

確率的発展方程式

名古屋市 経済学部 宮原 孝夫

§1. 発展方程式 $\frac{\partial u}{\partial t} = Au$ に対して、ランダムな影響が加わったものを考えよう。それが white noise によるものとして、次のような方程式が考えられる。

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = Au + F(u)w(t), \quad w(t) = \dot{B}(t) = \frac{dB(t)}{dt}.$$

たとえば、 \mathbb{R}^d 上の Brown 運動を考え、初期分布 $f(x)dx$ を与えたときの t 時間後の分布を $u(t, x)dx$ とすると $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u$, $u(0, x) = f(x)$ となるが、単に Brown 運動による拡散だけでなく、 \mathbb{R}^d 上の各点でランダムな影響を受けているとすれば、ランダムなものを $w_t(x)$ として

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u + F(u)w_t(x)$$

をうる。ここで、 $w_t(x)$ の定義をはっきりさせ方程式を意味あるものにしよう。 $w_t(x) = w(t, x)$ を時間・空間の両方に

ついて各々独立な white noise ($d+1$ 次元パラメータ-white noise) i.e. test function $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d+1})$ に対して $\langle \varphi, w \rangle, \langle \psi, w \rangle$ が平均 0 の Gaussian random variables であり、covariance が $E[\langle \varphi, w \rangle \langle \psi, w \rangle] = (\varphi, \psi) = \int \varphi \cdot \psi dt dx$ となるような超過程と考えるのが一番基本的であろう。そのとき、 $F(u(t, x)) w_t(x)$ の意味を適当に解釈すれば上の方程式 (2) は Hilbert 空間 $H = L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の確率微分方程式

$$(3) \quad dX_t = \frac{1}{2} \Delta X_t dt + D(X_t) dB_t$$

とみなすことができる。ここで B_t は H 上の cylindrical Brownian motion (c. B. m.) (あるいは、 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ 上の standard Wiener process) である。

Hilbert 空間上の確率微分方程式について少し説明しておこう。有限次元の確率微分方程式は $dX_t = f(X_t) dt + e(X_t) dB_t$, ($X_t, f(x); n$ -ベクトル, $e; n \times r$ 行列, $B_t; r$ 次元 Brown 運動) という形であるが、ここで f, e を $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $e(x): \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n$ なる線型変換と見て、 $e: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^n)$ とする。ここで $n, r \rightarrow \infty$ とするとき $\mathbb{R}^n \rightarrow H_1, \mathbb{R}^r \rightarrow H_2$ とみなして、形式的に次の方程式が導かれる。

$$(4) \quad dX_t = f(X_t) dt + e(X_t) dB_t$$

\Rightarrow で、 $f: H_1 \rightarrow H_1$, $e: H_1 \rightarrow \mathcal{L}(H_2 \rightarrow H_1)$ である。実際この方程式は、 $B_t: H_2$ 上の c. B. m., $e: H_1 \rightarrow \sigma_2(H_2, H_1)$, $\sigma_2(H_2, H_1) = \{H_2 \text{ から } H_1 \text{ へ の Hilbert-Schmidt 作用素の全体}\}$, という場合には well-defined になっている。そして、 $H_2 = H = L^2(\mathbb{R}^d)$ という場合には、 B_t の時間微分が $(d+1)$ -パラメータの white noise $W(t, x)$ になっている。

方程式 (4) において、 $f(x) = Ax$ とおいたものが (1) に対応したものと考える ($A = \frac{1}{2}\Delta$ なら、(3) になる)。(ただし、 A が非有界で $\mathcal{D}(A) \subsetneq H$ の場合を考えるので、解ののびている空間を気をつける必要がある。) 上のような立場で扱っているものとして [2, 3, 4, 5, 11, 12] 等がある。

方程式 (2) において $F(u) = u$ とおいたとき、対応する確率微分方程式 (3) における作用素 $D(X)$ は積作用素 $X \cdot$ となり、いわゆる双線型 (bilinear) 方程式

$$(5) \quad dX_t = \frac{1}{2}\Delta X_t dt + X_t \cdot dB_t$$

が得られる。この方程式はこのまゝでは $H = L^2(\mathbb{R}^d)$ 上、又はそれを拡張した Hilbert scale ([3]) 上でも解は求まらない。

(注. $dX_t = -AX_t dt + X_t \cdot dB_t$, A ; 正定値, は, A^{-1} が Hilbert-Schmidt ならば解は unique に定まる ([4])。しかし、その他の場合には、一般には解は H 又は A による Hilbert

scale 内に解は定まる。一例は [9] で説明してあり、それによって §3 で述べる。))

そこで、考えられる方法の一つは、(5) を修正して、

$$(5') \quad dX_t = \frac{1}{2} \Delta X_t dt + X_t \cdot S dB_t$$

を考察してみよう。ここで、 S は H 上の作用素で smoothing operator と呼ばれる。 dB_t を $S dB_t$ に置き代えるということは、各点独立な white noise を考える代わりに、Gaussian random field を考えることになっている。

§2. ここで、[6] に従って c. B. m. B_t の代りに空間的に一様な correlation のある Gaussian process $W(t)$ 、すなわち、covariance function $Q(x) \geq 0$ により

$$E[\langle W(t), \phi \rangle \langle W(s), \psi \rangle] = \min(s, t) \int \int \phi(x) \psi(y) Q(x-y) dx dy$$

で定められる $W(t)$ を採用した話を紹介する (注. $Q(x) = \delta(x)$ のとき, $W(t) = B(t)$ である)。

考える方程式は、形式的に書けば

$$(6) \quad \frac{\partial X(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{2} \Delta X(t, x) + \sigma X(t, x) W'(t, x), \quad X(0, x) = C = \text{const.}$$

σ は正の定数, $W'(t, x)$ は $W(t, x)$ の時間微分, 与えられ, \mathbb{R}^d 上の Brown 運動に, 各点 $x \in \mathbb{R}^d$ で密度に比例した大きさのランダムな作用が加わったときの, 分布の特点的変化

を記している方程式である。方程式 (6) の厳密な定義は

$$(7) \quad X(t, x) = C + \sigma \int_0^t \int_{\Omega} p(t-s, x, y) X(s, y) W(ds, dy),$$

$p(t, x, y)$; $\frac{1}{2}\Delta$ の基本解

で与えられる。ただし, " $=$ " は $\mu \times P$ a.e. (μ は \mathbb{R}^{d+1} 上の Lebesgue 測度) で等しいことを意味し, 右辺の積分は確率積分である。(注. (7) は, (5') の形の方程式で述べれば, $Q(x)$ に可積分性を仮定して, $S^2 \in Q(x-y)$ を積分核を持つ積分作用素 (非負定値である) とし, $S = \sqrt{S^2}$ とおいて, この S を用いたときの方程式 (5') に相当する。)

方程式 (7) の解は逐次近似により構成できる。実際,

$$X_0(t, x) \equiv C, \quad \dots,$$

$$X_n(t, x) = \sigma \int_0^t \int_{\Omega} p(t-s, x, y) X_{n-1}(s, y) W(ds, dy), \quad n=1, 2, \dots$$

とおいて $X(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(t, x)$ を考えると, compact 集合 K ($K \subset \mathbb{R}^d$) に対して, $[0, T] \times K$ 上で $L^2([0, T] \times K \times \Omega, \mu \times P)$ の意味で収束し, 更に概収束することも分る。そしてこの $X(t, x)$ が (7) の unique な解である。

$X(t, x)$ は, 初期分布の密度を $C = \text{const.}$ としたときの, t 時間後の密度と考えられる。 $X(t, x)$ が空間的な一様性を持った random field であることに注意して

$$\varphi(t, x) = E[X(t, y) X(t, y+x)]$$

とおく。(注。 $E[X(t,x)] = C$ であるから $f(t,x) - C^2$ が x だけ離れた 2 点間の covariance である。)

このとき、 $f(t,x)$ に関する次の定理が成立する。

定理 ([6]) 条件 $Q(x) \rightarrow 0$ ($|x| \rightarrow \infty$) の下で、

$f(t,x)$ は次の方程式の解である。

$$(8) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \Delta f(t,x) + \sigma^2 Q(x) f(t,x), \\ f(0,x) = C^2. \end{cases}$$

次に、 $t \rightarrow \infty$ のときの $f(t,x)$ の極限を考察しよう。

方程式 (8) に Feynman-Kac formula を使って

$$f(t,x) = C^2 E_x \left[\exp \int_0^t \sigma^2 Q(b_s) ds \right],$$

b_s ; $\text{Var}(b_s) = 2s$ の 1 次元 Brown 運動
となる。従って極限 $f^*(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t,x)$ が存在したとすると

$$f^*(x) = C^2 E_x \left[\exp \sigma^2 T \right] \geq C^2 \sigma^2 E_x [T],$$

$$T = \int_0^\infty Q(b_s) ds$$

となり、従って

$$\text{" } \lim_{t \rightarrow \infty} f(t,x) \text{ が有限} \Rightarrow E_x [T] < \infty \text{"}$$

を得る。とすることで、 $E_x [T] = \int Q(y) dy \int_0^\infty P(2s, x, y) ds$

であるから $\int_0^\infty P(2s, x, y) ds < \infty$ が必要となり, これより

$d \geq 3$ が必要となる。このとき, 次の定理が得られる。

定理 ([6]) $d \geq 3$ と $L_1 \int |x-y|^{(2-d)} Q(y) dy \leq L_2 < \infty$
for $\forall x \in \mathbb{R}^d$, とする。このとき, 次の (a) ~ (c) が成立。

(a) $g^*(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t, x) < \infty$ が存在して連続。

(b) K : compact set in \mathbb{R}^d に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E \left[\left(\int_K X(t, x) dx \right)^2 \right] < \infty.$$

(c) g^* は次の方程式の解である。

$$\begin{cases} \Delta g^*(x) + \sigma^2 Q(x) g^*(x) = 0 \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} g^*(x) = C^2. \end{cases}$$

(注. (b) における $\int_K X(t, x) dx$ は K 内の個体数である。)

(covariance function $Q(x)$ が compact support のときは $g^*(x)$ の $|x| \rightarrow \infty$ のときの挙動まで分って,

$$(*) \quad g^*(x) - C^2 \sim |x|^{2-d}$$

の評価が得られる。定理の (c) 又は (*) より $\text{cov}(X(t, x), X(t, y)) \rightarrow 0$ ($|x-y| \rightarrow \infty$) となり, 空間的に離れた点では次第に独立に近い状態になっていくといえよう。

この結果として, Tchebycheff の不等式を使って

" $\forall \delta > 0$ に對して

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} \left\{ P \left(\left| \frac{X(t, A_K)}{|A_K|} - c \right| > \delta \right) \right\} = 0 "$$

が成る。 \Rightarrow で、 A_K は一辺の長さが K の cube を示し、
 $X(t, A_K) = \int_{A_K} X(t, x) dx$ である。(従つて、 $X(t, A_K)/|A_K|$ は
 A_K 上の平均密度である。)

§3. この節では、[10] に従つて、Hilbert 空間 $H = L^2([0, \pi])$ 上の次の方程式を考察する。

$$(9) \quad dX_t = -\hat{\omega} X_t dt + X_t \cdot R dB_t,$$

\Rightarrow で、 $\hat{\omega} = \sqrt{-\Delta} = \sqrt{-\frac{d^2}{dx^2}}$, Δ ; Laplacian on H with
 Neumann boundary condition, R ; $Rf(\sigma) = \int_0^\pi R(\sigma, \sigma') f(\sigma') d\sigma'$
 なる作用素である。この方程式の意味は次のように見れる。
 $[0, \pi]$ 上の反射壁 Brown 運動 $\hat{b}(t)$ を指数 $\frac{1}{2}$ の片側安
 定過程 τ_t で time change (subordination) したマルコ
 フ過程 $Y_t = \hat{b}(\tau_t)$ の generator が $-\hat{\omega}$ である。従
 つて、そのようなプロセスに、第2項によるランダムな影響
 が加わった場合の密度関数の時間的変化を見ていることにな
 る。そして、作用素 $\hat{\omega}^{-1}$ が Hilbert-Schmidt 型ではな
 いので、§1 で注意したように、 $X_t \cdot dB_t$ そのものではな
 く $X_t \cdot R dB_t$ に直したものをしている。

上の問題を white noise analysis ([7, 8]) の立場で
 ながめてみよう。 Gelfand triple

$$\mathcal{E} \subset L^2((-\infty, \infty) \times [0, \pi]) \subset \mathcal{E}'$$

をとり、 \mathcal{E}' 上の Gaussian measure μ (2-1°ラ×
 -2- white noise) を次のものと定める。

$$\int_{\mathcal{E}'} e^{i\langle \eta, \omega \rangle} d\mu(\omega) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\|\eta\|^2\right\}, \quad \|\eta\|^2 = \iint_0^\pi \eta \, dx \, d\sigma.$$

このとき $B_t(\xi) = \langle \xi \otimes \chi_{[0,t]}, \omega \rangle$ により B_t を定めると、

B_t は $H = L^2([0, \pi])$ 上の C.B.M. である。方程式 (9) に

おける B_t をこの C.B.M. にとりかえると、その解 $X(t)$

が、 $X(t) \in L^2(\mathcal{E}' \rightarrow H)$ に求まる。 $L^2(\mathcal{E}' \rightarrow H)$ を

$$L^2(\mathcal{E}' \rightarrow H) = \sum \oplus \mathcal{X}_n(H) \quad (\text{Wiener-Itô 分解})$$

と直和分解して、 $X(t)$ の各成分を $X_n(t)$ とおく ($X(t)$

$= \sum X_n(t)$, $X_n(t) \in \mathcal{X}_n(H)$)。各 $X_n(t)$ には積分表現の核

Φ_n , $\Phi_n \in \hat{L}^2([0, \pi] \times (-\infty, \infty))^n \rightarrow H$, が対応しており、又、

次のような対応の図式がなりたつ。

$$\begin{array}{ccc} X(t) & \longleftrightarrow & \{X_n(t)\}_{n=0,1,\dots} & \longleftrightarrow & \{\Phi_n(t)\}_{n=0,1,2,\dots} \\ \updownarrow & & & & \updownarrow \\ \{U(t;\eta) : \eta \in \mathcal{E}'\} & \longleftrightarrow & & \longleftrightarrow & \{U^{(n)}(t;\eta) : \eta \in \mathcal{E}'\}_{n=0,1,\dots} \end{array}$$

$$U(t;\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}(t;\eta)$$

$$U^{(n)}(t; \eta) = \int - \int \Phi_n(H; x_1, \dots, x_n, \cdot) \eta^{(n)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \in H.$$

$U(t, \eta)$ は H -valued であることに注意しておく。

定理 ([10]). $\eta = \xi \otimes \zeta \in \mathcal{E}$ の形のとき, $U(t, \eta)$ は H 上の次の方程式の解である。

$$(10) \begin{cases} \frac{dU(t; \eta)}{dt} = - \hat{\omega} U(t; \eta) + \zeta(t) G(\zeta) U(t; \eta), & t > 0 \\ U(0; \eta) = X_0 \in H, \end{cases}$$

\Rightarrow $G(\zeta)$ は $G(\zeta)h = (R\zeta) \cdot h$ なる H 上の作用素である。(注. 方程式 (9) の右辺 2 項 $X_t \cdot R dB_t$ を " X_t に $R dB_t$ が作用している" という見方をすれば自然な形。)

こうして, (9) は, Hilbert 空間上の常微分方程式の系

(10) と同値になった。

次に, $X(t)$ の covariance function について見る。

$$(11) \quad E[X(t), f] [X(t), g] = \int_0^t \int_0^t V(t; \sigma, \sigma') f(\sigma) g(\sigma') d\sigma d\sigma'$$

を定義する関数 $V(t; \sigma, \sigma')$ を $X(t)$ の covariance function と呼ぶことはある。このとき, 次の定理をうる。

定理 ([10]). $V(t; \sigma, \sigma')$ は次の方程式の解である。

$$(12) \quad \frac{\partial V}{\partial t} = - \hat{\omega} V + \hat{R} \cdot V, \quad \hat{\omega} = \begin{bmatrix} \hat{\omega} & 0 \\ 0 & \hat{\omega} \end{bmatrix} \text{ on } H \times H,$$

$$\hat{R}; \quad \hat{R}(\sigma, \sigma') = \int_0^\pi R(\sigma, x) R(\sigma', x) dx \text{ による積分作用素。}$$

この $V(t; \sigma')$ は, §2 における $f(t, x)$ と同様のもの
 であるが, 今の場合, R が特別な場合を除いて, $t \rightarrow \infty$ のと
 き $V(t; \sigma')$ は発散する。

以上, 方程式 (9) に対して述べてきたが, 同様の議論は,
 §1 における方程式 (5) 等に対しても可能なことを注意し
 ておこう。

最後に, 1次元 Brown 運動だけの場合, 亦なわち, 空間
 方向の x が 1 変のみからなっているとき, 方程式は

$$dz(t) = a z(t) dt + \sigma z(t) db(t)$$

の形となるが, この方程式の解は $z(t) = C \exp\{\sigma b(t) - \frac{1}{2} a \sigma^2 t\}$
 で与えられ, $t \rightarrow \infty$ のとき $z(t) \rightarrow 0$ (a.e.) となる。上
 に見てきたように, 空間方向に広がりのあるときには事情が
 かなり異なることが分る。

参考文献

- [1] A.V. Balakrishnan, Stochastic Optimization Theory in Hilbert Spaces I, Applied Mathematics and Optimization, Vol. 1, No. 2(1974), 97-120.
- [2] R.F. Curtain and P.L. Falb, Stochastic Differential Equations on Hilbert Space, J. Differential Equations, Vol. 10 (1971), 412-430.
- [3] Yu.L. Daletskii, Infinite Dimensional Elliptic Operators and Parabolic Equations Connected with them, Uspekhi. Math. Nauk. t. 22(1967).
- [4] D.A. Dawson, Stochastic Evolution Equation, Mathematical Biosciences, Vol. 15(1972), 287-316.

- [5] D.A. Dawson, Stochastic Evolution Equations and Related Measure Processes, *J. Multivariate Analysis*, Vol. 5(1975), 1-55.
- [6] D.A. Dawson and H. Salehi, Spatially Homogeneous Random Evolutions, *J. of Multivariate Analysis* Vol. 10(1980), 141-180.
- [7] T. Hida, Analysis of Brownian Functionals, Carleton Math. Lecture Notes No. 13, 2nd ed., Ottawa, Canada, 1978.
- [8] T. Hida, Brownian Motion, Springer, 1980.
- [9] Y. Miyahara, Infinite Dimensional Langevin Equation and Fokker-Planck Equation, to appear in *Nagoya Math. J.*, Vol. 81 (1981).
- [10] Y. Miyahara, White Noise Analysis and an Application to Stochastic Differential Equations in Hilbert Spaces, to appear.
- [11] A. Shimizu, Construction of a Solution of Linear Stochastic Evolution Equations on a Hilbert Space, *Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations*, Kyoto, 1976, 385-395.
- [12] M. Yor, Existence et Unicité de Diffusions à Valeurs dans un Espace de Hilbert, *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Section B*, Vol. 10, No. 1(1974), 55-88.