

Brauer の 「selection of p -regular classes」 の応用

熊本大 理 渡辺アツミ

G を有限群, p を素数, K を G の任意の部分群に対し K を分解体となす K なる有限次代数数体とする. K における (p) の素イデアル因子の ν とすし, K の p -整数の全体を \mathcal{O} とする. \mathfrak{p} は \mathcal{O} の極大イデアルとす \mathfrak{p} で表し可とにし, 剰余体 \mathcal{O}/\mathfrak{p} を F と置く.

C_1, C_2, \dots, C_r を G の p -regular class の全体とし, その代表元を x_1, x_2, \dots, x_r とする. 苟も, p -regular class C_ν に対し, 群環 $\mathcal{O}G, FG$ における元 α を C_ν で表し可. \mathfrak{p} は C_ν の defect group, defect とそれぞれ $D(C_\nu), d_\nu$ で表し可. $x_1, x_2, \dots, x_r \in G$ の通常既約指標の全体, $BL(G)$ を G の p -block の全体とす, $BL(G) = \{B_1, B_2, \dots, B_t\}$. p -block B_τ に対し, B_τ の通常既約指標の個数を k_τ 又は $k(B_\tau)$, B_τ の modular 既約指標の個数を l_τ 又は $l(B_\tau)$ で表し可. E_τ, \bar{E}_τ とそれぞれ $\mathcal{O}G, FG$ の B_τ に対応する中心原素中等元とす.

R. Brauer は [2] で 次の事実を announce した。

C_1, C_2, \dots, C_k を 次の 1), 2) を満たすように B_1, B_2, \dots, B_t に associate させることが出来る。

1) 各 p -regular class C_ν は one and only one B_τ に associate される。

2) 各 B_τ には l_τ 個の p -regular class を associate され、それらと $C_{\tau_1}, C_{\tau_2}, \dots, C_{\tau_{l_\tau}}$ ($1 \leq \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{l_\tau} \leq k$) とするとき、
 $(\chi_i(x_{\tau_\nu}))_{\substack{\chi_i \in B_\tau \\ 1 \leq \nu \leq l_\tau}}$ の p -rank は l_τ に等しい。

このことを selection of p -regular classes といい、Brauer は [4] で上の事実の証明を与えているが、さらにそのとき、 B_τ に対応する Cartan matrix の単因子が p^{d_ν} ($\nu = 1, 2, \dots, l_\tau$) に等しいことを示している。上の 2) について、M. Osima は [12] において、2) は次の 2') でおきかえてよいことを示した。

2') 各 B_τ には l_τ 個の p -regular class を associate され、それらと $C_{\tau_1}, C_{\tau_2}, \dots, C_{\tau_{l_\tau}}$ ($1 \leq \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{l_\tau} \leq k$) とするとき、 $C_\nu E_\tau$ ($\nu = 1, 2, \dots, l_\tau$) は一次独立である。

一般の conjugacy class と block に associate させることについて、Brauer は [3] で言及し、[5] で証明をしている。このことに関して K. Iizuka [7], [8], K. Iizuka - Y. Ito [9], M. Broué [6], J. B. Olsson [11] 等で取り扱われて

いる。いづれも、M. Osima [12] の方法及びそれを一般の conjugacy class へ拡張した K. Iizuka の方法によって研究されていると言える。

ここでは selection of p -regular classes 及びその応用について述べる。

Q を G の p -部分群とし、 $m(B_T, Q)$ を一つの selection of p -regular classes において B_T に associate される p -regular class のうち defect group が Q であるものの個数とする。 $m(B_T, Q)$ は selection に無関係に一意的に決まる。実際 $X(Q) \in \{C_\alpha \mid 1 \leq \alpha \leq r, D(C_\alpha) \cong Q\}$ で張られる HG の中心 $Z(HG)$ の部分空間とし、

$$V(Q) = \sum_{P < Q} X(P), \quad \tilde{V}(Q) = \sum_{S \not\leq Q} X(S)$$

とおくと、

$$(1) \quad m(B_T, Q) = \dim_P (V(Q)\bar{E}_T / \tilde{V}(Q)\bar{E}_T).$$

特に $Q < G$ のとき

$$(2) \quad m(B_T, Q) = \dim_P (X(Q)\bar{E}_T)$$

$BL(N(Q), B_T)$ を Brauer homomorphism で B_T に associate される $N(Q)$ の p -block の全体とすると、

$$(3) \quad m(B_T, Q) = \sum_{B \in BL(N(Q), B_T)} m(B, Q).$$

P_1, P_2, \dots, P_s を G の p -部分群の共役類の代表系とする。

$$(4) \quad l_{\pi} = \sum_{j=1}^n m(B, P_j).$$

命題 π を G の p -element とする. $\mathcal{J}_j = \{P_j^x \cap C(\pi) \mid P_j^x \ni \pi, x \in G\}$ とおき, \mathcal{J}_j の maximal member の全体を $\mathcal{J}_j^{(0)}$ で表す. B を G の p -block, B の defect group を D とする. $C_G(\pi) = C(\pi)$ の p -subgroup Q に対して次の不等式が成立する.

$$(5) \quad \sum_{\substack{j \\ \mathcal{J}_j^{(0)} \ni Q}} m(B, P_j) \leq \sum_{b \in \text{Bl}(C(\pi), B)} m(b, Q),$$

$$(6) \quad \sum_{\substack{j \\ \mathcal{J}_j^{(0)} \ni Q \\ P_j \not\subseteq D}} m(B, P_j) \leq \sum_{\substack{b \in \text{Bl}(C(\pi), B) \\ D(b) \not\supseteq Q \\ C(\pi)}} m(b, Q),$$

但し $\text{Bl}(C(\pi), B)$ は $\Sigma(\mathbb{F}G)$ から $\Sigma(\mathbb{F}C(\pi))$ への Brauer homomorphism により B に associate される $C(\pi)$ の p -block の全体と, $D(b)$ は b の defect group を表す.

証明 $\pi \in Q$ としてよい. 従って $QC_G(Q) \subset C(\pi) \cap N_G(Q) \subset N_G(Q)$. $H = C(\pi) \cap N_G(Q)$ とおき, γ を $\Sigma(\mathbb{F}G)$ から $\Sigma(\mathbb{F}H)$ への Brauer homomorphism とする. E を B に対応する $\Sigma(\mathbb{F}G)$ の原始中等元とし, $\gamma(E) = e_1 + e_2 + \dots$ と $\gamma(E)$ の $\Sigma(\mathbb{F}H)$ における原始中等元分解とする. また e_i に対応する H の p -block を B_i とする. (5) を証明する. $V = \sum_{\substack{j \\ \mathcal{J}_j^{(0)} \ni Q}} V(P_j)$ とおく.

$$\dim_{\mathbb{F}} (\mathcal{G}(V\bar{E})) = \sum_{\substack{j \\ \mathcal{J}_j^{(0)} \ni Q}} m(B, P_j)$$

が成立することからわかる。また \mathcal{J}_j 及び $\mathcal{J}_j^{(0)}$ の定義より, $\mathcal{G}(V)$ は defect group が Q であるような H の p -regular class の class sum の \mathbb{F} -一次結合の全体 $\tilde{X}(Q)$ に含まれることがわかる。従って

$$\mathcal{G}(V\bar{E}) \subset \sum_{\mathbb{F}} \mathcal{G}(V) e_{\sigma} \subset \sum_{\mathbb{F}} \tilde{X}(Q) e_{\sigma}. \quad (2) \text{ より}$$

$$\sum_{\substack{j \\ \mathcal{J}_j^{(0)} \ni Q} m(B, P_j) \leq \sum_{\sigma} m(b_{\sigma}, Q).$$

$(b_{\sigma}^{C(\pi)})^{\mathcal{G}} = b_{\sigma}^{\mathcal{G}} = B$ であることに注意し, $C(\pi)$ と $b_{\sigma}^{C(\pi)}$ に (3) を適用する

ことにより (5) が得られる。(6) を証明する。 $V' = \sum_{\substack{j \\ \mathcal{J}_j^{(0)} \ni Q \\ P_j \not\subseteq D}} V(P_j)$

と置く。 $\dim_{\mathbb{F}} (\mathcal{G}(V'\bar{E})) = \sum_{\substack{j \\ \mathcal{J}_j^{(0)} \ni Q \\ P_j \not\subseteq D}} m(B, P_j)$ を示すことが出来る。

$D(b_{\sigma}) = Q$ であれば, $\tilde{X}(Q) e_{\sigma} = \mathbb{F} e_{\sigma}$. $V\bar{E}$ の, $L \in \mathcal{M}$ として $\mathcal{G}(V\bar{E})$ の各元

は nilpotent であるから $\mathcal{G}(V) e_{\sigma} = \{0\}$. 故に $\mathcal{G}(V\bar{E}) \subset \sum_{\mathbb{F}} \mathcal{G}(V) e_{\sigma}$

$\subset \sum_{\mathbb{F}} \tilde{X}(Q) e_{\sigma}$. $D(b_{\sigma}) \neq Q$ ならば, $D(b_{\sigma}^{C(\pi)}) \not\subseteq Q$ であるから, $D(b_{\sigma}) \neq Q$

(5) と同様にして (6) を得る。

以下系4まで命題の記号の下に述べる。命題から Γ に至るに次の系1が得られる。

系 1 $\pi \in Q$ のとき

$$(7) \quad m(B, Q) \cong \sum_{b \in \text{Bl}(C(\pi), B)} m(b, Q).$$

さらに $Q \subseteq_{\frac{G}{\Gamma}} D$ のときは

$$(8) \quad m(B, Q) \cong \sum_{\substack{b \in \text{Bl}(C(\pi), B) \\ D(b) \not\supseteq Q \\ C(\pi)}} m(b, Q).$$

注意 (7) は M. Fujii に証明 (2) による。 (8) は M. Fujii [10],

Theorem 9 - 一般化である。

系 2 n_j と $J_j^{(0)}$ は $C(\pi)$ の元を共役により作用させたときの orbit の個数とする。このとき

$$(9) \quad \sum_{j=1}^l m(B, P_j) n_j \cong \sum_{b \in \text{Bl}(C(\pi), B)} l(b),$$

$$(10) \quad \sum_{\substack{j=1 \\ P_j \subseteq D \\ \frac{G}{\Gamma}}} m(B, P_j) n_j \cong \sum_{b \in \text{Bl}(C(\pi), B)} (l(b) - 1).$$

証明 Q_1, Q_2, \dots, Q_l は $C(\pi)$ の p -subgroup の共役類の代表系とする。 (5) 及び (4) より

$$\sum_{k=1}^l \sum_{\substack{j \\ J_j^{(0)} \supseteq Q_k}} m(B, P_j) \cong \sum_{k=1}^l \sum_{b \in \text{Bl}(C(\pi), B)} m(b, Q_k) = \sum_{b \in \text{Bl}(C(\pi), B)} l(b).$$

左辺は $\sum_{j=1}^l m(B, P_j) n_j$ に一致する。故に (9) が得られる。

$m(b, D(b)) = 1$ と (6) 及び (4) より

$$\sum_{k=1}^A \sum_{\substack{j_j^{(0)} \ni Q_k \\ P_j \not\subseteq D}} m(B, P_j) \cong \sum_{k=1}^A \sum_{\substack{b \in \text{BL}(\langle \pi_k \rangle, B) \\ D(b) \not\subseteq Q_k \\ (\pi_k)}} m(b, Q_k) = \sum_{b \in \text{BL}(\langle \pi \rangle, B)} (\ell(b) - 1).$$

左辺は $\sum_{\substack{j \\ P_j \not\subseteq D}} m(B, P_j) m_j$ に一致する。故に (10) が得られる。

系 3 D は abelian と仮定する。 m_j と P_j の元の $N_G(P_j)$ -共役類の個数, Δ_B と B に associate される subsection の共役類の個数とする。このとき

$$(11) \quad k(B) \geq \sum_{\substack{j \\ P_j \not\subseteq D}} m(B, P_j) m_j + \Delta_B.$$

証明 $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k, \dots$ を G の p -element の conjugacy class の代表系とする。命題におりる π として π_k を取ったときの $J_j, J_j^{(0)}, n_j$ をそれぞれ $J_{jk}, J_{jk}^{(0)}, n_{jk}$ と書く。系 2 より

$$(12) \quad \sum_k \sum_{\substack{j \\ P_j \not\subseteq D}} m(B, P_j) n_{jk} \leq \sum_k \sum_{b \in \text{BL}(\langle \pi_k \rangle, B)} (\ell(b) - 1) = k(B) - \Delta_B.$$

$P_j \not\subseteq D$ なる P_j に対して P_j は abelian であるから 任意の k に対して $J_{jk}^{(0)} = J_{jk} = \{P_j^x \mid P_j^x \ni \pi_k, x \in G\} = \{P_j^x \mid P_j \ni \pi_k^{x^{-1}}, x \in G\}$ とする。明らかに n_{jk} と $\{ \pi_k^{x^{-1}} \mid \pi_k^{x^{-1}} \in P_j, x \in G \}$ の元の $N_G(P_j)$ -共役類の個数は一致する。従って (12) の左辺は $\sum_{\substack{j \\ P_j \not\subseteq D}} m(B, P_j) m_j$ と一致する。以上より系 3 が得られる。

G_p を G の p -element の全体とする。 G_p の二元 x, y はそれぞれより生成される群 $\langle x \rangle, \langle y \rangle$ が G の元で共役であるとき,

同値であるとする。そのとき同値類の代表系を $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_w$ とし、命題及び系2の π として π_k を取ると π の n_j と $n_{j,k}$ で表わすことにする。

系4 B の通常既約指標の p -conjugate character の family の個数を f_B とする。このとき

$$(13) \quad f_B \geq \sum_{j=1}^A \sum_{k=1}^w n_{j,k} m(B, P_j).$$

特に p^e と D の exponent, p^{e_j} と P_j の exponent とおけば

$$(14) \quad f_B \geq l(B) + \sum_{j=1}^A e_j m(B, P_j) \geq l(B) + e.$$

証明 (7) より 各 k ($k = 1, 2, \dots, w$) に対して

$$\sum_{j=1}^A m(B, P_j) n_{j,k} \leq \sum_{\mathfrak{b} \in \text{BL}(\langle \pi_k \rangle, B)} l(\mathfrak{b}).$$

一般分解定数の行列に permutation lemma ([1, §6]) を適用することにより, π_k の取り方から, 少なくとも $\sum_{k=1}^w \sum_{\mathfrak{b} \in \text{BL}(\langle \pi_k \rangle, B)} l(\mathfrak{b})$ 個の p -conjugate character の family がある。故に (13) が得られる。

明らか $\sum_{k=1}^w n_{j,k} \geq e_j + 1$ である。故に (4) 及び (13) より

$$f_B \geq \sum_{j=1}^A (e_j + 1) m(B, P_j) = l(B) + \sum_{j=1}^A e_j m(B, P_j).$$

$m(B, D) = 1$ であるから (14) が得られる。

注意 (14) は R. Brauer [1, Theorem 8] の一般化である。

文 献

- [1] R. Brauer: On the connection between the ordinary and modular characters of groups of finite order, *Ann. of Math.*, 42(1941), 926-935.
- [2] —————: On the arithmetic in ^agroup ring, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 30(1944), 109-114.
- [3] —————: On blocks of characters of groups of finite order, I, *Proc. Nat. Acad.*, 32(1946), 182-186.
- [4] —————: Zur Darstellungstheorie der Gruppen endlicher Ordnung, *Math. Zeit.*, 63(1956), 406-444.
- [5] —————: Defect groups in the theory of representations of finite groups, *Illinois J. Math.*, 13(1968), 53-73.
- [6] M. Broué: Brauer coefficients of p -subgroups associated with a p -block of a finite group, *J. of Alg.*, 56(1979), 365- 383.
- [7] K. Iizuka: Note on blocks of group characters, *Kumamoto J. of Sci. Ser. A*, 2(1956), 309-321.
- [8] ————— : A note on blocks of characters of a finite group, *J. of Alg.*, 20(1972), 196-201.
- [9] K. Iizuka - Y. Ito: A note on blocks and defect groups of a finite group, *Kumamoto J. Sci.(Math.)*, 9(1972), 25-32.
- [10] M Fujii: On determinants of Cartan matrices of p -blocks, *Proc. Japan Acad.*, 56(1980), 401-404.
- [11] J. B. Olsson: Lower defect groups, *Com. in Alg.*, 8(3)(1980), 261- 288.
- [12] M. Osima: Notes on blocks of group characters, *Math. J. Okayama Univ.*, 4(1955), 175-188.