数理解析研究所講究録
426巻 1981年 86-106

実rank 1 な半単純Lie群上での L^p - Fourier解析

慶大・工　河添 健

実ランク1な半単純リー群G上でのL^pフーリエ解析を行なう。すなわち G上のp乗可積分関数のフーリエ変換像の決定とそれに関連した幾つかの話題について述べる。

1. <u>記号</u>　Gを実ランク1な連結半単純リー群とし，その中心は有限とする。$G=KAN$を岩沢分解，$P=MAN$を極小パラボリック部分群とする。またWにより(G, A)に関するワイル群を表わす。リー環はドイツ小文字を用いて表わし，任意のベクトル空間Vに対し，V^c, V^*をその複素化及び双対空間とする。特にAのリー環$\mathfrak{a}$の双対空間$\mathfrak{a}^*$を$\mathcal{F}$，その複素化を$\mathcal{F}_c$と省略して書く事にする。Δを$(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{a}_c)$のルートの全体とし，$\Delta^+$をNによって決まるその正のルートの全体とする。$\mathfrak{a}^+$を$\Delta^+$により決まる正のワイル領域とし，$A^+=\exp\mathfrak{a}^+$と置く。以下$\Delta^+$の唯一なreducedルートを$\alpha$とし，$H_0\in\mathfrak{a}^+$を$\alpha(H_0)=1$を満たす様にとる。$\mathcal{F}^+=\{\lambda\in\mathcal{F}\ ;\ \lambda(H_0)>0\}$とし，$\mathcal{F}_c$

の部分閉領域 $\mathfrak{F}(\varepsilon)$, $\mathfrak{F}_\delta^+(\varepsilon)$ $(\varepsilon, \delta > 0)$ 及び積分路 $\mathfrak{F}_\delta$ $(\delta > 0)$ を次の様に定める。

$$\mathfrak{F}(\varepsilon) = \{\lambda \in \mathfrak{F}_c ;\ |\mathrm{Im}\,\lambda(H_0)| \leq \varepsilon\rho(H_0)\}$$

$$\mathfrak{F}_\delta^+(\varepsilon) = \{\lambda \in \mathfrak{F}_c ;\ 0 \leq \mathrm{Im}\,\lambda(H_0) \leq \varepsilon\rho(H_0)\} \cup \{\lambda \in \mathfrak{F}_c ;\ |\lambda(H_0)| \leq \delta\}$$

$$\mathfrak{F}_\delta = \{\lambda \in \mathfrak{F} ;\ |\lambda(H_0)| \geq \delta\} \cup \{\lambda \in \mathfrak{F}_c ;\ |\lambda(H_0)| = \delta,\ \mathrm{Im}\,\lambda \leq 0\}$$

ただし $\lambda = \mathrm{Re}\,\lambda + \sqrt{-1}\,\mathrm{Im}\,\lambda$ $(\mathrm{Re}\,\lambda, \mathrm{Im}\,\lambda \in \mathfrak{F})$, $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\beta\in\Delta^+}\beta$ であり, ε は $\varepsilon = \infty$ も許すものとする。

2. フーリエ変換と逆変換　$\tau = (\tau_1, \tau_2)$ を K の有限次元ヒルベルト空間 V 上へのユニタリーな double 表現とする。ここで V は Harish-Chandra [3, §8] の仮定を満すものとする。この時 $\mathcal{C}(G, \tau)$ により G 上の V 値関数であって, τ-spherical かつ急減少なもの全体を表わす。また $L_G = {}^\circ\mathcal{C}(G, \tau)$ によりそのカスプ形式の全体, $\mathcal{C}_A(G, \tau)$ によりその wave packets の全体より成る閉部分空間を表わす。この時 $\mathcal{C}(G, \tau)$ は次の様に分解する事が知られている。(see [3, §27]).

(1)　$\mathcal{C}(G, \tau) = {}^\circ\mathcal{C}(G, \tau) \oplus \mathcal{C}_A(G, \tau)$　(直和).

τ_M を τ の M への制限とし, $L_M = {}^\circ\mathcal{C}(M, \tau_M)$ を同様に定義すればこの空間は $\phi \mapsto \phi(1)$ なる対応により $V^M = \{v \in V ;\ \tau_1(m)v = v\tau_2(m)\ (m \in M)\}$ なる空間と同型である。L_G 及び L_M の正規直交基底をそれぞれ e_k $(1 \leq k \leq n')$, ϕ_i^j $(1 \leq i \leq n_j,\ 1 \leq j \leq m)$ とする。この選び方は前の論文 [5, 6] と同じである。

以下，簡単のため $W(\omega_j)=\{s\in W;\ s\omega_j=\omega_j\}$ $(1\le j\le m)$ は W に一致するものと仮定する。この時，$\mathcal{C}(G.\tau)$ 上のフーリエ変換 F を次の様に定める。

(2) $$F(f)=((f,e_k))_{k=1}^{n'}\oplus\bigoplus_{j=1}^{m}(\hat{f}(\phi_i^j,\nu))_{i=1}^{n_j}\qquad(\nu\in\mathfrak{F},\ f\in\mathcal{C}(G.\tau))$$

ただし，$\hat{f}(\phi_i^j,\nu)=(c^2\gamma)^{-1}(f,E(P:\phi_i^j:\nu:\cdot))$ である（cf [5,6]）。$\mathfrak{F}$ 上の普通の意味での急減少関数の空間を $\mathcal{C}(\mathfrak{F})$ で表わせば，$F(f)$ は $\mathbb{C}^{n'}\oplus\mathcal{C}(\mathfrak{F})^n$ $(n=\sum_{j=1}^{m}n_j)$ に属する事がわかる。$\mathcal{C}(\mathfrak{F})_*^{n_j}$ を $\mathcal{C}(\mathfrak{F})^{n_j}$ の元 $\alpha_j=(\alpha_1^j,\alpha_2^j,\cdots\alpha_{n_j}^j)$ でもってワイル群に関する関数等式

(3) $$\alpha_j(s\nu)^t=\overline{{}^\circ c_{P|P}(s,s^{-1}\nu)}\,\alpha_j(\nu)^t\qquad(s\in W,\ \nu\in\mathfrak{F})$$

を満すもの全体とする（cf. [5]）。この時 $\mathcal{C}(\mathfrak{F})_*^n=\bigoplus_{j=1}^{m}\mathcal{C}(\mathfrak{F})_*^{n_j}$ とすれば 次の定理が成立する。

<u>定理 1</u>（[6]）．フーリエ変換 F は $\mathcal{C}(G.\tau)$ と $\mathbb{C}^{n'}\oplus\mathcal{C}(\mathfrak{F})_*^n$ の間の位相同型を与え，その逆変換は次の式で表わされる。

(4) $$f(x)=\sum_{k=1}^{n'}(f,e_k)\,e_k(x)+\frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}\int_{\mathfrak{F}}\mu(\omega_j,\nu)\,E(P:\phi_i^j:\nu:x)\,\hat{f}(\phi_i^j,\nu)\,d\nu\qquad(x\in G).$$

3. <u>Eisenstein 積分の展開に現われる特異点について</u>　主な結果を述べる前に

(5) $$I(j,i;\nu:a)=\Phi_0(\nu:a)\,c_{P|P}(1:\nu)^{*-1}\phi_i^j(1)\qquad(\nu\in\mathfrak{F}_c,\ a\in A^+)$$

なる有理型関数の特異点について調べる。この関数は $e^{\rho(\log a)}E(P:\phi_i^j:\nu:a)$ $(a\in A^+)$ の Harish-Chandra 展開に現われる第一項

に $e^{(\ell-\bar{\lambda})\nu(\log a)}\mu(\omega_j, \nu)$ を掛けたものである。十分小さな正数 δ に対し，$\mathcal{F}^+_\delta(\infty)$ に有限個の極（$a \in A^+$ には従属しない。）を持つ事が知られている。今，これらを $\xi^j_i(t)$ $(1 \leq t \leq T^j_i)$ とし，その位数を $m^j_i(t)$ で表わす。$|\xi^j_i(t_1)| < |\xi^j_i(t_2)|$ $(1 \leq t_1 < t_2 \leq T^j_i)$ が成立する様に番号を付ける事にする。任意の正数 ε に対し，$T^j_i(\varepsilon) = \max\{t\,;\ \xi^j_i(t) \in \mathcal{F}^+_\delta(\varepsilon)\}$ と置く。明らかに $T^j_i(\varepsilon_1) \leq T^j_i(\varepsilon_2)$ $(\varepsilon_1 < \varepsilon_2)$，$T^j_i(\infty) = T^j_i$ である。ここで S_ε を G_I の次の様な関数全体の集合とする。

(6) $$D^m(\xi^j_i(t))\,E(p : \phi^j_i : \nu : x) \qquad 0 \leq m \leq m^j_i(t)-1,\ 1 \leq t \leq T^j_i(\varepsilon),\ 1 \leq i \leq n_j,\ 1 \leq j \leq m$$

ただし $D^m(\xi) = \frac{d^m}{d\nu^m}\Big|_{\nu=\xi}$ を意味する。また S_ε の部分集合でもって一次独立な元から成る最大のものを S°_ε とする。今，この S°_ε の元を

(7) $$E_p(x) = D^{m[p]}(\xi^{j[p]}_{i[p]}(t[p]))\,E(p : \phi^{j[p]}_{i[p]} : \nu : x) \quad (1 \leq p \leq r_\varepsilon)$$

と書く事にする。以後簡単のため $D^{m[p]}(\xi^{j[p]}_{i[p]}(t[p]))$ を D_p，$\phi^{j[p]}_{i[p]}$ を $\phi[p]$ と書く。明らかに $S^\circ_{\varepsilon_1} \subset S^\circ_{\varepsilon_2}$ $(\varepsilon_1 < \varepsilon_2)$ と仮定して一般性を失なわない。ところで S°_∞ の各元は G_I の実解析的な関数であり，その選び方から一次独立である。よって G_I のコンパクトな台をもつ C^∞ な τ-spherical 関数 h_p $(1 \leq p \leq r_\infty)$ でもって次の性質を満たすものが取れる。

(8) $$(h_p, E_q) = \delta_{pq} \quad (1 \leq p, q \leq r_\infty)$$

補題 2 ([6]) $A_{p,k}=(h_p, e_k)$ ($1\le p\le r_\infty$, $1\le k\le n'$) とすれば、これらは h_p ($1\le p\le r_\infty$) の取り方には從屬しない。

4. 主な結果

まず $0<p\le 2$ なる正数 p に対して G 上の τ-spherical, 急減少 p 乗可積分関数より成る空間 $\mathcal{C}^p(G,\tau)$ を定義する。$\Xi(x)$, $\sigma(x)$ ($x\in G$) を次の式によって定義される G 上の球関数とする。

$$(9)\qquad \begin{aligned}\Xi(x) &= \int_K e^{-\rho(H(xk))}\,dk,\\ \sigma(x) &= \sigma(k\exp X) = \|X\|^{1/2},\end{aligned}$$

ただし $H(xk)$ は xk を岩沢分解した時の A 成分の $\log$, $x=k\exp X$ は x のカルタン分解を意味し, $\|\cdot\|$ は $\mathfrak{g}$ 上のキリング形式により定まるノルムである。この二つの球関数を用いて $\mathcal{C}^p(G,\tau)$ は次の様に定義される。G 上の τ-spherical, V 値, C^∞ 関数 f でもって, 任意の正整数 m, $\mathfrak{g}_c$ の展開環 (G 上の微分作用素と同一視する) $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_c)$ の元 g_1, g_2, V 上の半ノルム $S(V)$ の元 s に対して,

$$(10)\qquad \mu^p_{m,g_1,g_2,s}(f) = \sup_{x\in G} |f(g_1;x;g_2)|_s\,\Xi(x)^{-\frac{2}{p}}(1+\sigma(x))^m$$

を有限とするもの全体を $\mathcal{C}^p(G,\tau)$ とする。この時 $\mu^p_{m,g_1,g_2,s}$ は半ノルム系を成し, これにより $\mathcal{C}^p(G,\tau)$ はフレッシェ空間となる。また明らかに $\mathcal{C}^2(G,\tau)=\mathcal{C}(G,\tau)$, $C_c^\infty(G,\tau)\subset\mathcal{C}_{p_1}(G,\tau)\subset\mathcal{C}_{p_2}(G,\tau)$ ($0<p_1<p_2\le 2$) が成立する。

ところで $e_1, e_2, \cdots, e_{n'}$ は ${}^{\circ}\mathcal{C}(G,\tau)$ の基底であったが，以後，$e_1, e_2, \cdots, e_{i_p} \notin \mathcal{C}^p(G,\tau)$, $e_{i_p+1}, \cdots, e_{n'} \in \mathcal{C}^p(G,\tau)$ なる i_p が取れる様に順番を決めておく。${}^{\circ}\mathcal{C}(G,\tau)$ の元はそれがどの離散系列の表現の成分関数であるかに依って，その減少度が決定される事に注意する (cf. [7, 8])。

次に $\mathcal{C}^p(G,\tau)$ のフーリエ変換像となる空間 H_p^τ を定義する。$\varepsilon = \frac{2}{p}-1$ とし，$S(\mathfrak{F})$ により $\mathfrak{F}_c$ 上の対称環（$\mathfrak{F}$ 上の微分作用素とみなす。）を表わす。この時 H_p^τ により，次の4つの性質を満たす $\mathbb{C}^{n'} \oplus \mathcal{C}(\mathfrak{F})_*^{n}$ の元 $(a_k)_{k=1}^{n'} \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} (\alpha_i^j(\nu))_{i=1}^{n_j}$ の全体を表わす。

(c1)　各 $\alpha_i^j(\nu)$ $(\nu \in \mathfrak{F})$ は $\mathring{\mathfrak{F}}(\varepsilon)$ ($\mathfrak{F}(\varepsilon)$ の内部) 上の正則関数に拡張される。

(c2)　任意の正整数 ℓ，$S(\mathfrak{F})$ の元 u に対して，

(11)
$$\zeta_{\ell,u}^p(\alpha_i^j) = \sup_{\nu \in \mathfrak{F}(\varepsilon)} |\alpha_i^j(\nu;u)|(1+|\nu|)^\ell < \infty$$

である。ただし $|\nu| = |\nu(H_0)|$ である。

(c3)　もし Eisenstein 積分の関数等式

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{t=1}^{T_i^j(\varepsilon)}\sum_{r=1}^{m_i^j(t)-1} A(j,i,t,r)\, D^r(\zeta_i^j(t))\, E(P:\psi_i^j:\nu:x) = 0 \qquad (x \in G)$$

($A(j,i,t,r) \in \mathbb{C}$) が存在すれば $\alpha_i^j(\nu)$ $(1 \le i \le n_j,\ 1 \le j \le m)$ も同じ関数等式を満たす。すなわち

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{t=1}^{T_i^j(\varepsilon)}\sum_{r=1}^{m_i^j(t)-1} A(j,i,t,r)\, D^r(\zeta_i^j(t))\, \alpha_i^j(\nu) = 0 。$$

(c4)　a_k $(1 \le k \le n')$ の内，a_k $(1 \le k \le i_p)$ は次の式により $\alpha_i^j(\nu)$ により決定される。

(12) $$a_k = \sum_{q=1}^{r_\varepsilon} A_{q,k}\, D_q\, \alpha[q] \qquad (1 \leq k \leq i_p)$$

ただし $\alpha[q] = \alpha_{i[q]}^{j[q]}$ $(1 \leq q \leq r_\varepsilon)$である。

ここで $p=2$ $(\varepsilon=0)$の場合は上の4つの条件は無いものと見なす。この様にしてH_p^τを定義すれば、この論文の主な結果は次の様に述べる事ができる。

<u>定理3.</u> $0<p\leq 2$ なる正数 p に対し, $\sqrt{-1}\,\varepsilon p$ $(\varepsilon = \frac{2}{p}-1)$ がすべての j, i に対して $\xi_i^j(T_i^j(t))$ と一致しないとする。この時、フーリエ変換$\mathcal{F}$は $L^p(G,\tau)$ と H_p^τの間の同型を与える。

今、$\bar{H}_0^\tau$なる空間を次の様に定義する。$\mathbb{C}^{n'} \oplus \mathcal{C}(t)_*^{n}$の元 $(a_k)_{k=1}^{n'} \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} (\alpha_i^j(\nu))_{i=1}^{n_j}$ でもって, 前の条件 (c1), (c3), (c4) を $\varepsilon=\infty$ として, 満足し, さらに次の条件 (c2)$'$を満たすもの全体を$\bar{H}_0^\tau$とする。

(c2)$'$ ある正数 R が存在し, 任意の自然数 N に対して次の不等式を満す定数 c_N が取れる。

(13) $$|\alpha_i^j(\nu)| < c_N (1+|\nu|)^{-N} e^{R|\mathrm{Im}\,\nu|} \qquad (\nu \in \mathfrak{F}_c)$$

この様に$\bar{H}_0^\tau$を定義すれば次の結果はすでに得られている。

<u>定理4</u> ([6]) (G 上の Paley-Wiener 型の定理)

フーリエ変換$\mathcal{F}$は $C_c^\infty(G,\tau)$ と $\bar{H}_0^\tau$ の間の同型を与える。

5. 定理3の証明. 記号はすべて今まで通りとする。定理の証明に入る前に以後何回か用いる重要な不等式を列挙する。

(i) ある正数 c_1, r_1 が存在し,

(14) $$e^{-\rho(\log a)} \le \Xi(a) \le c_1(1+\sigma(a))^{r_1} e^{-\rho(\log a)} \quad (a \in A^+).$$

(ii) ある正数 r_0 が存在し,

(15) $$\int_G \Xi(x)(1+\sigma(x))^{-r_0}\,dx < \infty.$$

(iii) 任意の $g_1, g_2 \in U(\mathfrak{g}_c)$, $u \in S(\mathfrak{F})$, $s \in S(V)$ に対し, ある正数 c_1, c_2 が存在し, $L_M = {}^{\circ}\mathcal{C}(M, \tau_M)$ の元 ϕ に対して

(16) $$|E(P:\phi:\nu;u:g_1;x;g_2)|_s \le c_2 \|\phi\|_2 |(\nu,x)|^{r_2} \Xi(x)^{-\varepsilon+1}$$

$(x \in G,\ \nu \in \mathfrak{F}(\varepsilon))$ が成立する。ただし $|(\nu,x)| = (1+|\nu|)(1+\sigma(x))$, $\|\cdot\|_2$ は L^2-ノルムを表わす。

以下 $0 < p \le 2$, $\varepsilon = \frac{2}{p} - 1$ を固定し定理3の証明を行なう。まず $f \in \mathcal{C}^p(G, \tau)$ とした時, そのフーリエ変換像 $F(f)$ が H_p^τ に属する事を示す。すなわち (f, e_k) $(1 \le k \le n')$, $\hat{f}(\phi_i^j, \nu)$ $(1 \le i \le n_j, 1 \le j \le m)$ が空間 H_p^τ の4つの条件を満足する事を示す。

(C1): 上の不等式(ii), (iii)に注意すれば, $f \in \mathcal{C}^p(G, \tau)$ より,

$$|\hat{f}(\phi,\nu)| \le (c^2 r)^{-1} \int_G |f(x)|_s |E(P:\phi:\nu:x)|_s\,dx \quad (s \in S(V))$$

$$\le (c^2 r)^{-1} \mu^p_{r_2+r_0,1,1,s}(f) \int_G \Xi(x)^{\frac{2}{p}} (1+\sigma(x))^{-r_0-r_2} \times c_2 \|\phi\|_2 |(\nu,x)|^{r_2} \Xi(x)^{-\varepsilon+1}\,dx$$

$$= (c^2 r)^{-1} \mu^p_{r_2+r_0,1,1,s}(f)\, c_2 \|\phi\|_2 (1+|\nu|)^{r_2} \int_G \Xi(x)(1+\sigma(x))^{-r_0}\,dx$$

$$< \infty \quad (\phi \in L_M,\ \nu \in \mathfrak{F}(\varepsilon))$$

である。よって $\hat{f}(\phi,\nu)$ は $\mathfrak{F}(\varepsilon)$ で定義され，明らかに $\mathring{\mathfrak{F}}(\varepsilon)$ で正則な関数になる。

c(2)：任意の $u\in S(\mathfrak{t})$，正整数 ℓ に対して，ある $g_{1,i}$, $g_{2,i}$ $(1\leq i\leq d)$ を $U(\mathfrak{g}_c)$ から選び，

$$|\hat{f}(\phi,\nu;u)|(1+|\nu|)^{\ell}<\sum_{i=1}^{d}\left|\int_G f(x)E(P:\phi:\nu:g_{1,i}x;g_{2,i})dx\right|$$

$(\nu\in\mathfrak{F}(\varepsilon))$ が成立する様にできる。(see [9, Th 3.5.3]) よって条件 c(1) を調べた時と同様の方法により，r_2 が ℓ に従属しない事から，$\sup_{\nu\in\mathring{\mathfrak{F}}(\varepsilon)}|\hat{f}(\phi,\nu;u)|(1+|\nu|)^{\ell}$ は有限である事がわかる。

c(3)：任意の正整数 m，$\xi\in\mathring{\mathfrak{F}}(\varepsilon)$ に対して c(1) より

$$D^m(\xi)\hat{f}(\phi,\nu)=(c^2\gamma)^{-1}(f,D^m(\xi)E(P:\phi:\nu:\cdot))\qquad(\nu\in\mathfrak{F}(\varepsilon),\ \phi\in L_M)$$

が成立する事に注意する。よって Eisenstein 積分が関数等式（$\mathfrak{F}(\varepsilon)$ 内での）を満たす時，同じ関数等式を $\hat{f}(\phi,\nu)$ が満たすのは明らかである。

c(4)：この条件を満たす事を証明するのはかなり大変である。G_I の Paley-Wiener 型の定理の証明で用いた特異点を消去する方法をここでも用いる。まず，

$$F(x)=f(x)-\sum_{q=1}^{r_\varepsilon}c_q h_q(x)\qquad(x\in G)\tag{17}$$

と置く。ここで $c_q=D_q\hat{f}(\phi[q],\nu)$ $(1\leq q\leq r_\varepsilon)$ であり，この c_q は定理の仮定及びすでに示した条件 c(1) を用いる事により定義される。h_q $(1\leq q\leq r_\varepsilon)\in C_c^{\infty}(G,\tau)$ であるから明らかに F は $\mathcal{C}^p(G,\tau)$ に属する。

補題5　$D^m(\zeta^j_i(t))\hat{F}(\phi^j_i,\nu)=0$ がすべての $0\le m\le m^j_i(t)-1$, $1\le t\le T^j_i(\varepsilon)$, $1\le i\le n_j$, $1\le j\le m$ に対して成立する。

（証明）m, t, i, j を固定する。$S^\circ_\varepsilon=\{E_q\,;\,1\le q\le r_\varepsilon\}$ は S_ε の一次独立な元から成る最大部分集合であるから S_ε の元はその一次結合で書く事ができる。すなわち

$$D^m(\zeta^j_i(t))E(P:\phi^j_i:\nu:x)=\sum_{q=1}^{r_\varepsilon} a_q\,E_q(x)\qquad (a_q\in\mathbb{C})$$
$$=\sum_{q=1}^{r_\varepsilon} a_q\,D_q E(P:\phi[q]:\nu:x)$$

が成立する。ところで $F\in\mathcal{C}^P(G,\tau)$ よりすでに示した条件(13)を用いる事により

$$D^m(\zeta^j_i(t))\hat{F}(\phi^j_i,\nu)=\sum_{q=1}^{r_\varepsilon} a_q\,D_q\hat{F}(\phi[q],\nu)$$

が成立する事がわかる。ここで (12) $D_q\hat{h}_{q'}(\phi[q],\nu)=(h_{q'},D_qE(P:\phi[q];\nu:\cdot))=(h_{q'},E_q)=\delta_{q'q}$ $(1\le q,q'\le r_\varepsilon)$ に注意すれば $D_q\hat{F}(\phi[q],\nu)$ $=D_q\hat{f}(\phi[q],\nu)-\sum_{q'=1}^{r_\varepsilon}c_{q'}D_q\hat{h}_{q'}(\phi[q],\nu)=c_q-\sum_{q'=1}^{r_\varepsilon}c_{q'}\delta_{q'q}=0$ がすべての $1\le q\le r_\varepsilon$ に対して成立する。よって $D^m(\zeta^j_i(t))\hat{F}(\phi^j_i,\nu)=0$ である。

q.e.d.

次に F を (1) により $F=F_0+F_1$ $(F_0\in\mathring{\mathcal{C}}(G,\tau),\ F_1\in\mathcal{C}_A(G,\tau))$ と分解した時、F_1 が $\mathcal{C}^P(G,\tau)$ に属する事を示す。まず定理1により

(18)　$$F_1(x)=\frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}\int_{\mathfrak{F}}\mu(\omega_j,\nu)E(P:\phi^j_i:\nu:x)\hat{F}(\phi^j_i,\nu)\,d\nu\qquad(x\in G)$$

と書ける事に注意する。ここで次の展開を用いる。

Eisenstein 積分の Harish-Chandra 展開：唯一に決まる $\mathrm{End}(L_M)$ 値

有理型関数 $c_{P|P}(s;\nu)$ $(s \in W,\ \nu \in \mathfrak{F}_c)$ 及び有理関数 $\Gamma_{n\alpha}(\nu)$ ($n \in$ 正整数 $\mathbb{Z}^+$, $\nu \in \mathfrak{F}_c$) が存在し，$\phi \in L_M$ に対し，

$$(19) \qquad e^{\rho(\log a)} E(P:\phi:\nu:a) = \sum_{s \in W} \Phi(s\nu:a)\, c_{P|P}(s:\nu)\, \phi(1) \quad (a \in A^+)$$

が成立する。ただし $\Phi(\nu:a) = e^{\sqrt{-1}\nu(\log a)} \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \Gamma_{n\alpha}(\sqrt{-1}\nu-\rho)\, e^{-n\alpha(\log a)} = e^{\sqrt{-1}\nu(\log a)} \Phi_0(\nu:a)$ である。$\mathfrak{F}_c$ でもって上の有理型関数 $c_{P|P}(s,\nu)$ 及び $\Gamma_{n\alpha}$ が正則となる $\mathfrak{F}_c$ の開領域を表わす (see [10, p228, Th 9.1.4.1])。

この展開 (19) を前の (18) に代入する。ただし，上の展開が $\nu = 0$ で定義されるかどうか解らないので，まずコーシーの定理を用いて (18) の積分路 $\mathfrak{F}$ を $\mathfrak{F}_\delta$ (δ は十分小さな正数) へずらし，その上で (19) を代入する。よって $\mu(\omega_j,\nu)\, c_{P|P}(s;\nu)^* c_{P|P}(s;\nu) = c^2$ なる関係式を用いれば，$a \in A^+$ に対し

$$(20) \qquad \begin{aligned} |W|\, e^{\rho(\log a)} F_1(a) &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} \int_{\mathfrak{F}_\delta} \sum_{s \in W} \Phi(s\nu:a)\, c_{P|P}(s;\nu)^{*-1} \phi_i^j(1)\, \hat{F}(\phi_i^j,\nu)\, d\nu \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{s \in W} \int_{s(\mathfrak{F}_\delta)} \Phi(\nu:a)\, c_{P|P}(1:\nu)^{*-1} \phi_i^j(1)\, \hat{F}(\phi_i^j,\nu)\, d\nu \end{aligned}$$

を得る。ただし最後の変形には $\hat{F}(\phi_i^j,\nu)$ が (3) を満す事を用いた。以下，(20) の被積分関数 $\Phi(\nu:a)\, c_{P|P}(1:\nu)^{*-1} \phi_i^j(1)\, \hat{F}(\phi_i^j,\nu)$ を $I(j,i:\nu:a)$ と書く事にする。

ここで $\hat{F}(\phi_i^j,\nu)$ がすでに示した条件 (c1) により $\mathring{\mathfrak{F}}_\delta^+(\varepsilon)$ で正則であり，かつ補題5により $\Phi_0(\nu:a)\, c_{P|P}(1:\nu)^{*-1} \phi_i^j(1)$ $(a \in A^+)$ の $\mathfrak{F}_\delta^+(\varepsilon)$ における $m_i^j(t)$ 位の極 $\zeta_i^j(t)$ で，$m_i^j(t)$ 位の零点を持つ事に注意すれば $I(j,i:\nu:a)$ $(a \in A^+)$ は $\mathring{\mathfrak{F}}_\delta^+(\varepsilon)$ において正則である事がわかる。さらに次の不等式を満足する。

補題 6　$A_0^+=\{a\in A^+;\ \log a-H_0\in \mathfrak{a}^+\}$とする。この時任意の$u\in S(\mathfrak{F})$, $s\in S(V)$, $r\in \mathbb{Z}^+$, $v\in U(\mathfrak{a}_c)$（1と$\mathfrak{a}_c$によって生成されるU($\mathfrak{g}_c$)の部分環）に対して、ある定数$c_{u,v,s,r}$が存在し

(21)
$$|I(j,\lambda:\nu;u:a;v)|_s\leq c_{u,v,s,r}(1+|\nu|)^{-r}$$

が$\nu\in\mathfrak{F}_\delta^+(\varepsilon)$, $a\in A_0^+$に対して成立する。

（証明）Dを$\mathfrak{F}_c$の虚軸方向に有界な開領域とする。この時[4. §3]の結果により、ある定数c_4, $r_4>0$が存在し、

$$\|c_{P|P}(s:\nu)^{*-1}\|\leq c_4(1+|\nu|)^{r_4}\quad(\nu\in D,\ s\in W)$$

が成立する。ここで$\|\cdot\|$は作用素ノルムである。また[4. Lemma 2.3]を用いれば、ある正定数M, $r_4>0$が存在し、

$$\|\Gamma_{n\alpha}(\sqrt{-1}\nu-\rho)\|\leq M(1+|\nu|)^{r_4}e^{n\alpha(\frac{H_0}{2})}\quad(n\in\mathbb{Z}^+,\ \nu\in D)$$

である事がわかる。よって$a\in A_0^+$とすれば

$$\begin{aligned}\|\Phi_0(\nu:a)\|&\leq\sum_{n\in\mathbb{Z}^+}\|\Gamma_{n\alpha}(\sqrt{-1}\nu-\rho)\|e^{-n\alpha(\log a)}\\&\leq M(1+|\nu|)^{r_4}\sum_{n\in\mathbb{Z}^+}e^{-n\alpha(\log a-\frac{H_0}{2})}\leq M'(1+|\nu|)^{r_4}\end{aligned}$$

と押えられる事がわかる。ただし$M'=M\sum_{n\in\mathbb{Z}^+}e^{-n\alpha(\frac{H_0}{2})}$で$a\in A_0^+$には従属しない。以上の不等式と$I(j,\lambda:\nu:a)$が$\mathfrak{F}_\delta^+(\varepsilon)$で正則で$F_I(\Phi:\nu)$が急減少し、ある事を考えれば補題は明らかである。　q.e.d.

さていよいよF_Iが$\mathcal{C}^p(G,\tau)$に属する事を示す。すなわち任意の$g_1,g_2\in U(\mathfrak{g}_c)$, $m\in\mathbb{Z}^+$, $s\in S(V)$に対して

$$\sup_{x\in G} |F_1(g_1;x;g_2)|_s\, \Xi(x)^{-\frac{2}{p}}(1+\sigma(x))^m \tag{22}$$

が有限となる事を言えば良い。まず(22)の両側の微分作用素を片側に移す。すなわち ある $a_1,\cdots,a_t\in U(\mathfrak{g}_c)$ と定数 c が存在し

$$|F_1(g_1;x;g_2)|_s \le c\sum_{k=1}^{t} |F_1(x;a_k)|_s \quad (x\in G)$$

と書ける(see [11, p344, Lemma 3])。次に F_1 が τ-spherical である事から、$G=K\,\mathrm{cl}(A^+)K$ なるカルタン分解を用いる事により、上の不等式は本質的に $\mathrm{cl}(A^+)$ 上で示せば良い事がわかる。この時各 a_k $(1\le k\le t)$ に対して ある $b_{k,l},\ c_{k,l}\in U(\mathfrak{a}_c)$ 及び $|f_{k,l}(a)|\le c' e^{-\rho(\log a)}$ なる $C^\infty(A^+)$ の元 $f_{k,l}$ $(1\le l\le m_k)$ が存在し

$$|F_1(a;a_k)|_s \le \sum_{l=1}^{m_k}\{|F_1(a;b_{k,l})|_s + |f_{k,l}(a)||F_1(a;c_{k,l})|_s\}$$

$(a\in \mathrm{cl}(A^+))$ が成立する。以上の事から $A_1^+=\{a\in A_0^+;$ すべての k,l に対して $|f_{k,l}(a)|\le 1\}$ とすれば、ある $b_1,b_2,\cdots,b_w\in U(\mathfrak{a}_c)$ が存在し

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in KA_1^+K} |F_1(g_1;x;g_2)|_s\, \Xi(x)^{-\frac{2}{p}}(1+\sigma(x))^m \\ &\le c \sup_{a\in A_1^+}\sum_{h=1}^{w} |F_1(a;b_h)|_s\, e^{\frac{2}{p}\rho(\log a)}(1+\sigma(a))^{m+r_1}\end{aligned} \tag{23}$$

が成立する事がわかる。よって(20)に注意すれば、各 h $(1\le h\le w)$ に対し $\mathfrak{F}_c$ 上の多項式 P_h 及び $v_h\in U(\mathfrak{a}_c)$ が存在し

$$\begin{aligned}(23) &\le c \sup_{a\in A_1^+}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{h=1}^{w}\Big|\int_{\mathfrak{F}} u_{m_0}(e^{\sqrt{-1}\nu(\log a)})\, P_h(\sqrt{-1}\nu) \\ &\qquad \times I(j,i;\nu:a;v_h)\, d\nu\Big|_s\, e^{(\frac{2}{p}-1)\rho(\log a)}\end{aligned} \tag{24}$$

となる。ここで u_{m_0} $(m_0=m+r_1)$ は $(1+\sigma(a))^{m_0}\le u_{m_0}(\sqrt{-1}\log a)$ $(a\in A^+)$ を満たす $S(\mathfrak{F})$ の元である。よって ν に関する微分作用素を移行すれば、ある $u_{1,q},\ u_{2,q}\in S(\mathfrak{F})$ $(1\le q\le d)$ が存在し

$$(24) = c \sup_{a \in A_1^+} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{h=1}^{w} \sum_{q=1}^{d} \left| \int_{\mathcal{F}} e^{\sqrt{-1}\nu(\log a)} P_h(\sqrt{-1}\nu; u_{1,q}) \times I(j,i:\nu; u_{2,q}:a; \nu_h)\, d\nu \right|_s e^{\varepsilon\rho(\log a)}$$

となる。ここでコーシーの定理により積分路を $\mathcal{F}+\sqrt{-1}\varepsilon\rho$ へずらせば、上式 $= c \sup_{a \in A_1^+} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{h=1}^{w} \sum_{q=1}^{d} \left| \int_{\mathcal{F}+\sqrt{-1}\varepsilon\rho} e^{\sqrt{-1}\nu(\log a)} P_h(\sqrt{-1}\nu; u_{1,q}) \times I(j,i:\nu; u_{2,q}:a; \nu_h)\, d\nu \right|_s e^{\varepsilon\rho(\log a)}$

$$\leq c \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{h=1}^{w} \sum_{q=1}^{d} c_{u_{2,q},\,\nu_h,\,s,\,d_{h,q}} \int_{\mathcal{F}+\sqrt{-1}\varepsilon\rho} (1+|\nu|)^{-2} d\nu$$

となり、これは有限である。ただし $d_{h,q} = 2 + \deg(P_h(\cdot\,; u_{1,q}))$ であり、$c_{u_{2,q},\nu_h,s,d_{h,q}}$ は補題6により定まる定数である。

一方 $\mathcal{U}(A^+ - A_1^+)$ はコンパクトであるから、上の結果より (22) が有限となる事は明らかである。よって $\mathcal{F}_1 \in \mathcal{C}^p(G,\tau)$ が示された。

$\mathcal{F}$ は $\mathcal{C}^p(G,\tau)$ に属したので、上の事から $\mathcal{F}_0$ も $\mathcal{C}^p(G,\tau)$ に属さなければならない。$\mathcal{F}_0 = \sum_{k=1}^{i_p} (\mathcal{F}_0, e_k) e_k + \sum_{k=i_p+1}^{n'} (\mathcal{F}_0, e_k) e_k$ と書け $e_k\ (1 \leq k \leq i_p)$ が $\mathcal{C}^p(G,\tau)$ に属さない事に注意すれば、e_k の独立性により $(\mathcal{F}_0, e_k) = (\mathcal{F}, e_k) = 0 \quad (1 \leq k \leq i_p)$ でなければならない。よって (17) より $(f, e_k) = \sum_{q=1}^{r_\tau} c_q (h_q, e_k) = \sum_{q=1}^{r_\tau} D_q \hat{f}(\phi[q], \nu) A_{q,k} \quad (1 \leq k \leq i_p)$ が得られる。これは求めるべき条件 (4) の関係式にほかならない。

以上の事から $f \in \mathcal{C}^p(G,\tau)$ の時そのフーリエ変換像 $\mathcal{F}(f)$ は H_p^τ に属する事がわかった。

$\mathcal{C}^p(G,\tau) \subset \mathcal{C}(G,\tau)$ であるからフーリエ変換 $\mathcal{F}$ が $\mathcal{C}^p(G,\tau)$ 上で一対一である事は定理1より明らかである。よって上への写像である

事を示せば定理3の証明は完成する。

$\alpha = (a_K)_{K=1}^{n'} \oplus \bigoplus_{j=1}^{m} (\alpha_i^j(\nu))_{i=1}^{n_j}$ を H_p^2 の任意の元とし，$f = \mathcal{F}^{-1}(\alpha)$ と置く。

$$f(x) = \sum_{K=1}^{n'} a_K e_K(x) + \frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}\int_{\mathfrak{F}} \mu(\omega_j,\nu) E(\phi:\phi_i^j:\nu:x)\,\alpha_i^j(\nu)\,d\nu \quad (x\in G)$$

である。明らかに $\mathcal{F}(f)=\alpha$ であるから $f\in \mathcal{C}^p(G,\tau)$ を示せば良い。前同様に $F(x) = f(x) - \sum_{q=1}^{r_\varepsilon} c_q h_q(x)$ $(x\in G)$ と置く。ここで $c_p = D_p\alpha[p](\nu)$ $(1\le p\le r_\varepsilon)$ であり，これは α ~~及び F~~ が H_p^2 の元である事より定義される。今 $\mathcal{F}(F)=\beta$ と置けば，前半の結果より，$\mathcal{F}(h_q)\in H_p^2$ $(1\le q\le r_\varepsilon)$ である事から $\beta\in H_p^2$ が容易にわかる。

以下前半と同様の議論を用いる事により F を(1)により F_0+F_1 と分解した時，F_1 は $\mathcal{C}^p(G,\tau)$ に属する事がわかる。さらに β が条件(C4)を満たす事に注意すれば $1\le K\le i_p$ なる K に対して

$$\begin{aligned}(F,e_K) &= (f,e_K) - \sum_{q=1}^{r_\varepsilon} c_q(h_q,e_K)\\ &= a_K - \sum_{q=1}^{r_\varepsilon} D_q\alpha[q](\nu)A_{q,K} = 0\end{aligned}$$

である事がわかる。よって $F_0 = \sum_{K=i_p+1}^{n'}(F,e_K)e_K$ となり特に F_0 も $\mathcal{C}^p(G,\tau)$ の元である。故に $F=F_0+F_1$ は $\mathcal{C}^p(G,\tau)$ の元であり，$h_q\in C_c^\infty(G,\tau)$ $(1\le q\le r_\varepsilon)$ より f 自身も $\mathcal{C}^p(G,\tau)$ の元である。

以上の考察により定理3の証明は完成した。 q.e.d.

6. リーマン・ルベーグの補題　G 上の τ-spherical でかつ p $(0<p\le 2)$ 乗可積分な関数全体を $L^p(G,\tau)$ と書く事にする。今 f を $L^p(G,\tau)$ の元とした時，そのフーリエ変換 $\hat{f}(\phi,\nu)$ $(\phi\in\mathcal{L}_M,$

$\nu\in\mathcal{F}$) の $|\nu|\to\infty$ とした時の様子を調べる。以下 $\varphi\in L_M$, $s\in S(V)$ を固定する。V値関数の L^p ノルムを $\|f\|_p=\left(\int_G |f(x)|_s^p\,dx\right)^{1/p}$ で定義する。

<u>命題7</u>　f を $L^1(G,\tau)$ の元とすると $\displaystyle\lim_{\substack{|\nu|\to\infty\\ \nu\in\mathcal{F}}}\hat{f}(\varphi,\nu)=0$ が成立する。

(証明) まずある定数 M_1 が存在し $|E(p:\varphi:\nu:x)|_s\leq M_1$ $(\nu\in\mathcal{F},\ x\in G)$ となる事に注意する。今、任意の正数 δ に対して $g\in C_c^\infty(G,\tau)$ ($L^1(G,\tau)$ の中で稠密) を $\|f-g\|_1<\delta/2M$ を満す様にとる。この時 $|\hat{f}(\varphi,\nu)-\hat{g}(\varphi,\nu)|<\delta/2$ $(\nu\in\mathcal{F})$ が容易に示される。一方 $g\in C_c^\infty(G,\tau)$ より、ある正数Nが存在し $|\nu|>N$ ならば $|\hat{g}(\varphi,\nu)|<\delta/2$ とできる。よって $|\nu|>N$ に対して $|\hat{f}(\varphi,\nu)|<\delta$ が成立する。δ の任意性により求める結果は明らかである。　q.e.d.

<u>命題8</u>　f を $L^p(G,\tau)$ $(1<p<2)$ の元とする。$\displaystyle\lim_{\substack{|\nu|\to\infty\\ \nu\in\mathcal{F}}}\hat{f}(\varphi,\nu)=0$ である。

まず次の補題を証明する。

<u>補題9</u>　$2<q<\infty$ なる正数 q に対し、$\displaystyle\sup_{\nu\in\mathcal{F}}\|E(p:\varphi:\nu:\cdot)\|_q$ は有限である。以下、この値を M_q と置く。

(証明) $\Xi(x)$ が (14)の不等式により急減少している事から任意の $\alpha>0$, $\beta\geq 0$ に対してある定数 $C_{\alpha,\beta}>0$ が存在し, $\Xi(x)^{\alpha}(1+\sigma(x))^{\beta} \leq C_{\alpha,\beta}(1+\sigma(x))^{-r_0}$ $(x\in G)$ とできる事に注意する。よって

$$\sup_{\nu\in\mathfrak{F}}\int_G |E(P:\phi:\nu:x)|_s^q\,dx \leq M_1^q\int_G \Xi(x)^q\,dx$$
$$\leq M_1^q C_{q-2,0}\int_G \Xi(x)^2(1+\sigma(x))^{-r_0}\,dx<\infty$$

である。ただし $|E(P:\phi:\nu:x)|_s \leq M_1\Xi(x)$ $(x\in G,\ \nu\in\mathfrak{F})$ なる事実を用いた。この事から補題は明らかである。 q.e.d.

(命題8の証明) 今 $q=\frac{p}{p-1}$ と置く。すなわち $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $2<q<\infty$ である。任意の正数 δ に対して $g\in C_c^{\infty}(G,\tau)$ を $\|f-g\|_p<\delta/2M_q$ となる様に選ぶ。この時、ヘルダーの不等式と上の補題を用いれば

$$|\hat{f}(\phi,\nu)-\hat{g}(\phi,\nu)| \leq \int_G |f-g|_s\,|E(P:\phi:\nu:x)|_s\,dx$$
$$\leq \|f-g\|_p \sup_{\nu\in\mathfrak{F}}\|E(P:\phi:\nu:x)\|_q < \delta/2$$

$(\nu\in\mathfrak{F})$ が成立する。よって以下前と同様の方法により命題は示される。 q.e.d.

<u>命題10</u>　f を $L^p(G,\tau)$ $(1\leq p<2)$ の元とし, $\varepsilon=\frac{2}{p}-1$ とする。この時任意の $0\leq\varepsilon_0<\varepsilon$ なる ε_0 に対してある f に従属しない定数 $l=l_{\varepsilon_0}$ が存在し, $\lim_{\substack{|\mathrm{Re}\,\nu|\to+\infty\\ \nu\in\mathfrak{F}(\varepsilon_0)}} \hat{f}(\phi,\nu)/(1+|\nu|)^{l}=0$ が成立する。ただし $\varepsilon_0=0$ の時は $l_0=0$, $\mathfrak{F}(0)=\mathfrak{F}$ である。

(証明)　前の命題7.8により $\varepsilon_0 = 0$ の時はすでに示されている。よって $\varepsilon_0 > 0$ と仮定する。ここで前の不等式(16)を用いる。すなわちある定数 c, $\ell = \ell_{\varepsilon_0}$ が存在し

$$|E(P:\phi:\nu:x)|_s \leq c(1+|\nu|)^{\ell}(1+\sigma(x))^{\ell}\,\Xi(x)^{-\varepsilon_0+1} \quad (\nu \in \mathcal{F}(\varepsilon_0))$$

が成立する。よって $q = \frac{p}{p-1}$ とすれば $-q\varepsilon_0+q-2 > -q\varepsilon+q-2 = 0$ に注意して

$$\int_G |E(P:\phi:\nu:x)|_s^q\,dx \leq c^q(1+|\nu|)^{q\ell}\int_G \Xi(x)^{-q\varepsilon_0+q}(1+\sigma(x))^{q\ell}\,dx$$

$$\leq c^q(1+|\nu|)^{q\ell}\,C_{-q\varepsilon_0+q-2,\,q\ell}\int_G \Xi(x)(1+\sigma(x))^{-r_0}\,dx$$

$$\leq N^q(1+|\nu|)^{q\ell} \qquad (\nu \in \mathcal{F}(\varepsilon_0))$$

となる。ここで N は ν に従属しない定数である。よって任意の正数 δ に対して $g \in C_c^{\infty}(G,\tau)$ を $\|f-g\|_p < \delta/2N$ となる様に選べば $\nu \in \mathcal{F}(\varepsilon_0)$ に対しヘルダーの不等式より $|\hat{f}(\phi,\nu)-\hat{g}(\phi,\nu)|/(1+|\nu|)^{\ell} < \delta/2$ が成立する事がわかる。以下前と同様の方法により命題は示される。　q.e.d.

7. <u>結合関数のフーリエ変換</u>　ここでは $\mathcal{C}(G,\tau)$ の元 f, g の結合関数 $f*g\,(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\,dy$ $(x \in G)$ のフーリエ変換 $\widehat{f*g}(\phi,\nu)$ $(\phi \in L_M, \nu \in \mathcal{F})$ について調べる。(1)の分解に従って $f = f_0 + f_1$, $g = g_0 + g_1$ $(f_0, g_0 \in {}^{\circ}\mathcal{C}(G,\tau),\ f_1, g_1 \in \mathcal{C}_A(G,\tau))$ と書く事にする。

<u>補題 11</u>　$f*g = f_0*g_0 + f_1*g_1$

(証明)　f_0がカスプ形式である事から $(f_0)^{(P)}_{\nu}(m) = \int_{AN} f_0(man)e^{(\sqrt{-1}\nu-\rho)(\log a)}\,da\,dn = 0$ $(m\in M)$ に注意する。よって [3, Lemma 8.2] より $f_0 * E(P:\phi:\nu:\cdot) = E(P:(f_0)^{(P)}_{\nu}*\phi:\nu:\cdot) = 0$ $(\phi\in L_M, \nu\in\mathfrak{F})$ である。この事から g_1が wave packet の形で書けている事に注意して $f_0 * g_1 = 0$ を得る。同様に $f_1 * g_0 = 0$ も示され補題は成立する。　　q.e.d

カスプ形式の空間 L_G, L_M はそれぞれ結合積で閉じているので、ある定数 $c_{kk's}$ $(1\leq k,k',s\leq n')$ $c^{jj'u}_{ii'v}$ $(1\leq i\leq n_j, 1\leq i'\leq n_{j'}, 1\leq v\leq n_u, 1\leq j,j',u\leq m)$ が存在して、

$$e_k * e_{k'} = \sum_{s=1}^{n'} c_{kk's}\, e_s$$

$$\phi^j_i * \phi^{j'}_{i'} = \sum_{u=1}^{m}\sum_{v=1}^{n_u} c^{jj'u}_{ii'v}\, \phi^u_v$$

と書ける事がわかる。

<u>命題 12</u>

$$\widehat{f*g}(\phi^u_v,\nu) = (c^2r)^{-1}\sum_{j,j'=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{i'=1}^{n_{j'}} c^{jj'u}_{ii'v}\,\hat{f}(\phi^j_i,\nu)\,\hat{g}(\phi^{j'}_{i'},\nu) \quad (\nu\in\mathfrak{F})$$

$$(f*g, e_s) = \sum_{k,k'=1}^{n'} c_{kk's}\,(f, e_k)(g, e_{k'})$$

(証明)　$f\in\mathcal{C}(G,\tau)$ に対して $(f)^{(P)}_{\nu} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_j}\hat{f}(\phi^j_i,\nu)\,\phi^j_i$ $(\nu\in\mathfrak{F})$, $f_0 = \sum_{k=1}^{n'}(f_0, e_k)e_k$ と書ける事に注意する。[3, Lemma 8.1] より $\widehat{f*g}(\phi,\nu) = (c^2r)^{-1}(f*g, E(P:\phi:\nu:\cdot)) = (c^2r)^{-1}((f*g)^{(P)}_{\nu}, \phi) = (c^2r)^{-1}((f)^{(P)}_{\nu}*(g)^{(P)}_{\nu}, \phi)$ $(\phi\in L_M, \nu\in\mathfrak{F})$ となる事から前半の関係式は明らかである。後半は容易に得られる。　　q.e.d.

系13. $\mathcal{C}(G,\tau)$ が結合積に関して可換である必要十分条件は V^M が可換である事である。

(証明) $\mathcal{C}_c^\infty(G,\tau)$ に対して示せば十分である。ところで前の命題12より結合積に関して可換であるためには L_M, L_G が可換である事が必要かつ十分である。前の定理4に注意すれば $\mathcal{C}_c^\infty(G,\tau)$ の元のカスプ成分は wave packet の部分のフーリエ変換によって決定される事がわかる（$\varepsilon=\infty$ の時の条件 (4.1)）。よって特に L_M が可換ならば L_G は可換である。また $L_M \cong V^M$ であり、その同型対応に対し、$u*v(1)=u(1)\cdot v(1)$ $(u,v\in L_M)$ が成立する事に注意する。以上の事から系は明らかである。 q.e.d.

参考文献

[1] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups I, J. of Functional Analysis 19 (1975), 104-204.

[2] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups II, Invent. Math. 36 (1976), 1-55.

[3] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups III, Ann. of Math. 104 (1976), 117-201.

[4] K. D. Johnson, Paley-Wiener theorems on groups of split rank one, J. of Functional Analysis 34 (1979), 54-71.

[5] T. Kawazoe, An analogue of Paley-Wiener theorem on rank one semisimple Lie groups I, Tokyo J. Math. 2 (1979), 397-407.

[6] T. Kawazoe, An analogue of Paley-Wiener theorem on rank one semisimple Lie groups II, Tokyo J. Math. 2 (1979) 407-421.

[7] D. Miličić, Asymptotic behaviour of matrix coefficients of the discrete series, Duke Math. J. 44 (1977), 59-88.

[8] P. C. Trombi and V. S. Varadarajan, Asymptotic behaviour of eigenfunctions on a semisimple Lie group; The discrete spectrum, Acta Math. 129 (1972), 237-280.

[9] P. C. Trombi and V. S. Varadarajan, Spherical transforms on semisimple Lie groups, Ann. of Math. 94 (1971), 246-303.

[10]G. Warner, Harmonic analysis on Semi-Simple Lie Groups II , Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[11]V. S. Varadarajan, Harmonic Analysis on Real Reductive Groups, Springer-Verlag, Lecture Notes in Math. vol 576 (1977).