数理解析研究所講究録
422巻 1981年 37-58

5次陽的Runge-Kutta法の特性の比較と最適化

山梨大工　田中正次　山下茂
田名後保秀　尾崎実

§1. まえがき

常微分方程式の初期値問題

$$y' = f(x,y),\quad y(x_0)=y_0,\quad y'(x),\ y(x),\ y_0,\ f(x,y) \in R^{m} \qquad (1.1)$$

が与えられたとする。ここでfは十分滑らかとする。そのとき5次陽的Runge-Kutta法は，一般に

$$k_i = h_n f\left(x_n + a_i h_n,\ y_n + \sum_{j=0}^{i-1} b_{ij} k_j\right),\quad a_1 = b_{10} = 0 \quad (i=1,2,3,4,5,6)$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{6} c_i k_i \qquad (1.2)$$

と表わされる。記法を簡略化するために，以下では式(1.2)をその係数行列

$$\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
a_2 & b_{21} & & & & & \\
a_3 & b_{31} & b_{32} & & & & \\
a_4 & b_{41} & b_{42} & b_{43} & & & \\
a_5 & b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & & \\
a_6 & b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & \\
\hline
 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6
\end{array} \qquad (1.3)$$

によつて表わす。

5次陽的Runge-Kutta法に関する研究は，20世紀初頭に始まるが，特に1960年代になつて最盛期を迎え，続々と新公式が提案された。そして同年代の末頃からは，その応用研究，すなわちそれを誤差評価が可能な組込み型の公式に応用したものがしばしば見られるようになつた。(W. Kutta (1901)〔1〕, E. J. Nyström (1925)〔2〕, W. E. Milne & R. R. Reynold (1962), J. C. Butcher (1964)〔3〕, E. B. Shanks (1966)〔4〕, H. A. Luther & H. P. Konen (1965)〔5〕, J. D. Lawson (1966)〔6〕, C. R. Cassity (1966, 1969)〔7〕,〔8〕, H. A. Luther (1966)〔9〕, E. Fehlberg (1968)〔10〕, D.G. Bettis (1978)〔11〕, R. England (1969)〔12〕, J. H. Verner (1978)〔13〕, K.R. Jackson, W.H. Enright & T.E. Hull (1978)〔16〕)

著者はこの研究において，打ち切り誤差，安定性，丸め誤差に関する性質の3つの観点から知られている公式の優劣の比較を試みると共に，これらの観点から好ましいと考えられる公式を新規に提案する。特にこれまでほとんど未開拓であつた C_2 非零型公式群が，知られている C_2 零型公式群と同様に豊かな稔りを約束するものであることが示される。

§2. 公式(1.2)が5次法になるための条件式群とその解

2.1 (1.1)が単一の微分方程式である場合の条件式群

$$\sum_{i=1}^{6} c_i = 1 \quad (2.1.1) \qquad \sum_{i=2}^{6} a_i c_i = 1/2 \quad (2.1.2)$$

$$\sum_{i=2}^{6} a_i^2 c_i = 1/3 \quad (2.1.3) \qquad \sum_{i=2}^{6} a_i^3 c_i = 1/4 \quad (2.1.4)$$

$$\sum_{i=2}^{6} a_i^4 c_i = 1/5 \quad (2.1.5) \qquad \sum_{i=3}^{6} p_{i-2} c_i = 1/6 \quad (2.1.6) \qquad \sum_{i=3}^{6} a_i p_{i-2} c_i = 1/8 \quad (2.1.7)$$

$$\sum_{i=3}^{6} a_i^2 p_{i-2} c_i = 1/10 \quad (2.1.8) \qquad \sum_{i=3}^{6} q_{i-2} c_i = 1/12 \quad (2.1.9) \qquad \sum_{i=3}^{6} a_i q_{i-2} c_i = 1/15 \quad (2.1.10)$$

$$\sum_{i=3}^{6} p_{i-2}^2 c_i = 1/20 \quad (2.1.11) \qquad \sum_{i=3}^{6} r_{i-2} c_i = 1/20 \quad (2.1.12) \qquad \sum_{i=4}^{6} \left(\sum_{j=1}^{3} p_j b_{i,j+2} \right) c_i = 1/24 \quad (2.1.13)$$

$$\sum_{i=4}^{6} \left(\sum_{j=1}^{i-3} q_j b_{i,j+2} \right) c_i = 1/60 \quad (2.1.14) \qquad \sum_{i=4}^{6} \left(\sum_{j=3}^{i-1} (a_j + a_i) p_{j-2} b_{ij} \right) c_i = 7/120 \quad (2.1.15)$$

$$p_1 b_{53} b_{54} c_5 + \left[p_1 b_{63} b_{64} + \left(\sum_{i=1}^{2} p_i b_{5,i+2} \right) b_{65} \right] c_6 = 1/120 \quad (2.1.16)$$

ここで　$a_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \quad (i = 2, 3, 4, 5, 6)$

$$p_i = \sum_{j=2}^{i+1} a_j b_{i+2} \qquad q_i = \sum_{j=2}^{i+1} a_j^2 b_{i+2,j} \qquad r_i = \sum_{j=2}^{i+1} a_j^3 b_{i+2,j}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4) \qquad (2.1.17)$$

である。

2.2 (1.1) が連立微分方程式である場合の条件式群

(2.1.15) が次の 2 つの方程式に分れる以外は上と全く同じ

である。　$\sum_{i=4}^{6} \left(\sum_{j=3}^{i-1} a_j p_{j-2} b_{ij} \right) c_i = 1/40 \quad (2.1.15-1)$

$$\sum_{i=4}^{6} \left(\sum_{j=1}^{i-3} p_j b_{i,j+2} \right) a_i c_i = 1/30 \quad (2.1.15-2)$$

2.3 条件式群の解

単一の微分方程式に対する条件式群の解は，連立微分方程式に対する条件式群の解になっている。

2.3.1 $c_2 = 0$ の場合 (C. R. Cassity [7],[8] を見よ.)

$$\frac{8}{9} a_3 a_4 a_5 a_6 - \frac{1}{6} (a_3 a_4 a_5 + a_3 a_4 a_6 + a_3 a_5 a_6 + a_4 a_5 a_6)$$

$$+ \frac{1}{3} (a_3 a_4 + a_3 a_5 + a_3 a_6 + a_4 a_5 + a_4 a_6 + a_5 a_6) - \frac{1}{4} (a_3 + a_4 + a_5 + a_6)$$

$+ \frac{1}{5} \neq 0$　のとき，次の三つの解系に分れる。

(A) 解系 I …… $10a_3^2a_4 - 8a_3a_4 - a_3 + 2a_4 = 0$ の場合

この場合自由パラメータは a_2, a_3, a_5, a_6 である。

(B) 解系 II …… $10a_3^2a_4 - 8a_3a_4 - a_3 + 2a_4 = 0$ かつ $a_2 = a_3$ の場合

この場合自由パラメータは a_2, a_5, a_6 である。

(C) 解系 III …… $a_6 = 1$ の場合

この場合自由パラメータは a_2, a_3, a_4, a_5 および b_{43} である。

2.3.2 $c_2 \neq 0$ の場合 （C.R. Cassity[7],[8] を見よ）

条件式群 (2.1.1)～(2.1.17) に式 $\sum_{i=2}^{6} a_i^5 c_i = \beta$ (2.1.18) を加える。そのとき $a_6 = 1$ の場合の解は，自由パラメータ $a_2, a_3, a_4, a_5, b_{43}, c_1$ (or β) をもつ。

§3. 打ち切り誤差とその大小の判定他

5次 Runge-Kutta法(以下陽的を省略する)の $x = x_n$ における局所打ち切り誤差を T とおけば， $T = \gamma_5 h^6 + O(h^7)$ (3.1) と書くことができる。ここで γ_5 は，(1.1) が単一であるかまたは連立であるかにしたがって，次のように表される。

(i) (1.1)が単一の微分方程式である場合

$$\begin{aligned}\gamma_5 = {} & a_{5,1} D^5 f + a_{5,2} f_y D^4 f + a_{5,3} f_y^2 D^3 f + a_{5,4} f_y^3 D^2 f + a_{5,5} f_y^4 Df \\ & + a_{5,6} D^3 f Df_y + a_{5,7} f_y D^2 f Df_y + a_{5,8} f_y^2 Df Df_y + a_{5,9} D^3 f_y Df + a_{5,10} f_y D^2 f_y Df \\ & + a_{5,11} D^2 f_y D^2 f + a_{5,12} f_{yy} D^2 f Df + a_{5,13} f_y f_{yy} (Df)^2 + a_{5,14} Df_{yy} (Df)^2 \\ & + a_{5,15} (Df_y)^2 Df \Big|_{\substack{x = x_n \\ y = y_n}} \qquad (3.2)\end{aligned}$$

(ii) (1.1) が連立微分方程式である場合

$$
\begin{aligned}
\gamma_5 = {} & a^*_{5,1}\{_5 f\}_5 + a^*_{5,2}\{_4 f^2\}_4 + a^*_{5,3}\{_3\{f\}f\}_3 + a^*_{5,4}\{_3 f^3\}_3 + a^*_{5,5}\{_2\{_2 f\}_2 f\}_2 \\
& + a^*_{5,6}\{_2\{f^2\}f\}_2 + a^*_{5,7}\{_2\{f\}^2\}_2 + a^*_{5,8}\{_2\{f\}f^2\}_2 + a^*_{5,9}\{_2 f^4\}_2 \\
& + a^*_{5,10}\{\{_3 f\}_3 f\} + a^*_{5,11}\{\{_2 f^2\}_2 f\} + a^*_{5,12}\{\{\{f\}f\}f\} + a^*_{5,13}\{\{f^3\}f\} \\
& + a^*_{5,14}\{\{_2 f\}_2\{f\}\} + a^*_{5,15}\{\{f^2\}\{f\}\} + a^*_{5,16}\{\{_2 f\}_2 f^2\} + a^*_{5,17}\{\{f^2\}f^2\} \\
& + a^*_{5,18}\{\{f\}^2 f\} + a^*_{5,19}\{\{f\}f^3\} + a^*_{5,20}\{f^5\}\Big|_{\substack{x=x_n \\ y=y_n}} \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

ここで，$a_{5,j}$，$a^*_{5,j}$ は公式の係数のみの関数で，$D=\frac{\partial}{\partial x}+f_n\frac{\partial}{\partial y}$，$\{_5 f\}_5$，$\{_4 f^2\}_4$，…等の $a^*_{5,j}$ の係数は，微分方程式の右辺の関数ベクトル f から導かれたものである（詳細については Butcher [3] を参照されたい）。(3.2) 及び (3.3) における右端の $\Big|_{\substack{x=x_n \\ y=y_n}}$ は関数が (x_n, y_n) で評価されることを示す。

打ち切り誤差項の主項の大小を判定するために，(3.2) 及び (3.3) に対して，それぞれ次に示す3種類及び2種類の精度判定基準を定義する。

$$
\begin{aligned}
A_{51} = {} & 32|a_{5,1}| + |4a_{5,2} + a_{5,9}| + |6a_{5,2} + 3a_{5,9}| + |4a_{5,2} + 3a_{5,9}| \\
& + |a_{5,2} + a_{5,9}| + |a_{5,2}| + |a_{5,3}| + |3a_{5,3} + a_{5,10}| + |3a_{5,3} + 2a_{5,10} + a_{5,14}| \\
& + |a_{5,3} + a_{5,10} + a_{5,14}| + |a_{5,4}| + |2a_{5,4} + a_{5,8}| + |a_{5,4} + a_{5,8} + a_{5,13}| \\
& + 2|a_{5,5}| + |3a_{5,6} + 2a_{5,11}| + |3a_{5,6} + 4a_{5,11}| + |a_{5,6} + 2a_{5,11}| + 2|a_{5,6}| \\
& + |3a_{5,6} + 2a_{5,11}| + |a_{5,6} + a_{5,11}| + |3a_{5,6} + a_{5,11}| + |a_{5,7}| + |a_{5,7} + a_{5,12}| \\
& + |2a_{5,7} + a_{5,13}| + |3a_{5,7} + 2a_{5,12} + 2a_{5,15}| + |a_{5,7} + a_{5,12} + a_{5,15}| \\
& + |a_{5,8} + 2a_{5,13}| + |a_{5,8}| + 8|a_{5,9}| + |a_{5,10}| + |2a_{5,10} + 2a_{5,14}| + |a_{5,10} \\
& + 2a_{5,14}| + 4|a_{5,11}| + |2a_{5,12} + 2a_{5,15}| + |a_{5,12}| + |a_{5,12} + a_{5,15}| \\
& + |a_{5,13}| + 2|a_{5,14}| + |a_{5,15}| \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

$$A_{52} = \sum_{j=1}^{15} |a_{5,j}| \qquad (3.5) \qquad\qquad A_{53} = \sum_{j=1}^{15} a_{5,j}^{2} \qquad (3.6)$$

$$A_{52}^{*} = \sum_{j=1}^{20} |a_{5,j}^{*}| \qquad (3.7) \qquad\qquad A_{53}^{*} = \sum_{j=1}^{20} a_{5,j}^{*2} \qquad (3.8)$$

M, L がそれぞれ $|f(x,y)| \leqq M$, $\left|\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^{i} \partial y^{j}}\right| \leqq \frac{L^{i+j}}{M^{j-1}}$, $i+j \leqq 6$ を満足する定数であるとき, A_{51} は γ_5 の Lotkin の意味の誤差限界 $|\gamma_5| \leqq A_{51} M L^6$ の, 公式の係数のみに依存する部分である。

なお丸め誤差に関する性質の良否を判定するために

$$R_0 = \sum_{i=1}^{6} |c_i| + \sum_{i=2}^{6} \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}| \qquad (3.9)$$

を定義する。

§4. 安定性

テスト方程式 $y' = \lambda y$ (λ: 複素定数) (4.1) を (1.2) に代入すると,

$$y_{n+1} = \left\{ 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2!} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \frac{(h\lambda)^4}{4!} + \frac{(h\lambda)^5}{5!} + \alpha_6 \frac{(h\lambda)^6}{6!} \right\} y_n \qquad (4.2)$$

が得られる。ここで $\alpha_6 = 6!\, b_{21} b_{32} b_{43} b_{54} b_{65} c_6$ である。

そのとき

$$S = \left\{ h\lambda \;\middle|\; \left| 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2!} + \frac{(h\lambda)^3}{3!} + \frac{(h\lambda)^4}{4!} + \frac{(h\lambda)^5}{5!} + \alpha_6 \frac{(h\lambda)^6}{6!} \right| < 1 \right\} \qquad (4.3)$$

によって与えられる複素平面上の集合 S を, (1.2) の絶対安定領域という。また $S \cap R$ (R: 実数空間) を (1.2) の絶対安定区間という。§6. において, 我々は絶対安定区間が最大でしかも打ち切り精度のよい公式が存在するかどうかを調べる。

§5. 打ち切り精度の面における5次法の改良 I

知られている公式は, 一例を除いてすべて $c_2 = 0$ 型である

が，ここでは丸め誤差に関する性質を悪化させることなく打ち切り精度を改良することを考える。丸め誤差に関する性質は(3.9)のR_0の大小で判定し，打ち切り精度は(3.4)～(3.8)の$A_{5,j}$及び$A^*_{5,j}$によって測る。

5.1 $C_2=0$型公式の場合

改良は2段階に分けて行われた。

第1段階（Mesh法）

各解系について，自由パラメータを**表1**に示す刻み幅で変域全体を変動させるときに得られるすべての多次元格子点について，前記の$A_{5,j}$，$A^*_{5,j}$及びR_0を計算し，許されたR_0の制限内で，min $A_{5,2}$及びmin $A^*_{5,2}$を与える自由パラメータの組を選び，対応する公式の係数を決定した。上記の方法をMesh法と呼ぼう。

第2段階（Complex法）([18],[19])

初期点をMesh法によって選ばれた最適公式及びよく知られた公式の自由パラメータの組とし，最適化手法の一つであるM. J. BoxによるSimplex法を用いて，$A_{5,2}$及び$A^*_{5,2}$の最小化を試みる。得られた単一の微分方程式に対する公式3例，連立微分方程式に対する公式1例を次に示す。

表1. Mesh 法による最適化（$C_2=0$ の場合）

解系	自由パラメータとその変域	刻み幅
I	$0 < a_2, a_3, a_5 \leqq 1$ $0 < a_6 < 1$	10^{-1} 及び 2^{-5}
II	$0 < a_2, a_5 \leqq 1$ $0 < a_6 < 1$	10^{-1} 及び 2^{-5}
III	$0 < a_2, a_3, a_4, a_5 \leqq 1$ $0 \leqq b_{43} \leqq 2$	10^{-1} 及び 2^{-5}

［公式 1］（$C_2=0$, 解系 I）

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
\frac{13}{47} & \frac{13}{47} & & & & & \\
\frac{13}{47} & \frac{13}{94} & \frac{13}{94} & & & & \\
\frac{611}{1220} & \frac{62551}{1319261} & -\frac{139239}{494270} & \frac{238863}{324934} & & & \\
\frac{69}{80} & \frac{150894}{450631} & \frac{92334}{1071959} & -\frac{76201}{134526} & \frac{273092}{270917} & & \\
\frac{56}{65} & -\frac{34393}{4954512} & \frac{147512}{1817365} & \frac{174004}{309961} & \frac{25034}{6160959} & \frac{49852}{224689} & \\
\hline
 & \frac{111160}{1149711} & 0 & \frac{69813}{218696} & \frac{122410}{481873} & \frac{323816}{2583995} & \frac{106387}{783349}
\end{array}
$$

［公式 2］（$C_2=0$, 解系 III）

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & & & & & & \\
\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & & & & & \\
\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & & & & \\
\frac{5}{8} & \frac{47}{16} & -\frac{33}{8} & \frac{29}{16} & & & \\
\frac{3}{4} & -\frac{87}{60} & \frac{67}{30} & -\frac{13}{30} & \frac{2}{5} & & \\
1 & -\frac{1}{115} & -\frac{8}{115} & \frac{82}{115} & -\frac{42}{115} & \frac{18}{23} & \\
\hline
 & \frac{11}{150} & 0 & \frac{52}{135} & \frac{128}{675} & \frac{4}{15} & \frac{23}{270}
\end{array}
$$

〔公式 3〕($c_2=0$, 解系Ⅲ)

0						
603/10000	603/10000					
6/25	−398/1675	32/67				
16/25	98393/30150	−2800/603	101/50			
3/4	−939931/274432	43625/8576	−5715/4096	495/1024		
1	102217/99385	−109625/73566	12065/11712	−3705/21472	1216/2013	
	235/3456	0	3125/8208	3125/12672	64/297	61/684

〔公式 4〕($c_2=0$, 解系Ⅲ) 連立微分方程式に対する公式

0						
193/1250	193/1250					
63/250	4473/96500	3969/19300				
3/5	1723/4825	−2349/1930	73/50			
383/500	77867/3206475	425551/776743	−101989/383792	812553/7767995		
1	−60857/282355	87027/1296563	263727/274487	−202791/324298	123250/151611	
	32891/434322	0	50879/134371	12475/64989	104237/379567	1153/14586

5.2 $c_2 \neq 0$ 型公式の場合

改良は $c_2=0$ 型公式の場合と同様 2 段階に分けて行われた。

第 1 段階 (Mesh 法)

自由パラメータを、表 2 に示す刻み幅で変域全体を変動させるときに得られるすべての多次元格子点について、前記の $A_{5,j}$, $A^*_{5,j}$ 及び R_0 を計算し、$\min A_{5,j}$ 及び $\overbrace{\min A^*_{5,j} \text{ と } R_0}^{\text{を与える係数の組を}}$ について制限

つぎまたは制限なしで求めた。係数の計算式に含まれる根号内を特に0にすると，C_1が自由パラメータでなくなり5自由度となる。

表2. Mesh法による最適化($c_2 \neq 0$の場合)

解系	自由パラメータとその変域	刻み幅
根号内 $\neq 0$	$0 < a_2, a_3, a_4, a_5, b_{43}, C_1 \leqq 1$	2^{-3}
根号内 $= 0$	$0 < a_2, a_3, a_4, a_5 \leqq 1$ $-1 \leqq b_{43} \leqq 3$	2^{-3}
	$0 < a_2, a_3, a_4, a_5, b_{43} \leqq 1$	10^{-1}

第2段階

初期点をMesh法によって選ばれた最適公式及び知られている公式の自由パラメータの組とし，Complex法を用いて$A_{5,2}$及び$A^*_{5,2}$の最小化を試みる。得られた単一微分方程式に対する公式1例及び連立微分方程式に対する公式2例を次に示す。

〔公式5〕

$$
\begin{array}{l|llllll}
(0.0) & & & & & & \\
(0.0211402552170898) & (0.0211402552170898) & & & & & \\
(0.188634651002125) & (-0.641462728842467) & (0.830097379844592) & & & & \\
(0.469335156819706) & (3.10710721024121) & (-3.63702791015105) & (0.999255856729549) & & & \\
(0.669091390777035) & (-1.15079632316185) & (1.56876048970942) & (-0.260168067819940) & (0.511295292049403) & & \\
(1.0) & (12.0775447537496) & (-15.2005354725058) & (5.10256828517781) & (-2.57260016505107) & (1.59302259862943) & \\
\hline
 & (0.299935211291022) & (-0.329519015923040) & (0.457792232191287) & (-0.0213748681317877 4) & (0.491144143160597) & (0.102022297411922)
\end{array}
$$

〔公式 6〕 連立微分方程式に対する公式

c					
0.0					
0.04140708068939672	0.04140708068939672				
0.184189677798903	−0.209500716587076	0.393690394385979			
0.528832660270466	2.575019077815974	−3.63733492018888	1.59114850229960		
0.666746653755744	0.493594751235901	−0.576544438704292	0.434427837783176	0.315268503440959	
1.0	1.66006569631664	−2.98006818551266	2.42168981517284	−1.77088240776699	1.66919508179017
	0.199915665460040	−0.263640056894282	0.493161567898496	−0.04145549745924295	0.510164435232456
	0.101853885762527				

〔公式 7〕 連立微分方程式に対する公式

c					
0.0					
0.01378375611616331	0.01378375611616331				
0.172078557047508	−0.886833349014579	1.05891190608209			
0.517979444129504	9.31559825064623	−10.4165734892820	1.61895468276527		
0.648777654777929	2.71315267738351	−2.94825524297633	0.596795284571871	0.287084935798881	
1.0	7.38041903049620	−8.91521297310665	2.73203954139356	−2.14307577879712	1.94583018001400
	0.750351799485475	−0.847893909081646	0.53080152155844	−0.120453112765459	0.582120882238395
	0.105072818564801				

§6. 打ち切り精度の面における5次法の改良 II

(4.3) の $\alpha_6 \approx 0.560$ のとき，同式によって定義される (1.2) の絶対安定領域 S が最大になることが知られている [6]。以下において，$C_2=0$ と $C_2 \neq 0$ の二つの場合について，絶対安定領域が最大でしかも打ち切り精度が可能な限りよい公式を導く。

6.1 $C_2=0$ 型公式の場合

Lawson 型の公式は解系III に含まれるが、ここでも同じ系について考えよう。この系には表1で見るように5つの自由パラメータが存在するが、まずその中で b_{43} を $\alpha_6 \approx 0.560$ になるように次式によって定め、自由パラメータから除外する。

$$b_{43} = \frac{0.56}{6!\, b_{21} b_{32} b_{54} b_{65} c_6} \qquad (6.1.1)$$

ついで、残りのパラメータを変域 $0 < a_2, a_3, a_4, a_5 \leqq 1$ において刻み幅0.1で変動させ、得られる4次元格子点のすべてについて $A_{5,2}$, $A^*_{5,2}$ 及び R_0 を計算し、$R_0 \leqq 20$ なる制限のもとで $\min\limits_{\{a_i, c_i\}} A_{5,2}$ 及び $\min\limits_{\{a_i, c_i\}} A^*_{5,2}$ を与えるパラメータの組を求めた。そして、そのようにして得られたパラメータの組を初期点に選び、complex 法を用いてさらに最適化を進めた。また他方では Mesh 法で得られた最適パラメータの周辺を、さらに刻み幅を小さくしてくり返し探索した。得られた公式2例を次に示す。

〔公式 8〕

(0.0)						
(0.25)	(0.25)					
(0.265)	(0.12455)	(0.14045)				
(0.695)	(−0.200123217040465)	(−0.286989832285115)	(1.18211304932558)			
(0.72)	(0.122056095124881)	(−0.365572613264035)	(0.741978666955124)	(0.221537851184030)		
(1.00)	(0.179818451968210)	(1.02404974764087)	(−0.840430885733904)	(−0.335064551975748)	(0.971627238100573)	
	(0.07848186859317452)	(0.0)	(0.406304281079290)	(0.124338196236759)	(0.303433339147625)	(0.08744231494315166)

〔公式9〕 連立微分方程式に対する公式

(0.0)					
(0.19)	(0.19)				
(0.265)	(0.08019736842105264)	(0.184802631578947)			
(0.695)	(−0.109494848950429)	(−0.377618200375151)	(1.18211304932558)		
(0.753)	(0.797995018422359)	(−0.633718519564683)	(0.0122135222712211)	(0.376509978871102)	
(1.0)	(−0.30961213128076)	(1.41303730899423)	(−0.654359921096256)	(0.171130541131648)	(0.379804202251141)
	(0.0787183320952269)	(0.0)	(0.405069510474424)	(0.298077496302875)	(0.132179919916599)
					(0.08596124009657895)

6.2 $c_2 \neq 0$ 型公式の場合

自由パラメータ $a_2, a_3, a_4, a_5, b_{43}$ および c_1 の中で b_{43} は, $c_1 = 0$ の場合と同様に (6.1.1) により決定されるので,自由パラメータから除外される。残りの各自由パラメータの変域を $0 < a_2, a_3, a_4, a_5, c_1 \leqq 1.0$ とし，まず各パラメータを0.1刻みで変動させて得られるすべての5次元格子点の中で，$R_0 \leqq 10$ なる制限のもとで $\min\limits_{\{a_i, c_i\}} A_{5,2}$ 及び $\min\limits_{\{a_i, c_i\}} A^*_{5,2}$ を与える自由パラメータの組を選んだ。ついで，一方ではそれらの最適パラメータの組を初期点にとり，complex法を用いてさらに最適化を進めた。また他方では，最適パラメータの周辺をさらに刻み幅を小さくしてくり返し探索した。得られた公式2例を次に示す。

〔公式10〕

0.0	
$\frac{8648263}{51545625}$	$\frac{8648263}{51545625}$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\frac{80750416}{137483609} & -\frac{31606479}{63970966} & \frac{100192076}{92648527} & & & & \\
\frac{20250000}{450000001} & -\frac{6945203}{1865192220} & \frac{23222233}{169469649} & -\frac{30280403}{342905934} & & & \\
\frac{315152139}{401467693} & \frac{55087763}{35324281} & -\frac{47581641}{192979394} & \frac{131478864}{192945911} & \frac{-89776109}{74234859} & & \\
1 & -\frac{41483111}{40465167} & \frac{78955679}{252816567} & \frac{42807988}{995155907} & \frac{628138318}{519871169} & \frac{50463876}{109329073} & \\
\hline
 & \frac{31547275}{313847082} & \frac{89118629}{219641305} & \frac{58832253}{170105992} & -\frac{32583312}{256707733} & \frac{53150385}{283498924} & \frac{13343813}{152802840}
\end{array}
$$

［公式11］連立微分方程式に対する公式

$$
\begin{array}{c|cccccc}
\frac{114999}{1000000} & \frac{114999}{1000000} & & & & & \\
\frac{199999}{1000000} & \frac{22621079}{390809906} & \frac{21415341}{150688699} & & & & \\
\frac{154941072}{264163139} & \frac{5922839}{1617521439} & -\frac{21858109}{29254327} & \frac{140379017}{105544235} & & & \\
\frac{90984581}{131007625} & \frac{54171113}{215966026} & -\frac{145620920}{239286099} & \frac{37145194}{47167177} & \frac{52677608}{199002189} & & \\
1 & -\frac{25548691}{248292912} & -\frac{41327991}{144822343} & \frac{4647942}{4079695} & -\frac{84347903}{70771604} & \frac{184778683}{128245998} & \\
\hline
 & \frac{41088539}{383319661} & -\frac{26769203}{106411648} & \frac{31626839}{53336407} & \frac{10419679}{808065009} & \frac{142576969}{320901859} & \frac{37718337}{400377713}
\end{array}
$$

§5及び§6において導かれた公式及びよく知られた公式の，単一の微分方程式及び連立微分方程式に対する各種判定基準を表3及び表4に示す。

§7. 数値例

多くの問題について数値実験を試みたが，ほぼ同様な結果が得られているので，ここでは単一微分方程式及び連立微分方程式の各1問に対する結果のみを，表5及び表6に掲げる。知られている公式については，特性のすぐれている公式のみを取り上げた。公式の配列の順序は，一部を除いて（19頁へ）

表 3. 各公式の精度判定基準と絶対安定区間
(単一の微分方程式の場合) I_s は絶対安定区間

公式	解系	A_{51}	A_{52}	A_{53}	I_s	R_o
Shanks	3	0.10269×10^{-2}	0.18704×10^{-3}	0.57797×10^{-8}	$-3.55 \sim 0.0$	12570.3
Fehlberg	3	0.46296×10^{-2}	0.11728×10^{-2}	0.53346×10^{-6}	$-3.19 \sim 0.0$	27.9
Butcher (1)	3	0.12891×10^{-2}	0.19965×10^{-2}	0.67346×10^{-6}	$-3.39 \sim 0.0$	10.5
Butcher (2)	3	0.16319×10^{-1}	0.24306×10^{-2}	0.84018×10^{-6}	$-3.39 \sim 0.0$	9.0
Lawson	3	0.18403×10^{-1}	0.36458×10^{-2}	0.15296×10^{-5}	$-5.6 \sim 0.0$	7.8
Butcher (3)	3	0.16146×10^{-1}	0.41667×10^{-2}	0.26373×10^{-5}	$-3.39 \sim 0.0$	9.3
Kutta's family	3	0.35301×10^{-1}	0.71257×10^{-2}	0.71907×10^{-5}	$-3.21 \sim 0.0$	8.5
Nyström	1	0.31519×10^{-1}	0.73333×10^{-2}	0.14134×10^{-4}	$-3.12 \sim 0.0$	12.3
Luther (Radau family)	1	0.31657×10^{-1}	0.83662×10^{-2}	0.14728×10^{-4}	$-3.22 \sim 0.0$	9.5
Butcher (5)	3	0.47704×10^{-1}	0.84815×10^{-2}	0.11160×10^{-4}	$-3.21 \sim 0.0$	22.0
Luther (1)	2	0.63194×10^{-1}	0.13368×10^{-1}	0.32869×10^{-4}	$-2.53 \sim 0.0$	5.4
Sarafyan	2	0.65481×10^{-1}	0.13994×10^{-1}	0.27367×10^{-4}	$-2.65 \sim 0.0$	7.5
Luther (2)	1	0.80382×10^{-1}	0.17535×10^{-1}	0.47969×10^{-4}	$-2.65 \sim 0.0$	7.1
Luther & Konen	1	0.71949×10^{-1}	0.17821×10^{-1}	0.48785×10^{-4}	$-2.65 \sim 0.0$	8.0
Casity	$C_2\neq0$	0.87755×10^{-1}	0.27890×10^{-1}	0.18230×10^{-3}	$-2.17 \sim 0.0$	89.1
Butcher (4)	3	0.27704×10^{-1}	0.51481×10^{-2}	0.37531×10^{-5}	$-3.22 \sim 0.0$	21.2
England	2	0.67593×10^{-1}	0.13944×10^{-1}	0.27367×10^{-4}	$-2.65 \sim 0.0$	7.5
公式 1	1	0.72437×10^{-2}	0.10836×10^{-2}	0.15500×10^{-6}	$-3.68 \sim 0.0$	4.7
公式 2	3	0.47635×10^{-2}	0.99826×10^{-3}	0.10416×10^{-6}	$-3.43 \sim 0.0$	17.2
公式 3	3	0.38036×10^{-2}	0.78336×10^{-3}	0.76413×10^{-6}	$-3.43 \sim 0.0$	26.4
公式 5	$C_2\neq0$	0.32474×10^{-2}	0.67324×10^{-3}	0.88082×10^{-6}	$-3.36 \sim 0.0$	16.7
公式 8	3	0.94670×10^{-2}	0.27480×10^{-2}	0.16232×10^{-5}	$-5.6 \sim 0.0$	7.9
公式 10	$C_2\neq0$		0.20900×10^{-2}	0.78812×10^{-6}	$-5.6 \sim 0.0$	10.0

表の下部にある公式1～公式10は新規に提案したもので，特に公式8及び公式10は絶対安定区間最大の公式である。表3及び表4において，知られている公式はA_{52}とA_{52}^*が次第に大きくな

表4. 各公式の打ち切り精度判定基準と絶対安定区間
(連立微分方程式の場合)

公式	解 車	A_{52}^{*}	A_{53}^{*}	I_s	R_0
Shanks	3	0.18704×10^{-3}	0.55225×10^{-8}	$-3.55\sim0.0$	12570.3
Fehlberg	3	0.11728×10^{-2}	0.44772×10^{-6}	$-3.19\sim0.0$	27.9
Butcher(1)	3	0.23438×10^{-2}	0.72621×10^{-6}	$-3.39\sim0.0$	10.5
Butcher(2)	3	0.29514×10^{-2}	0.96074×10^{-6}	$-3.39\sim0.0$	9.0
Lawson	3	0.48611×10^{-2}	0.21927×10^{-5}	$-5.6\sim0.0$	7.8
Butcher(3)	3	0.59028×10^{-2}	0.43855×10^{-5}	$-3.39\sim0.0$	9.3
Kutta's family	3	0.82773×10^{-2}	0.68887×10^{-5}	$-3.21\sim0.0$	8.5
Butcher(4)	3	0.90370×10^{-2}	0.70710×10^{-5}	$-3.22\sim0.0$	21.2
Luther (Radau family)	1	0.10588×10^{-1}	0.14240×10^{-4}	$-3.22\sim0.0$	9.5
Nyström	1	0.10944×10^{-1}	0.14751×10^{-4}	$-3.12\sim0.0$	12.3
Butcher(5)	3	0.12370×10^{-1}	0.16830×10^{-4}	$-3.21\sim0.0$	22.0
Luther(1)	2	0.15972×10^{-1}	0.35521×10^{-4}	$-2.53\sim0.0$	5.4
Luther (2)	1	0.21701×10^{-1}	0.52430×10^{-4}	$-2.65\sim0.0$	7.1
Sarafyan	2	0.23667×10^{-1}	0.54181×10^{-4}	$-2.65\sim0.0$	7.5
Luther & Konen	1	0.25625×10^{-1}	0.68707×10^{-4}	$-2.65\sim0.0$	8.0
Cassity	$C_2\neq0$	0.30178×10^{-1}	0.18401×10^{-3}	$-2.17\sim0.0$	89.1
England	2	0.24752×10^{-1}	0.56865×10^{-4}	$-2.65\sim0.0$	7.5
公式4	3	0.16908×10^{-2}	0.28592×10^{-6}	$-3.58\sim0.0$	8.4
公式6	$C_2\neq0$	0.84808×10^{-3}	0.83117×10^{-7}	$-3.55\sim0.0$	22.4
公式7	$C_2\neq0$	0.73310×10^{-3}	0.83589×10^{-7}	$-3.55\sim0.0$	55.9
公式9	3	0.30227×10^{-2}	0.13277×10^{-5}	$-5.60\sim0.0$	7.9
公式11	$C_2\neq0$	0.28587×10^{-2}	0.13259×10^{-5}	$-5.60\sim0.0$	10.0

るように配列されている(一部を除く)。表4において公式4～公式11は新規に提案したもので，そのうち公式9及び公式11は絶対安定区間が最大の公式である。表3及び表4に引用されている"知られている公式"を具体的に知りたい方の便宜のために，22頁に引用文献・掲載頁などを示した。

表 5　$y' = \dfrac{2y}{1+x}$, $y(0) = 1$ の数値解における誤差

刻み幅 $h = 0.1$, ステップ数 80 , 解 $y = (1+x)^2$

公式	最初のステップの誤差	最終ステップの誤差	最大誤差	相対最大誤差
公式 5	$0.42999382 \times 10^{-9}$	$0.35494917 \times 10^{-7}$	$0.35494917 \times 10^{-7}$	$0.98596992 \times 10^{-9}$
Shanks	$0.56924154 \times 10^{-9}$	$0.46078767 \times 10^{-7}$	$0.46078767 \times 10^{-7}$	$0.12799658 \times 10^{-8}$
公式 2	$0.24893883 \times 10^{-8}$	$0.20627061 \times 10^{-6}$	$0.20627061 \times 10^{-6}$	$0.57297393 \times 10^{-8}$
公式 3	$0.34097554 \times 10^{-8}$	$0.27991447 \times 10^{-6}$	$0.27991447 \times 10^{-6}$	$0.77754021 \times 10^{-8}$
Butcher(1)	$0.63660495 \times 10^{-8}$	$0.52120303 \times 10^{-6}$	$0.52120303 \times 10^{-6}$	$0.14477862 \times 10^{-7}$
公式 1	$0.70383737 \times 10^{-8}$	$0.56256177 \times 10^{-6}$	$0.56256177 \times 10^{-6}$	$0.15626716 \times 10^{-7}$
Fehlberg	$0.15008864 \times 10^{-7}$	$0.12292661 \times 10^{-5}$	$0.12292661 \times 10^{-5}$	$0.34146282 \times 10^{-7}$
公式 10	$0.17768064 \times 10^{-7}$	$0.14228823 \times 10^{-5}$	$0.14228823 \times 10^{-5}$	$0.39524509 \times 10^{-7}$
公式 8	$0.24150919 \times 10^{-7}$	$0.19192392 \times 10^{-5}$	$0.19192392 \times 10^{-5}$	$0.53312201 \times 10^{-7}$
Lawson	$0.40924601 \times 10^{-7}$	$0.32633892 \times 10^{-5}$	$0.32633892 \times 10^{-5}$	$0.90649699 \times 10^{-7}$
Luther(1)	$0.17932416 \times 10^{-6}$	$0.14483802 \times 10^{-4}$	$0.14483802 \times 10^{-4}$	$0.40232783 \times 10^{-6}$
Luther(2)	$0.22099285 \times 10^{-6}$	$0.17866871 \times 10^{-4}$	$0.17866871 \times 10^{-4}$	$0.49630197 \times 10^{-6}$

表 6

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 + y_2 & y_1(0) = 2.0 \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + y_3 & y_2(0) = 0.0 \\ y_3' = y_2 - y_3 & y_3(0) = 1.0 \end{cases}$$

の数値解における誤差

刻み幅 0.1　ステップ数 80

解 $y_1 = 0.5e^{-3x} + 0.5e^{-x} + 1$　$y_2 = -e^{-3x} + 1$

$y_3 = 0.5e^{3x} - 0.5e^{-x+1}$

公式	最初のステップの誤差	最終ステップの誤差	最大誤差	相対最大誤差
公式 4	$0.13706064 \times 10^{-7}$	$0.13988810 \times 10^{-13}$	$0.22566077 \times 10^{-7}$	$0.15002298 \times 10^{-7}$
公式 7	$0.20219427 \times 10^{-7}$	$0.26800784 \times 10^{-12}$	$0.33297131 \times 10^{-7}$	$0.22139718 \times 10^{-7}$
Shanks	$0.20918939 \times 10^{-7}$	$0.30020431 \times 10^{-12}$	$0.34449608 \times 10^{-7}$	$0.22906252 \times 10^{-7}$
公式 6	$0.21430382 \times 10^{-7}$	$0.31818992 \times 10^{-12}$	$0.35292232 \times 10^{-7}$	$0.23466697 \times 10^{-7}$

〈y_1の誤差〉	Butcher(1)	0.84286995×10^{-7}	0.28808067×10^{-11}	0.13885131×10^{-6}	0.92345743×10^{-7}
	Fehlberg	0.18990042×10^{-6}	0.71742612×10^{-11}	0.31285422×10^{-6}	0.20807831×10^{-6}
	公式 9	0.20086925×10^{-6}	0.87045926×10^{-11}	0.33095606×10^{-6}	0.22013168×10^{-6}
	Lawson	0.20086925×10^{-6}	0.87057028×10^{-11}	0.33095606×10^{-6}	0.22013168×10^{-6}
	公式 11	0.20095138×10^{-6}	0.87114766×10^{-11}	0.33109136×10^{-6}	0.22022168×10^{-6}
	Luther(2)	0.12464422×10^{-5}	0.51191273×10^{-10}	0.20535769×10^{-5}	0.13658761×10^{-5}
	Luther(1)	0.16266505×10^{-5}	0.66639805×10^{-10}	0.26799821×10^{-5}	0.17825080×10^{-5}
〈y_2の誤差〉	公式 4	0.27412293×10^{-7}	0.11726731×10^{-13}	0.45132557×10^{-7}	0.10576474×10^{-6}
	公式 7	0.40421176×10^{-7}	0.38719028×10^{-14}	0.66550839×10^{-7}	0.15595686×10^{-6}
	Shanks	0.41818282×10^{-7}	0.67584827×10^{-14}	0.68851082×10^{-7}	0.16134731×10^{-6}
	公式 6	0.42839764×10^{-7}	0.44270143×10^{-14}	0.70532887×10^{-7}	0.16528849×10^{-6}
	Butcher(1)	0.16838078×10^{-6}	0.10505485×10^{-13}	0.27722806×10^{-6}	0.64966288×10^{-6}
	Fehlberg	0.37931828×10^{-6}	0.11088352×10^{-13}	0.62452318×10^{-6}	0.14635222×10^{-5}
	Lawson	0.40115047×10^{-6}	0.13003487×10^{-13}	0.66046778×10^{-6}	0.15477572×10^{-5}
	公式 11	0.40131449×10^{-6}	0.11532442×10^{-13}	0.66073783×10^{-6}	0.15483901×10^{-5}
	公式 9	0.40115047×10^{-6}	0.13974932×10^{-13}	0.66046778×10^{-6}	0.15477572×10^{-5}
	Luther(2)	0.24894317×10^{-5}	0.21538327×10^{-13}	0.40986735×10^{-5}	0.96049642×10^{-5}
	Luther(1)	0.32488067×10^{-5}	0.24924507×10^{-13}	0.53489253×10^{-5}	0.12534858×10^{-4}
〈y_3の誤差〉	公式 4	0.13706229×10^{-7}	0.12503887×10^{-13}	0.22566482×10^{-7}	0.2733535×10^{-7}
	公式 7	0.20201748×10^{-7}	0.25858482×10^{-12}	0.33253708×10^{-7}	0.40275157×10^{-7}
	Shanks	0.20899343×10^{-7}	0.28463343×10^{-12}	0.34401475×10^{-7}	0.41664843×10^{-7}
	公式 6	0.21409383×10^{-7}	0.30757341×10^{-12}	0.35240657×10^{-7}	0.42680900×10^{-7}
	Butcher(1)	0.84093788×10^{-7}	0.28553826×10^{-11}	0.13837675×10^{-6}	0.16755532×10^{-6}
	Fehlberg	0.18941786×10^{-6}	0.71448125×10^{-11}	0.31166896×10^{-6}	0.37737292×10^{-6}
	公式 9	0.20028121×10^{-6}	0.87301000×10^{-11}	0.32951171×10^{-6}	0.39895130×10^{-6}
	Lawson	0.20028121×10^{-6}	0.87292396×10^{-11}	0.32951171×10^{-6}	0.39895130×10^{-6}
	公式 11	0.20036311×10^{-6}	0.87316543×10^{-11}	0.32964647×10^{-6}	0.39911446×10^{-6}
	Luther(2)	0.12429895×10^{-5}	0.51206067×10^{-10}	0.20450966×10^{-5}	0.24761310×10^{-5}
	Luther(1)	0.16221562×10^{-5}	0.66652323×10^{-10}	0.26689432×10^{-5}	0.32314648×10^{-5}

解の精度にしたがっている。

表3及び表4と多くの数値例の観察から，新規に提案した公式の誘導に誤りがないこと，特性を判定基準を用いてとらえることが有意義であることなどが知られる。また，著者たちによる公式は，係数の単純さという点では知られている公式に及ばないが，その意図したように打ち切り精度の面ではまさっている。

§8. 結果の考察

詳述は避けるが，著者たちの調査研究によると，個々の知られている公式は，打ち切り精度，安定性などの面でなお改善の余地を十分に残している。しかし，その際係数がより複雑になることは一般に避けられないように思われる。また，5段数公式の場合と同様に，打ち切り精度を著しく高めようとすると，係数の絶対値の和である R_0 が次第に増大し，丸め誤差に関する性質の劣化が懸念されるようになる。しかし，最近の常微分方程式の数値解法ルーチンは倍精度演算を用いることが多いので，R_0 がかなり大きくても問題はなく，その犠牲によって獲得される高い打ち切り精度は償って余りあると考えられる。知られている公式の中では Butcher (1) がいろいろな観点からすぐれていると思われるが，我々の提案した公式のいくつかは，係数の単純さなどの点を除けば一層すぐれた特性をもっている。最

大の絶対安定領域をもつLawsonの方法は，打ちきり精度の面でなお改良が可能であると思われる（打ちきり精度の点でもかなりよいが…）。また知られている公式と同程度の打ちきり精度をもつ安定領域のさらに大きい公式が開発可能と思われる。

$C_2 \neq 0$ 型公式は，解法が複雑であることなどが原因でほとんど未開拓であるが，我々が示したように $C_2 = 0$ 型公式で可能なことはほとんど可能で，今後同型の公式を上まわる能力をもつ公式の出現も考えられる。

文献

1. W. Kutta, Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differentialgleichungen, Zeit. Math. Physik, 46, 1901
2. E. J. Nyström, Über die numerische Integration von Differentialgleichungen, Acta Soc. Sci. Fennicae, 50, No. 13, 1925
3. J. C. Butcher, On Runge-Kutta process of high order, J. Austral. Math. Soc., 4, 1964
4. E. B. Shanks, Solutions of differential equation by evaluations of functions, Math. Comp., 20, 1966
5. H. A. Luther & H. P. Konen, Some 5th-order classical Runge-Kutta formulas, SIAM Review, Vol. 7, No. 4, 1965
6. J. D. Lawson, An order five Runge-Kutta process with extended region of stability, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 13, No. 4, 1966

7. C. R. Cassity, Solution of the 5th-order Runge-Kutta equation, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 3, No. 4, 1966

8. C. R. Cassity, The complete solution of 5th order Runge-Kutta equations, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 6, No. 3, 1969

9. E. Fehlberg, Classical 5th-, 6th-, 7th, and 8th order Runge-Kutta formulas with step-size control, Nasa. tech. rep. No. 287, 1968

11. D. G. Bettis, Efficient embedded Runge-Kutta methods, Lecture note in mathematics 631, Numerical treatment of ordinary differential equations, A. Dold & B. Eckmann (ed.), 1976

12. R. England, Error estimate for Runge-Kutta type solutions to system of ordinary differential equations, Comput. J. 12, 2, 1969

13. J. H. Verner, Explicit Runge-Kutta methods with estimate of the local truncation error, SIAM J. Numer. Anal., 15, 4, 1978

14. L. Lapidus & J. Seinfeld, Numerical solution of ordinary differential equations, Academic Press, 1971

15. J. D. Lambert, Computational methods in ordinary differential equations, John Wiley, 1973

16. K. R. Jackson, W. H. Enright & T. E. Hull, A theoretical criterion for comparing Runge-Kutta formulas, SIAM J. Numer. Anal. Vol. 15, No. 3, 1978

17. A. Ralston & P. Rabinowitz, A first course in numerical analysis, McGraw-Hill, 1978

[公式]	[文献]	[章節]	[公式番号]	[頁]
Shanks	[14]	2・3・6	(2.3−33)	55
Fehlberg	[14]	2・3・5	(2.3−28)	54
Butcher (1)	[14]	2・3・5	(2・3−19)	51
Butcher (2)	[14]	2・3・5	(2.3−20)	51
Lawson	[14]	2・3・5	(2・3−30)	54
Butcher (3)	[14]	2・3・5	(2・3−21)	52
Kutta's family	[5]	1.	(3)	552
Nyström	[14]	2・3・5	(2・3−16)	50
Luther (Radau family)	[14]	2・3・5	(2・3−25)	53
Butcher (5)	[14]	2・3・5	(2・3−23)	52
Luther (1)	[14]	2・3・5	(2・3−17)	51
Sarafyan	[14]	2・3・5	(2・3−27)	54
Luther (2)	[14]	2・3・5	(2・3−18)	51
Luther & Konen	[5]	1.	(4)	552
Cassity	[7]	3		604, 606
Butcher (4)	[14]	2・3・5	(2・3−22)	52
England	[17]	5・8−5	(5・8−48)	219

18. M. J. Box, D. Davis and W. H. Swann 黒田充訳, 非線形最適化の技法, 培風館

19. M. J. Box, A new method of constrained optimization and comparison with other methods, Comput. J. Vol. 13, 1965 ~ 1966