

## 有限群の subclass algebra について

阪市大理 奥山 哲郎

有限群のモジュラー表現の研究は、大きく、指標理論的、加群論的、群環論的考察に分けられる。ここでは、群環論的考察において興味深いと思われる部分群による subclass algebra などについての性質をいくつか調べてみたい。

以下、 $p$  を素数、 $k$  を標数  $p$  の代数的閉体、 $G$  を有限群とする。 $kG$  で群環を表す。 $kG$  は次の様にして、 $kG \times G$ -加群 (加群は、右加群をいうものとする) ;

$$kG \ni \alpha, G \times G \ni (x, y), \alpha(x, y) = x' \alpha y.$$

§1.

$G$  の部分群  $H$  に対し、 $k(G; H) = C_{kG}(H)$  とおく ( $G$  の  $H$  による subclass algebra)。  $k(G; H)$  は、 $k$  上、 $G$  の  $H$ -共役和で張られている。この節では、 $k(G; H)$  の性質を調べてみたい。

(1.1).  $k(G;H)$  の元を  $kG$  に左からかけることによつて  $kG$  の  $kH \times G$ -準同型がえられるが、これは、同型;

$$k(G;H) \simeq \text{End}_{H \times G}(kG)$$

を与える。また、 $H^A = \{(h, h); h \in H\} \subseteq H \times G$  とおくとき

$$L_0(H^A)^{H \times G} \simeq kG \quad (L_0(H^A) \text{ は trivial } kH^A\text{-加群})$$

(1.2).  $\tau: kH \times G \rightarrow kG$ ,  $\tau((h, g)) = h'g$  とする。

(1).  $\tau$  は  $H \times G$ -準同型で全型である。

(2).  $e \in G$  の block idempotent,  $D \in \Sigma$  の defect group とする。  $D^x \cap H = 1$  for  $\forall x \in G$  ならば、  $kGe$  は projective  $kH \times G$ -加群で、  $\tau$  と、  $kG \rightarrow kGe$  (projection) の合成は、 split-epi である。

興味深いのは (取り扱いやまいのは)、  $H$  が  $p'$ -部分群、  $p$ -部分群のときであるように思われる。以下、この節では、  $H$  を  $p$ -部分群と仮定して議論していく。

(1.3).  $k(G;H)$  は symmetric  $k$ -algebra である。

証明は、  $kG$  が symmetric  $k$ -algebra であることのみ知られた証明が適用できることより得られる。

環  $A$  に対し、 $J(A)$ ,  $S(A)$  で、それぞれ Jacobson radical, Socle を表すことにする。

$kG$  と  $k(G;H)$  について次の関係が成立する。

$$(1.4). \quad J(k(G;H)) = J(kG) \cap k(G;H)$$

$$S(k(G;H)) = S(kG) \cap k(G;H).$$

証明.  $H$  が  $p'$ -部分群であるから、(1.1) より、 $kG$  は、projective  $kH \times G$ -加群である。また、 $J(kG)$  は、 $kH \times G$ -加群としての  $kG$  の radical である。このとき、(1.1) の前半の同型を調べると、(1.4) が導かれる。

$S(kG)$  は  $kG$  の中心のある元で生成される (中山) ことに注意して次を得る。

$$(1.5). \quad S(k(G;H))kG = S(kG) = kG(S(k(G;H))).$$

$H$  が  $p'$ -部分群であることより、Fossum [ ], あるいは Green [ ] の議論を適用して、 $kH \times G$ -加群と、 $k(G;H)$ -加群の間についての様な対応が存在する。

(1.6).

(1).  $S(k(G;H)) \supseteq L$  を irreducible  $k(G;H)$ -加群とすると、 $LkG$  は、irreducible  $kH \times G$ -加群となる。

(2).  $S(kG) \supseteq M$  を irreducible  $kH \times G$ -加群とすると

$M \cap k(G:H)$  は, irreducible  $k(G:H)$ -加群, または, 0-加群と成る。

(3). 上の対応で  $\{\text{Irreducible } k(G:H)\text{-加群}\}$  と  $\{\text{Irreducible } kH \times G\text{-加群, } M \text{ で } \text{Im}_{H \times G}(M) \neq 0 \text{ 成るもの}\}$  との 1対1 の対応ができる。

(1.6)と関連して, 次の問題が, 古くからある Brauer の予想として生じてくる。

(1.7) -問題-  $D \in \text{Syl}_p(C_G(H)), D \subseteq P \in \text{Syl}_p(G)$  とする。  $L$  を (1.6), (1) の irreducible  $k(G:H)$ -加群とするとき,  $(\dim_k L)_p \mid |P:D| \geq (\dim_k L kG)_p$  が成立するか?。

(1.8). (1.7)は, Brauer の次の予想と同値な内容である。  
 $(R, K, k)$  を  $p$ -modular system とする。  $\varphi$  を irreducible Brauer character,  $G \ni x$  を  $p'$ -element とするとき,

$$|G:C_G(x)| \varphi(x) / \varphi(1) \in R$$

が成立するか?。

(1.7)と関連して, 次の事柄が成立している。

(1.9)  $D, P$  を (1.7) のとおりとする。このとき

$k(G;H) \supseteq kD$  で、 $k(G;H)$  は 右, 左, 自由  $kD$ - $AD$  群となる。特に、 $\dim_k k(G;H) \equiv 0 \pmod{|D|}$   
 したがって  $(\dim_k k(G;H))_p |D| \geq (\dim_k kG)_p$  .

## § 2.

有限群のモジュラー表現の理論において、 $p$ -部分群の中心化群との関係を調べるのに、Brauer による、Brauer homomorphism は、大事な道具である。最近、Alperin, Broué, Puig 等によって、それが拡張された形で議論がなされ、さらに有効な手段として役立っている。 $p$ -部分群の正規化群に関しても、Brauer homomorphism と類似した homomorphism があることも、以下で示す。応用があるわけでは無いので、単に参考として記すのみとする。

以下、 $P$  を  $G$  の  $p$ -部分群とし、 $\hat{P} = \sum_{x \in P} x \in kG$  とおく

$C_{kG}(\hat{P}) \supseteq A = \{ \alpha \in C_{kG}(\hat{P}), \alpha \hat{P} = 0 \}$  とし、

$k(G; \hat{P})^\circ = C_{kG}(\hat{P})/A$  とおく。

(2.1).  $\sigma : C_{kG}(\hat{P}) \rightarrow kN_G(P)$  を、次の様に定義する。  
 $C_{kG}(\hat{P}) \ni \alpha = \sum_{g \in G} a_g g \mapsto \sum_{g \in N_G(P)} a_g g$  .

このとき,  $\sigma$  は, 次の  $k$ -algebra epi を誘導する。

$$k(G:\hat{P})^\circ \longrightarrow kN_G(P)/J(kP)kN_G(P)$$

$$(2.2). \quad k(G:\hat{P})^\circ \simeq \text{End}_{kG}(\hat{P}kG)$$

$$kN_G(P)/J(kP)kN_G(P) \simeq \text{End}_{kN_G(P)}(\hat{P}kN_G(P))$$

証明. (2.2).  $C_{kG}(\hat{P})$  の元を左から  $\hat{P}kG$  にかけることによつて,  $\hat{P}kG$  の  $kG$ -導同型が得られる。そのとき,  $A$  は 0-写像となるものである。また, 計算によつて,  $k(G:\hat{P})^\circ$  の次元は,  $(P, P)$ -両側分解したときの cosets の個数であることがわかる。このことから, (2.2) の同型が得られる。

(2.1). 直接計算して確かめることもできるが, (2.2) を使って証明することもできる。 $\hat{P}kN_G(P)$  は, trivial source をもつ加群の直和であるから,  $P \leq Q$  なる  $Q$  に対し,  $kQ$ -導同型  $f: \hat{P}kA_G(P) \rightarrow \hat{P}kN_G(P)$  によつて,  $T_Q^{N_G(P)}(f)$  は 0-写像となる。この事実と,  $\hat{P}kG$  と  $\hat{P}kN_G(P)$  が Green Correspondant であることから (2.1) が導かれる。

(2.3). Brauer homomorphism ;  $k(G:P) \rightarrow kC_G(P)$  は, (2.1) の特別な場合と見ていい。

証明. (2.1) の  $G$  とし  $P \times G$ ,  $P$  とし  $P^\Delta = \{(x, x); x \in P\}$  とする。このとき、 $\widehat{P^\Delta} k P \times G \cong L_0(P^\Delta)^{P \times G}$   
 $N_{P \times G}(P^\Delta) = P^\Delta \rtimes (1 \times G(P))$  とする。したがって、自然な同型  
 $k(G:P) \cong \text{End}_{k P \times G}(\widehat{P^\Delta} k P \times G)$ ,  $k(G(P)) \cong \text{End}_{k N_{P \times G}(P^\Delta)}$   
 $(\widehat{P^\Delta} k N_{P \times G}(P^\Delta))$  が得られる。(2.1), (2.2) に適用して、証明が  
 終わる。

### 参考文献

- [1]. Alperin, Broué; Local methods in block theory, Ann. Math. 110 (1979), 143-157
- [2]. Feit; Representations of Finite Groups, Yale Univ. (1969)
- [3]. Fossum; Endomorphism rings of induced linear representations, Illinois J. Math. 16 (1972), 143-153.
- [4]. Green; On a theorem of H. Sawada. J. London Math. Soc. (2) 18 (1978) 247-252