ となるような自然数Nが存在する場合

B: 任意の自然数nに対して、$c \in \mathrm{Int}\, f^n(I)$ となる場合

このとき、次の定理が成り立つ。

定理 1.1 Aの場合、任意の $x \in I$ に対して、x から出発した軌道は、漸近的に N+1 周期である。ここでNは、場合Aにおいて定義されたものである。

定理 1.2　　Bの場合、$f(x)$は周期軌道も漸近的周期軌道も持たない。さらに、$\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} cl\, f^n(I)$ とおくと、Λ は、f-不変な Cantor 集合であり、測度0である。また、任意の $x \in \Lambda$ に対し、Λ は x の ω 極限集合でもある。

§2　平均発火率

次の極限値が存在するとき、これを平均発火率と呼ぶ。これは、細胞が発火する確率とも考えうるが、後にわかるように S^1 上の homeomorphism に対して定義される回転数にきわめて類似した性質を持っている。

$$\rho(x, \beta, c) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}[f^{j-1}(x, \beta, c) - c]$$

このとき次の定理が成り立つ。

定理 2.1　　任意の $(x, \beta, c) \in [0,1] \times (0,1) \times (0,1)$ に対して、平均発火率が存在し、$\rho(x, \beta, c) = \rho(0, \beta, c)$ が成り立つ。

定理 2.2　　Bの場合であることと、その平均発火率が、無理数であることとは同値である。

定理 2.3　　$\beta \in (0,1)$ を固定したとき、$\rho(0, \beta, c)$ は c の関数として、連続で、単調減少である。

§3　パラメータとの関係

パラメータ平面 $(\beta, c) \in (0,1) \times (0,1)$ 上で、AおよびBの場合

がどのように分布しているのかを考察する。

定理3.1　$\beta\in(0,1)$ を固定する。任意の既約分数 $\frac{q}{p}\in(0,1)$ に対し，一意的に c 軸上に閉区間 $\Delta(\frac{q}{p})$ が定まり，そこでは，Aの場合が周期 p で成立し，平均発火率は $\frac{q}{p}$ に等しい。$\frac{q}{p}<\frac{s}{r}$ であれば $\Delta(\frac{q}{p})>\Delta(\frac{s}{r})$ であり，さらに $\Delta(\frac{q}{p})=[a,b]$ とおくと，

$$a=1-q\frac{\beta^{p-1}(1-\beta)}{1-\beta^p}-\frac{1}{1-\beta^p}\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^2\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{q}{p}j\right]\beta^j$$

$$b=a+\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^2\frac{\beta^p}{1-\beta^p}$$ が成立する。

定理3.2　$\Sigma=(0,1)-\bigcup\Delta(\frac{q}{p})$ とおくと，Σ は Cantor 集合であり，測度０である。任意の $c\in\Sigma$ に対して，Bの場合が成り立ち，そのときの平均発火率 $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ との間には次の関係式が成り立つ。

$$c=1-\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^2\sum_{n=2}^{\infty}[\alpha n]\beta^n$$

§4　Conjugacy問題

定理4.1　もし $\rho(0,\beta,c)=\rho(0,\xi,\lambda)\notin\mathbb{Q}$ であれば，$f(x,\beta,c)$ は $f(x,\xi,\lambda)$ に topologically conjugate である。

定理4.2　もし $\rho(0,\beta,c)\notin\mathbb{Q}$ であれば，$f(x,\beta,c)$ は $R_\alpha:x\to x+\alpha$ に topologically semi-conjugate である。ここで，R_α は S^1 上の rigid な回転であり，α は $f(x,\beta,c)$

の平均発火率である。

参考文献

[1] J. Nagumo and S. Sato : On a responce characteristic of a mathematical neuron model. Kybernetic 10, 155-164 (1972)