

成分型単純群の分類完成

大阪教育大学 鈴木 寛

これは、成分型有限単純群の分類完成の報告、そのいくつかの部分の紹介、証明技術面での問題についてのノートである。

§ 1. 主定理と 標準部分群型問題

このノートで、群はすべて有限群、単純群は、非可換単純群を意味するものとし、用いる記号、用語はなるべく、鈴木通夫著“群論(上・下)”(岩波書店)、近藤武著“群論(I, II, III)”(岩波基礎数学講座)にあわせる事とした。上記二名着を御参照されたい。

定義 1. \mathcal{K} : 既知単純群全体の集合

$F^*(G)$: 有限群 G の一般フィッティング部分群

($F^*(G) = E(G)F(G)$). ここで $F(G)$ はフィッティング部分群 $E(G)$ は、 G の、準単純 (後述) 連正規部分群全体で生成された G の部分群)

主定理. G を \mathcal{K} に入らない、最小位数の単純群とする。すると、任意の位数 2 の元 x について、

$$F^*(C_G(x)/O(C_G(x)))$$

は、2-群。

注 1. 一般に、ある位数 2 の元 x について、 $F^*(C_G(x)/O(C_G(x)))$ が 2 群にならない群を、成分型 (component type) の群という。今 \mathcal{K} が、単純群全体である事を証明しようとする時、 G を、その最小位数の反例であるとする。上の定理は、 G が、成分型ではないと主張している。

注 2. $F^*(C_G(x)/O(C_G(x)))$ が 2 群にならないという事は、 $C_G(x)/O(C_G(x))$ に、連正規な、準単純部分群がある事を意味し、(定義 1 参照)、成分型とは、大体、ある位数 2 の元の中心化群の下の方に、単純群がある群のことである。

以後、主定理の証明について述べる。

定義 2. G の部分群 L が、標準部分群 (standard subgroup) あるとは、次の三つの条件をみたすことである。

① $L = L'$, $L/Z(L)$ は単純群。(この性質をもつ群 L を 準単純 と呼ぶ)

② $K = C(L)$ とおくと、 $|K|$ は偶数であるが、任意の $g \in G - N(K)$ について $|K \cap K^g|$ は 2 で割れない。(このとき、 K は tightly embedded subgroup であると呼ばれる。)

③ $N(L) = N(K)$, $[L, L^g] \neq 1, \forall g \in G$ 。

定義 3. G が単純型 X であるとは、 G が標準部分群 L を持ち、 $L/Z(L) \cong X$ なることである。

定義 4. G が型 X であるとは、 G が標準部分群 $L \cong X$ を持つことである。

定理 1. (標準部分群型定理) G が単純型 X ($X \in \mathcal{X}$) であって、 $F^*(G)$ が単純群であるなら、 $F^*(G) \in \mathcal{X}$ 。
すなわち、ある $H \in \mathcal{X}$ で、 $H \leq G \leq \text{Aut } H$ 。

定理2. (M. Aschbacher, R. Foote) 主定理は、定理1. より、みちびかれる。

したがって、目標は、定理1. を証明することになった。

注3. 定理1. において G が単純と仮定し、かつ、定理2. が成立すればよいが、定理2. の証明に用いられる U -予想、 B -予想 (これらも、定理1. からみちびかれる "定理" である) をも、一度にかたづける為には、 G を、もう少し一般に、つまり、 $F^*(G)$ が、単純と仮定して証明する必要がある。ただし、すべての型 X について、この強い形で、定理1. を証明しなくては、いけないわけではない。

注4. 定義2. からわかるように、標準部分群を持つ群は、成分型である。

定理1. を証明するためには、 \mathcal{X} の各元 X について、次を証明すればよい。

定理1'. G を、単純型 X とし、 $F^*(G)$ は単純とする。さらに G は、次の条件をみたすものとする。

① G の真部分群の剰余群 H が、ある $Y \in \mathcal{K}$ について、単純 Y 型なら、 H の任意の組成因子は、 \mathcal{K} の元であるか、または、可換群である。

② L を、 X 型の標準部分群としたとき、 $C(L)$ の 2-シロー群は、巡回群である。

③ G は、性質 $B(G)$ をみたす。

(④ G は、単純群である。)

このとき、 $F^*(G) \in \mathcal{K}$ 。

注5. ① は、定理 1. で、最小位数の反例をとることから、仮定できるもの、② は、 $C(L)$ の 2-シロー群が巡回群でない場合が、一般に、M. Aschbacher, G. Seitz によって証明されたため、③ は、 G の位数 2 の元の中心化群の奇数位数の正規部分群に関する性質であるが、詳述はさける、④ は、いつでも、仮定できるわけではなく、例えば、標数 2 の体上のシバリー群のほとんどの場合に、仮定できる。(注3, 参照)

§ 2. 個々の単純型における定理 1' の証明.

定理 1' の証明には、実に多くの数学者が携わってきたが

その一部を列举すると、

- 階数の大きな奇標数のシバリー群 J. Walter
- 階数の大きな標数2のシバリー群 G. Seitz
- 交代群 R. Solomon, M. Harris
- 散在型 R. Solomon, L. Finkelstein et al.
- 階数の小さな標数2のシバリー群

五味・山田・宮本 et al.

以下は、1979年夏、カリフォルニア大学サンタクルツ校で開催されたシンポジウム当時、残されていた(プレプリント以上のものがなかったもの)型と、それを証明した(その型の場合に、定理1'を証明した)人の名である。

I. 標数2のシバリー群

$L_3(4)$	Aschbacher, Seitz
$\widehat{U}_6(2)$	Hunt?
$\widehat{\Omega}_8^+(2)$	江川
$\widehat{^2E}_6(2)$	Stroth
$F_4(2)$	Seitz?
${}^2F_4(2)'$	Aschbacher
${}^2F_4(2^{2m+1})$	宮本
$G_2(4)$	Aschbacher, Seitz
$\Omega_8^-(2)$	Alward

II. 奇標数のシバリー群

$U_3(3)$	Harris
$L_4(3)$	鈴木(寛)
$U_4(3)$	Aschbacher
$G_2(3)$	山田

III. 散在型

\hat{F}_2	Griess ?
F_3	Syskin
$\hat{M}(22)$	江川

注6. 上の表で、疑問符のついているものは、筆者が確認できなかつたもので、その他にも、 $\Omega_6^-(3)$, $P\Omega_7(3)$, $P\Omega_8^+(3)$ は、証明した人の名を確認できなかつたが、現時点では、すべて証明されているとの事である。(Gorensteinよりの、間接的情報による。)

§3. 定理1' の証明とその方針

定理1' の証明のあらすじを考える。

L を X 型の標準部分群とする。 $C(L)$ は、 L が標準部分群であることにより、定義2. の条件②をみたす。

従って、特に、 $C(L)$ の 2-シロー群 R は、単位群ではなく、定理 1' の仮定 ② により、巡回群としてよい。 α を R の位数 2 の元とすると、定義 2. の条件 ③ と、 R が $C(L)$ のシロー群で、巡回群であることから、 $C(\alpha) \leq N(L)$ が、みちびかれる。これにより、 $F^*(C(\alpha)/O(C(\alpha))) \cong R * L$ が得られ、 $C(\alpha)/O(C(\alpha))$ の構造を知ることができる。

次に、 $C(\alpha)$ の性質から G の性質を調べ、 $F^*(G)$ が何であるかを定めるのであるが、 $F^*(G)$ が単純 という条件は、実際には用いにくいので、普通 $O(G)=1$ 、つまり、奇数位数の G の正規部分群は単位群に限るとのみ仮定し（これも省くこともあるが、この仮定は、全くテクニカルな仮定である）証明をすすめる。この場合、 $F^*(G)$ が、単純群となる場合の他に、 $\alpha \in Z(G)$ で、 $L = E(G)$ なる場合と、 $F^*(G) \cong L \times L$ となる二つの場合が起こる。前者は、 Z^* -定理、後者は、product fusion なるものを調べて扱うことが多いが、特に、後者を扱うのが、定理 1' の証明が一般に長くなる一つの原因である。

$C_G(\alpha)$ の、どの性質に注目するかは、いつも問題であるが、最終的に、 $F^*(G)$ を決定しやすい情報を見つけ出すとしか、言えないようである。

L	$\Omega_8^+(2)$	${}^2F_4(2^{2m+1})$	${}^2F_4(2)'$
	(三川)	(宮本)	(Aschbacher)
E(G)	L L × L $\Omega_8^+(4)$ M(22)	L L × L $F_4(2^{2m+1})$	L L × L $F_4(2)$
	現在は $G \neq O_3^*(G)$ まで		

上の表は、標数2型の場合のいくつかの例であるが、E(G)として現われるのもほとんど、標数2型のシバリー群であるためLの、したがってC(t)の、放物型部分群 H_i 達を考え、その $O_2(H_i)$ の正規化群を調べて、Gの放物型部分群 H_i を得、 H_i 同志の関係から、Gの(B, N)-対を構成する方法が、しばしば、用いられるようである。

奇標数のシバリー群の場合も、E(G)として得られるものは、殆ど、奇標数のシバリー群であるが、放物型部分群が、2-局所部分群(2-群の正規化群)ではないので、今のところ、これを扱う方法は得られていない。これに対して、Gのclassical involutionと呼ばれる位数2の元(すとは異なる)に目をつけ、その中心化群を求めて、Gを決定する方法は、一般的に用いることの可能な方法である。

次の二つは、この方法に関係した定理である。

定義5. \mathcal{M} を、次の様な群全体の集合とする。すなわち、 $H/O(H) \cong SL(2,3)$ であるか、または、 $H=H'$ 、 $H/Z^*(H)$ は、奇数標数の単純シバリー群で、 $Z^*(H)$ は偶数位数を持ち、 $H/Z^*(H) \cong PSL(2n, p^r)$, $PSU(2n, p^r)$ なる場合は、更に、 $|Z^*(H)|_2 = |M(H/Z^*(H))|_2$ であるとする。ここで $M(H/Z^*(H))$ は、 $H/Z^*(H)$ の シュアーマルチプライアーをあらわすものとする。

定理3. z を単純群 G の位数2の元とし、 $C_G(z)$ は連正規な \mathcal{M} に属する部分群で、 z を含むものをもつとする。この時、 G は、奇標数のシバリー群か、または M_{11} に同型である。

定理4. $W = \{1, z_1, z_2, z_3\} \cong E_4$ を群 G の部分群とする。もし、 $C_G(W)$ が、連正規な \mathcal{M} に属する部分群 L_1, L_2 で、 $z_1 \in L_1, z_2 \in L_2$ なるものをもてば、 G は、単純群ではない。

注7. 上の二つの定理は次の論文による。

M. E. Harris, Finite groups containing an intrinsic 2-component of Chevalley type over a field of odd order, To appear.

注8. 定理3. は Aschbacher による. Classical involution による. 奇標数シバリー群の特徴づけの拡張である。

注9. 定理4. は 定理3. の系で, $E(G) \cong L \times L$ なる場合に. 有効である。

§4. 型 $L_4(3)$ の場合

この節では. 実際に. 型 $L_4(3)$ の場合. $E(G)$ 従って $F^*(G)$ としてどんな群があらわれ. また. 具体的に証明に用いられる部分群は. どんなものであるかを述べる. 記号は前節のものをそのまま用いる。

$ R > 2$ の場合	二次形式	τ	m の元
$P\Omega_8^-(3)$	$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$	$SL(2,3)$

$ R =2$ の場合	二次形式	π	\mathcal{O}_m の元
$L_4(9)$		体同型	<u>$SL(2,9)$</u>
$L_6(3)$		$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix} \times \text{7次同型}$	$SL(2,3)$ <u>$SL(4,3)$</u>
$U_6(3)$		体同型	$SL(2,3), \text{SU}(4,3)$
$P\Omega_7(3)$	$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$	$SL(2,3)$
$P\Omega_8^+(3)$	$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$	<u>$SL(2,3)$</u>
$PSp_8(3)$	$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & -1 \\ & & & & & & & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & -1 \\ & & & & & & & -1 \end{bmatrix}$	$SL(2,3)$ <u>$Sp(4,3)$</u>

上の表の第一列は、 L , $L \times L$ 以外で、 $E(G)$ としてあらわれる群。第二・三列は、おのおのの場合、 π として何をとりかであり、最終列は、定理3. を用いる場合、適用できる連正規な部分群としてあらわれるもの、波線をつけたものは、実際に、証明に用いた群である。 $P\Omega_7(3)$ については、 G' の 2-シロ-群が、 A_{12} -型であり、 $G' = E(G)$ をシロ-群による特徴づけを用いて得た。

上の表の様に多くの群があらわれるのは、次の同型によるものであろう。 $L_4(3) \cong P\Omega_6^+(3)$ 。

注10. 上の表にあらわれた群は、すべて、その自己同型群が、単純型 $U_4(3)$ でもある。

IN $C_G(t)$	IN G	IN $E(G)$	$E(G)$
$ R > 2$	$2^6 \Sigma_8$	$2^6 A_8$	$P\Omega_8^-(3)$
$ R = 2$	$2^5 \Sigma_5$	$2^4 \Sigma_5$	$L_4(3)$
$m(C(t)) = 5$	$2^5 \Sigma_6$	$2^4 \Sigma_6$	$L_4(9), L_6(3)$
$2^5 \Sigma_5$	$2^5 2^4 \Sigma_5$	$(2^4 \Sigma_5) \times (2^4 \Sigma_5)$	$L_4(3) \times L_4(3)$
$ R = 2$	$2^6 \Sigma_5$	$2^4 \Sigma_5$	$L_4(3)$
$m(C(t)) = 6$	$2^6 (Z_2 \times \Sigma_5)$	$2^6 A_7$	$P\Omega_7(3)$
$2^6 \Sigma_5$	$2^6 \Sigma_6$ (直既約)	$2^5 \Sigma_6$	
	$2^6 \Sigma_6$ (直可約)	$2^4 \Sigma_6$	$L_4(9), L_6(3)$
	$2^6 (Z_2 \times \Sigma_6)$	$2^6 A_8$	$P\Omega_8^+(3)$
	$2^6 2^4 \Sigma_5$	$(2 \times 4^4) \Sigma_6$ $(2^4 \Sigma_5) \times (2^4 \Sigma_5)$	$U_6(3)$ $L_4(3) \times L_4(3)$
	$2^6 2^5 \Sigma_5$	$(2 \times 4^4) \Sigma_6$ $(2^4 \Sigma_5) \times (2^4 \Sigma_5)$	$U_6(3)$ $L_4(3) \times L_4(3)$

上の表は、 G の 2-シロ-群、さらに、 $E(G)$ の 2-シロ-群を得るのに用いられた 2-局所部分群の表である。実際の証明には上記のフラットフォームと呼ばれる基本了

ーベル群の正規化群の他に、カスプフォームと呼ばれるエクストラスペツヤル型の2-群の正規化群(これが最終的に定理3. を適用できる位数2の元 z を中心に持つ)を考察する。まず、 $C_G(x)$ の2-局所部分群(上の表 第一列の $2^4\Sigma_5$ や $2^6\Sigma_5$) をとり、その極大正規2-群の正規化群としておこる群の可能性を考えると、上の表 第二列の可能性がある事がわかり、それぞれに場合分けし、カスプフォームと見比べて 2-群の正規化群を順次とって、 G の2-シロ-群を得る。次に、 $E(G)$ (フュ-ジョンシンプルの部分) の2-シロ-群を、移送を用いて決める。殆どの場合 $x \notin E(G)$ である。最後に、 $E(G)$ の2-シロ-群の中で、共役関係を調べ、定理3. を適用できる位数2の元の中心化群を決定し $E(G)$ を得る。

以上が、証明の大体の筋道であるが、小さな部分での x の他の元との共役関係は本質的である。

§ 5. おわりに

単純群分類の最後はすべて、局所解析的手法によってなされたようである。証明の局所的改訂の価値には疑問も多いが、最後に、筆者の単純な疑問の形でいくつかの問題を記す。

1. 標準部分型問題において、どこまでアルゴリズム化できるか。
2. 定理 1' の証明で、 $B(G)$ どころか、 U も仮定できるか、 $O(C_G(x))=1$ なる時、表現論は適用可能か。
3. 一般に、 $V \cdot A$, $V \cong E_2^n$, $C(V)=V$, $(VA)' \cap V \neq V$ のような 2-局所部分群 VA を持つ群 G が、単純になる条件は何か。§4. の最後の表で、二列目の 2-局所部分群からすく $x \notin G'$ かどうかはわかれば、例えは定理 1' の証明は $1/3$ 程度以下になるであろう。