数理解析研究所講究録
426巻 1981年 71-85

対称空間上の L_p 解析 II

広島大　総合科学部
江口　正晃

対称 Riemann 空間上の spherical Fourier 変換 $f \longmapsto \tilde{f}$ ($f \in C_c^\infty(K\backslash G/K)$) を L_p ($1 \leq p < 2$) 関数にまで拡張するとき，$\tilde{f}$ が p によって定まるある tube domain にまで解析的に延長出来て，そこで Hausdorff－Young の定理，Riemann－Lebesgue の補題が成り立つことを示す．Euclid 空間上での普通の意味の Fourier 変換に対しては，上の様な性質を持つ domain は存在しない．$SL(2:\mathbb{R})$ の場合には Kunze－Stein [3] により，また $SL(n:\mathbb{C})$ については Lipsman [4, 5] によって議論されている．ただ何れの場合にも Hausdorff－Young の不等式についてはより弱い形で，L_p の場合の Riemann－Lebesgue の補題については unitary の所でのみ与えられている．

§1.　記号と準備

G を中心有限な連結半単純 Lie 群，K をその極大 compact

部分群，$G=KAN$，$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{a}+\mathfrak{n}$ をそれぞれ G およびその Lie 環 $\mathfrak{g}$ の岩沢分解とする．岩沢分解によって $g\in G$ を $g=\kappa(g)\exp H(g)n(g)$ ($\kappa(g)\in K$, $H(g)\in\mathfrak{a}$, $n(g)\in N$) と表わすことが出来る．$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を Cartan 分解とし，$\mathfrak{a}\subset\mathfrak{p}$ とする．$\mathfrak{a}^*$ を $\mathfrak{a}$ の実双対空間，root α に対する root space を $\mathfrak{g}_\alpha$ とかく．Δ を $(\mathfrak{g}:\mathfrak{a})$ の roots 全体の集合，Δ^+ を正 roots 全体の集合とする．Σ で Δ^+ の reduced roots 全体の集合を表わす．$\alpha\in\Delta$ に対し $m(\alpha)$ は α の重複度を表わす．$\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+}m(\alpha)\alpha$ とおく．$(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ の Weyl 群を W とかく．

$\mathcal{H}$ を可分な複素 Hilbert 空間，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素のつくる環とする．$B\in\mathcal{B}$ の跡を $\operatorname{tr}B$，その operator norm を $\|B\|_\infty$ とかく．$1\leq p<\infty$ に対して

$$\mathcal{B}_p=\{B\in\mathcal{B}\ ;\ \|B\|_p=(\operatorname{tr}((B^*B)^{p/2}))^{1/p}<\infty\}$$

とおくと $\|\ \|_p$ によって $\mathcal{B}_p$ は Banach 空間となる．

§2. 球関数と c-関数

A, K, N, G 上の Haar 測度をいつもの様に正規化しておく．また A, $\mathfrak{a}^*$ 上の測度は A と $\mathfrak{a}^*$ 上で定まる可換群の Fourier 変換，逆変換の定数 $(2\pi)^{1/2}$ をこめたものとする．$\nu\in\mathfrak{a}_c^*$ に対する G 上の基本球関数を φ_ν，Harish-Chandra の c-関数を $c(\nu)$ とする：

$$\varphi_\nu(x) = \int_K e^{(\sqrt{-1}\nu-\rho)(H(xk))}dk, \quad x \in G,$$

$$\varphi_\nu(\exp H) \sim e^{-\rho(H)} \sum_{s\in W} c(s\nu)e^{\sqrt{-1}\nu(sH)}, \quad H \in \mathfrak{a}^+.$$

ここで ν は $\mathfrak{a}_c^*$ のある open dense 部分集合を動く.

G上の両側K不変な急減少関数 f に対してその spherical Fourier - Laplace 変換 $\tilde{f}$ は次の (2.1) 式で与えられ (2.2), (2.3) が成り立つ.

(2.1) $$\tilde{f}(\nu) = \int_G f(x)\varphi_\nu(x^{-1})dx, \qquad \nu \in \mathfrak{a}^*$$

(2.2) $$f(x) = [W]^{-1}\int_{\mathfrak{a}^*} \tilde{f}(\nu)\varphi_\nu(x)|c(\nu)|^{-2}d\nu$$

(2.3) $$\int_G |f(x)|^2dx = [W]^{-1}\int_{\mathfrak{a}^*} |\hat{f}(\nu)|^2|c(\nu)|^{-2}d\nu.$$

$$F_f(a) = e^{\rho(\log a)}\int_N f(an)dn$$

とおくと spherical Fourier-Laplace 変換は変換 $f \mapsto F_f$ とユークリッド空間上の Fourier 変換との合成である.

各 $\alpha \in \Sigma$ に対して $\mathfrak{g}^\alpha$ を $\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_{-\alpha}$ で生成される $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 環, $\mathfrak{k}^\alpha = \mathfrak{g}^\alpha \cap \mathfrak{k}$, $\mathfrak{p}^\alpha = \mathfrak{g}^\alpha \cap \mathfrak{p}$ とすると $\mathfrak{g}^\alpha = \mathfrak{k}^\alpha + \mathfrak{p}^\alpha$ は $\mathfrak{g}^\alpha$ の Cartan 分解を与える. $\mathfrak{a}^\alpha = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}^\alpha$ とし, $\nu \in \mathfrak{a}_c^*$ に対して $\nu_\alpha = \nu|_{\mathfrak{a}^\alpha}$ とおく. Gindikin - Karpelevič [1] によって

$$c(\nu) = I(\sqrt{-1}\nu)/I(\rho), \qquad I(\nu) = \prod_{\alpha\in\Sigma} B\left(\frac{m(2\alpha)}{2}, \frac{m(\alpha)}{4} + \sqrt{-1}\frac{(\nu_\alpha, \alpha)_\alpha}{(\alpha,\alpha)_\alpha}\right)$$

で与えられる. $a(\alpha) = m(\alpha) + m(2\alpha)$ とおく.

Lemma 1. (Helgason-Johnson [2]). $\mathcal{C}_\rho$ を $s\rho\ (s\in W)$ の convex hull とし, $\mathcal{T}_\rho$ を $\mathrm{Im}\,\nu\in\mathcal{C}_\rho$ で定まる $\mathfrak{a}_c^*$ の tube domain とする。この時

$$|\varphi_\nu(x)|\le 1 \quad (x\in G) \iff \nu\in\mathcal{T}_\rho.$$

Lemma 2. 次の不等式がなりたつ様な $C_1, C_2>0$ が存在する：

$$C_1\,|c(\nu)|^{-2}\le\prod_{\alpha\in\Sigma}\left|(\nu_\alpha,\alpha)_\alpha\right|^2\left(1+|(\nu_\alpha.\alpha)_\alpha|\right)^{a(\alpha)-2}\le C_2\,|c(\nu)|^{-2}.$$

これらの lemma と Parseval の等式とから次の2つの不等式が得られる.

$$(2.4)\qquad |\tilde f(\nu)|\le\|f\|_1 \qquad \nu\in\mathcal{T}_\rho$$

$$(2.5)\qquad \exists\, C>0\ ;\quad \int_{\mathfrak{a}^*}|\tilde f(\nu)|^2\prod_{\alpha\in\Sigma}|(\nu_\alpha.\alpha)_\alpha|^2(1+|(\nu_\alpha.\alpha)_\alpha|)^{a(\alpha)-2}\le C\,\|f\|_2^2.$$

§3. $\pi_\nu(f)$ の p-norm.

$\mathcal{H}=L_2(K/M)$ とし, $\pi_\nu=\mathrm{ind}_{MAN\uparrow G}\,1_M\otimes\nu \quad (\nu\in\mathfrak{a}_c^*)$. とする.

$$\pi_\nu(f)=\int_G f(x)\,\pi_\nu(x)\,dx \qquad f\in L_1(K\backslash G/K)$$

とおく.

<u>Lemma 3</u>. $1 \le p \le \infty$ とする. $f \in L_1(K \backslash G/K)$ に対して

$$\|\pi_\nu(f)\|_p = |\hat{f}(\nu)|, \qquad \nu \in \mathfrak{a}^*.$$

§4. Convex hull についての補題.

$\mathfrak{C}$ を $\mathfrak{a}$ における正 Weyl 領域(境界を含まず), $\mathfrak{a}_+ = \mathrm{cl}\,\mathfrak{C}$, $\check{\mathfrak{C}}$ を $\mathfrak{C}$ の dual cone, i.e. $\mathfrak{C}^\vee = \{H \in \mathfrak{a};\ (H, \mathfrak{C}) > 0\}$ とする. Killing form を $\mathfrak{a}$ に制限したもの $(\ ,\ )$ は $\mathfrak{a}$ 上非退化な双一次形式であるから, 任意の $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ に対して $H_\lambda \in \mathfrak{a}^*$ が定まって $\lambda(H) = (H_\lambda, H)$ $(H \in \mathfrak{a})$ が成り立つ.

$H_{s\rho}$ $(s \in W)$ の convex hull (境界も込める) を $[H_{s\rho};\ s \in W]$ とかくと, 次の関係が知られている (例えば [6, pp. 361]).

$$[H_{s\rho};\ s \in W] = \mathrm{cl} \bigcup_{s \in W} s(\mathfrak{C} \cap (-\mathfrak{C}^\vee + H_\rho)).$$

$p > 0$ に対して $\mathfrak{C}_{p\rho} = [s(p\rho);\ s \in W]$ とおく. また

$$F_p = \{\lambda \in \mathfrak{a}^*;\ |(s\lambda)(H)| \le p\rho(H),\ \ ^\forall H \in \mathfrak{C},\ ^\forall s \in W\}$$

とおくと実は $\mathfrak{C}_{p\rho} = F_p$ が知られる.

$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ $(r = \dim \mathfrak{a})$ を Σ の fundamental system とすれば $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in \Delta^+} m(\lambda)\lambda = \sum_{j=1}^{r} m_j \lambda_j$ $(m_j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_+ \cup \mathbb{Z}_+)$ と表わすことが出来る.

<u>Lemma 4</u>. $p > 0$ とする. $\eta = \eta_1\lambda_1 + \cdots + \eta_r\lambda_r \in \mathfrak{a}^*$ に対し,

$$\eta \in \mathfrak{a}_+^* \cap \mathfrak{C}_{p\rho} \iff 0 \le \eta_j \le p m_j \quad (j = 1, 2, \cdots r).$$

§5. Hausdorff − Young の不等式

$z = x + \sqrt{-1}\,y$ $(x, y \in \mathbb{R})$ を複素変数とする．$\alpha < \beta$ とし，$\mathcal{D} = \mathcal{D}(\alpha, \beta) = \{ z \in \mathbb{C}\,;\ \alpha \leq \operatorname{Im} z \leq \beta \}$ とおく．$\mathcal{D}$ 上の複素数値関数 φ が次の2つの条件 (i)，(ii) を満すならば，φ は $\mathcal{D}$ において admissible であるという．(i) $\mathcal{D}$ の内部 $\operatorname{Int}\mathcal{D}$ において analytic，(ii) admissible growth である．即ち，適当な a $(a < \pi/\beta-\alpha)$ をとると

$$\sup_{\alpha \leq y \leq \beta} \log |\varphi(x+\sqrt{-1}\,y)| = O e^{a|x|}.$$

$\mathcal{H}$ を separable な Hilbert 空間，$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素のつくる Banach 空間とする．N を測度 $d\nu$ を持つ測度空間とする．$1 \leqq p \leqq \infty$ に対して

$$\mathcal{B}_p(N, \mathcal{H}) = \{ \mathcal{F} : N \to \mathcal{B}(\mathcal{H})\,;\ \text{measurable で } \|\mathcal{F}\|_p < \infty \}$$

とおく．ここで $\|\mathcal{F}\|_p = \left(\int_N \|\mathcal{F}(x)\|_p^p \, d\nu(x) \right)^{1/p} < \infty$，$1 < p < \infty$；$\|\mathcal{F}\|_\infty = \operatorname{ess.sup}_N \|\mathcal{F}(x)\|_\infty < \infty$.

$(M, d\mu)$ を測度空間，$S(M)$ を M 上の単関数全体の空間とする．各 $f \in S(M)$，$z \in \mathcal{D}$ に対して $T_z(f) = F_z$ は N 上で定義された $\mathcal{H}$ 上の作用素値関数で可測とする．family $\{T_z\}$ が次の2条件 (i)，(ii) を満すとき admimissible family という．(i) 任意の $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ に対して $(F_z(x)\xi, \eta)$ が N 上で局所可積分；(ii) N の任意の有界部分集合 N' に対して $\Phi(z) = \int_{N'} (F_z(x)\xi, \eta)\, d\nu(x)$ が $\mathcal{D}$ 上 admissible．

<u>Lemma 5</u> ([3]). $\alpha<\beta$ とし, $\{T_z\}$ $(z\in\mathcal{D}(\alpha,\beta))$ は $S(M)$ から N 上で定義された $\mathcal{H}$ 上の有界な作用素値可測関数への線型写像 T_z の family で次の条件を満すと仮定する.

(i) 各 $f\in S(M)$ に対し $F_z=T_z(f)$ が $\alpha<\mathrm{Im}\,z<\beta$ に於て admissible ; (ii) $1\leqq p_1, p_2, q_1, q_2\leqq\infty$ が $\tau=(t-\alpha)/(\beta-\alpha)$ $(\alpha\leqq t\leqq\beta)$ に対して

$$1/p=(1-\tau)/p_1+\tau/p_2,\quad 1/q=(1-\tau)/q_1+\tau/q_2$$

を満し, 更に T が

$$\|T_{y+\sqrt{-1}\alpha}(f)\|_{q_1}\leqq A_0(y)\|f\|_{p_1},\ \|T_{y+\sqrt{-1}\beta}(f)\|_{q_2}\leqq A_1(y)\|f\|_{p_2}$$

を満すとする. 但し, $A_j(y)$ は或る適当な定数 $C>0$ および $a<\pi/(\beta-\alpha)$ に対して

$$A_j(y)\leqq Ce^{a|y|},\qquad j=0,1.$$

を満すものとする.

以上の仮定のもとに

$$\|T_{\sqrt{-1}t}(f)\|_q\leqq C_t\|f\|_p,\qquad f\in S(M)$$

が成り立つ. 但し, 定数 C_t は次の式で与えられる.

$$\log C_t=\int_{-\infty}^{\infty}\omega(1-\tau,y)\log A_0((\beta-\alpha)y)\,dy+\int_{-\infty}^{\infty}\omega(\tau,y)\log A_1((\beta-\alpha)y)\,dy. \tag{5.1}$$

ここで

$$\omega(t,x)=\frac{\frac{1}{2}\tan(\frac{\pi t}{2})\operatorname{sech}^2(\frac{\pi x}{2})}{\tan^2(\frac{\pi t}{2})+\tanh^2(\frac{\pi x}{2})},\quad 0\leqq t\leqq 1,\quad x\in\mathbb{R}.$$

S を G 上の単関数で両側 K－不変なもの全体のつくる空間とし，$f \in S$ に対して $\mathfrak{F}f(\nu) = \pi_\nu(f)$ $(\nu \in \mathcal{T}_p)$ によって $\mathfrak{F}$ を定める．

Lemma 6. $1 < p < 2$, $1/p + 1/q = 1$, $\varepsilon = 2/p - 1$ とする．$\eta \in \mathcal{F}_\varepsilon^+ = \mathrm{Int}\,\mathcal{F}_\varepsilon \cap \mathfrak{a}_+$, $\eta \neq 0$, に対して，正の定数 $C_{p,\eta}$ が存在して次の不等式が成立する．

$$\left(\int_{\mathfrak{a}^*} |\tilde{f}(\xi + \sqrt{-1}\eta)|^q \prod_{\alpha \in \Sigma} (1 + |(\xi_\alpha, \alpha)_\alpha|)^{a(\alpha)} d\xi \right)^{1/q} \leq C_{p,\eta} \|f\|_p,$$

$f \in S$.

証明のあらまし．$\gamma = \varepsilon^{-1}\eta$ とおくと $\gamma \in \mathcal{F}_1$，従って任意の $\nu \in \mathfrak{a}^*$ に対して $\nu + \sqrt{-1}\gamma \in \mathcal{T}_p$ であるから

(5.2) $\quad \|\mathfrak{F}f(\nu + \sqrt{-1}\eta)\|_\infty \leq \|f\|_1, \qquad \nu \in \mathfrak{a}^*,\ f \in S.$

である．今 $\mathfrak{a}^*$ の basis $\{\mu_1, \dots, \mu_r\}$ を $\mu_1 = \eta/|\eta|$ となるように選んでおく．$\nu \in \mathcal{T}_p$ に対して

(5.3) $\quad T_\nu(\zeta) = \mathfrak{F}f(\nu + \zeta) \prod_{\alpha \in \Sigma} (1 + |(\zeta_\alpha, \alpha)_\alpha|)^{-1} (\nu_\alpha + \zeta_\alpha, \alpha)_\alpha, \quad \zeta \in \mathfrak{a}^*$

とおき，$\mathfrak{a}^*$ を測度 $d\mu = \prod_{\alpha \in \Sigma} (1 + |(\zeta_\alpha, \alpha)_\alpha|)^{a(\alpha)} d\zeta$, $d\zeta = d\zeta_1 \cdots d\zeta_r$ $(\zeta = \sum \zeta_j \lambda_j)$ を持つ測度空間とみなす．$\nu = \sum_{j=1}^r \nu_j' \mu_j \in \mathcal{T}_p$ と表すとき，r－複素変数の関数 $\mathfrak{F}f(\nu) = \mathfrak{F}f(\nu_1', \dots, \nu_r')$ は $\mathcal{T}_p$ に対応する $\mathbb{C}^r$ の或る tube domain において analytic な

$\mathcal{H}=L_2(K/M)$ 上の有界作用素値関数である．そこで各 $f\in S$ に対して対応 $\Upsilon_{\nu'}: f\mapsto T_{\nu'}$ ($\nu'\in\mathbb{C}$, $0\leqq \mathrm{Im}\,\nu'\leqq \varepsilon^{-1}|\eta|$) を考えると $\{\Upsilon_{\nu'}\}$ が $0<\mathrm{Im}\,\nu'<\varepsilon^{-1}|\eta|$ において admissible な family であることが示される．(5.2), (5.3) より $\nu=(\xi+\sqrt{-1}\varepsilon^{-1}|\eta|)\mu_1$ ($\xi\in\mathbb{R}$) に対して

$$\|T_\nu(\zeta)\|_\infty \leqq \|f\|_1 A_1(\xi), \qquad A_1(\xi)=\prod_{\alpha\in\Sigma}(1+|(\nu_\alpha.\alpha)_\alpha|)$$

が得られる．また一方，(2.5) および

$$\begin{cases} \nu\in\mathbb{R},\ \delta>0 \text{ に対して } \exists C>0\ ; \\ (\delta+|y+t|)^\nu \leqq C(1+|y|)^{|\nu|}(1+|t|)^\nu, \quad -\infty<y,t<\infty \end{cases}$$

という事実を用いると適当に正数 C を選べば $\nu=\xi\mu_1$ に対し

$$\|T_\nu(\zeta)\|_2 \leqq \|f\|_2 A_0(\xi), \qquad A_0(\xi)=C\prod_{\alpha\in\Sigma}(1+|(\nu_\alpha.\alpha)_\alpha|)^{|\ell(\alpha)-2|/2}$$

が得られる．Lemma 5 において $p_1=q_1=2$, $p_2=1$, $q_2=\infty$, $\alpha=0$, $\beta=\varepsilon^{-1}|\eta|$ とすると $\{\Upsilon_{\nu'}\}$ がすべてその条件をみたすことが分る．また $\tau=\varepsilon$ とおくと $0<\tau<1$, $t=|\eta|$ で更に

$$(1-\tau)/p_1 + \tau/p_2 = (1+\tau)/2 = 1/p$$

$$(1-\tau)/q_1 + \tau/q_2 = (1-\tau)/2 = 1/q$$

であるから同 Lemma より

$$\|\Upsilon_t(f)\|_q = \|T_{\sqrt{-1}\eta}(\zeta)\|_q$$

$$= \left(\int_{\mathfrak{a}^*} |\tilde{f}(\xi+\sqrt{-1}\eta)|^q \prod_{\alpha\in\Sigma} (1+|(\xi_\alpha,\alpha)_\alpha|)^{a(\alpha)-q} |(\xi_\alpha+\sqrt{-1}\eta_\alpha,\alpha)_\alpha|^q d\xi \right)^{1/q}$$

$$\leqq A_p \|f\|_p .$$

ここで A_p は $\tau = 2/p - 1$ とおいて次式で与えられる.

$$\log A_p = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(1-\tau, y) \log A_0(\varepsilon^{-1}|\eta| y)\, dy + \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\tau, y) \log A_1(\varepsilon^{-1}|\eta| y)\, dy.$$

Corollary　$\eta \in \mathrm{Int}\, F_\varepsilon$, $\eta \neq 0$ に対して, 次の不等式を満す正定数 $C_{p,\eta}$ が存在する.

$$\left(\int_{\mathfrak{a}^*} |\tilde{f}(\xi+\sqrt{-1}\eta)|^q d\xi \right)^{1/q} \leqq C_{p,\eta} \|f\|_p, \qquad f \in S.$$

Lemma 2 と Lemma 6 とから次の Hausdorff-Young の不等式が得られる.

Theorem 1.　$1 < p < 2$, $1/p + 1/q = 1$, $\varepsilon = 2/p - 1$ とする. $\eta \in \mathrm{Int}\, F_\varepsilon$, $\eta \neq 0$ に対して或る正定数 $C_{p,\eta}$ が存在して次の不等式が成り立つ.

$$\left(\int_{\mathfrak{a}^*} |\tilde{f}(\xi+\sqrt{-1}\eta)|^q |c(\xi)|^{-2} d\xi \right)^{1/q} \leqq C_{p,\eta} \|f\|_p, \quad f \in S.$$

§6. $L_p(K\backslash G/K)$ 関数の Fourier-Laplace 変換と Riemann-Lebesgue の補題

$Z=(z_1,\cdots,z_r)=\xi+\sqrt{-1}\eta\in\mathbb{C}^r$, $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_r)$, $\eta=(\eta_1,\cdots\cdots\eta_r)\in\mathbb{R}^r$, $z_j=\xi_j+\sqrt{-1}\eta_j$ とする．$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$, $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_r)$, $\beta_j>\alpha_j$ $(j=1,\cdots,r)$ とする．$\mathbb{C}^r$ に於ける strip

$$\mathcal{D}=\mathcal{D}_r(\alpha,\beta)=\{z\in\mathbb{C}^r;\ \alpha_j\leqq \mathrm{Im}\,z_j\leqq\beta_j,\ (j=1,\cdots,r)\}$$

で定義された関数 $\Phi(z)=\Phi(z_1,\cdots,z_r)$ が $\mathrm{Int}\,\mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ の内部) で解析的かつ $\mathcal{D}$ で連続であるとき，Φ は，単に，$\mathcal{D}$ で解析的であるという．

$\tau=(\tau_1,\cdots,\tau_r)$, $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_r)\in\mathbb{R}^r$ に対して $\tau\xi=(\tau_1\xi_1,\cdots,\tau_r\xi_r)$ とかく．いま $0<\tau_j<1$ $(j=1,\cdots,r)$ とするとき

$$\gamma=(1-\tau)\alpha+\beta,\quad \text{i.e.}\quad \gamma_j=(1-\tau_j)\alpha_j+\tau_j\beta_j$$

$(1\leqq j\leqq r)$ とおく．また $\mathcal{U}=\{\delta=(\delta_1,\cdots,\delta_r);\ \delta_j=0 \text{ or } 1\ (j=1,\cdots,r)\}$ とおくと $\mathcal{U}$ は 2^r 個の元からなる有限集合である．$\delta\in\mathcal{U}$ に対して $\varepsilon(\delta)=(1-\delta)\alpha+\delta\beta$ とおく．即ち $\delta_j=0,\ 1$ に従って，それぞれの場合に $\varepsilon(\delta)_j=\alpha_j,\ \beta_j$ である．

Kunze-Stein, Lipsman による次の補題を用いる．

Lemma 7. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^r$, $\alpha_j < \beta_j$ $(j=1,\cdots,r)$ とし，r-複素変数の関数 $\varphi(z_1,\cdots,z_r)$ は $\mathcal{D}_r(\alpha,\beta)$ を含むある開領域で解析的であるとし，以下の仮定(i)，(ii) を満すとする．

(i) 定数 $C>1$，$c>0$ が存在して次の不等式が成り立つ．

$$\sup_{\alpha_j \leqq y_j \leqq \beta_j} |\varphi(x+\sqrt{-1}y)| \leqq C \prod_{j=1}^{r} (1+|x_j|)^c, \qquad x \in \mathbb{R}^r.$$

(ii) $\varepsilon(\delta) = (1-\delta)\alpha + \delta\beta$，$\delta \in \mathcal{U}$ とする．或る $q>1$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^r} |\varphi(x+\sqrt{-1}\,\varepsilon(\delta))|^q dx \leqq 1, \qquad \delta \in \mathcal{U}$$

が成り立つ．

この時，任意の γ $(\alpha_j < \gamma_j < \beta_j,\ j=1,2,\cdots,r)$ に対して

$$\sup_x |\varphi(x+\sqrt{-1}\gamma)| \leqq \prod_{j=1}^{r} A_j$$

が成り立つ．ここで

$$A_j = c_1\left[(\gamma_j-\alpha_j)^{-1/q} + (\beta_j-\gamma_j)^{-1/q}\right],$$

c_1 は φ, C, c に依らない定数．

我々の場合，関数 $\varphi(\nu) = \prod_{\alpha\in\Sigma} (\sqrt{-1} + (\nu_\alpha, \alpha)_\alpha)^{a(\alpha)/q}\, \tilde{f}(\nu)$ に対してこの Lemma 7 を用いることによって，次の結果が得られる．

<u>Lemma 8.</u> $1 < p < 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とする. $\eta \in \mathrm{Int}\, F_\varepsilon$ に対して $\exists C_{p,\eta} > 0$; $\nu = \xi + \sqrt{-1}\,\eta$ ($\xi \in \mathfrak{a}^*$) に対し次の不等式が成り立つ.

$$|\tilde{f}(\nu)| \leq C_{p,\eta} \|f\|_p , \qquad f \in S_0.$$

<u>Remark</u> $\eta \in \mathrm{Int}\, F_\varepsilon$ に対する定数 $C_{p,\eta}$ は η の近傍においては共通に取ることが出来る.

$f \in L_p(K\backslash G/K)$ とし, $f_k \in S_0$ ($k = 1, 2, \cdots$) を $f_k \xrightarrow{L_p} f$ となるように選べば $\nu = \xi + \sqrt{-1}\,\eta$ ($\xi \in \mathfrak{a}^*$, $\eta \in \mathrm{Int}\, F_\varepsilon$) に対して上の補題から

$$|\tilde{f}_k(\nu) - \tilde{f}_j(\nu)| \leq A_{p,\eta} \|f_k - f_j\|_p \to 0 \qquad (k, j \to \infty)$$

である. 従って $\exists_1\ \tilde{f}(\nu)$;

$$|\tilde{f}(\nu) - \tilde{f}_k(\nu)| \to 0 \qquad (k \to \infty).$$

$\tilde{f}(\nu)$ は $\{f_k\}$ の選び方に依らず, これを $f \in L_p(K\backslash G/K)$ の Fourier－Laplace 変換という. $\tilde{f}$ が $\mathrm{Int}\, F_\varepsilon$ で解析的であることも容易に示される.

<u>Theorem 2.</u> $1 \leq p < 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とする. はじめ $L_1(K\backslash G/K)$ 関数に対して定義された Fourier－Laplace 変換は $L_p(K\backslash G/K)$ 関数にまで拡張され, それは $\mathfrak{a}^*$ 上の有界関数で,

しかも各 $f \in L_p(K\backslash G/K)$ に対して $\tilde{f}(\nu)$ は tube domain $\mathrm{Im}\,\nu \in \mathrm{Int}\,F_\varepsilon$ において解析的で，$\nu = \xi + \sqrt{-1}\,\eta$ （$\xi \in \mathfrak{a}^*$, $\eta \in \mathrm{Int}\,F_\varepsilon$）に対して $\exists\, C_{p,\eta} > 0$;

$$\prod_{\alpha \in \Sigma} |\sqrt{-1} + (\nu_\alpha, \alpha)_\alpha|\,|\tilde{f}(\nu)| \leq C_{p,\eta} \|f\|_p , \quad f \in S_0$$

を満す．

この定理の定数 $C_{p,\eta}$ に対しても Lemma 8 の後の注意の内容が云えて，従って次の $L_p(K\backslash G/K)$ に関する Riemann-Lebesgue の補題が得られる．

Corollary. p, q は上の通りとする．$f \in L_p(K\backslash G/K)$ ならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して tube domain $\mathfrak{a}^* + \sqrt{-1}\,\mathrm{Int}\,F_\varepsilon$ の compact 部分集合 ω_ε が存在して $\sup_{\nu \in C\omega_\varepsilon} |\tilde{f}(\nu)| < \varepsilon$ が成り立つ．

Remark (1). Lipsman [5] では Theorem 1 の形では与えられていない．即ち，Lemma 6 とその系に相当する結果では，まず tube domain の "巾" が G の real rank に依存していて実 rank が増大すると共に狭くなっている。また更に，その tube domain からいくつかの超平面を除いたところでのみ結果が述べられている．

(2) $f \in L_p(K\backslash G/K)$ の Fourier-Laplace 変換 $\tilde{f}$ が解析的

に延びる tube domain は L_p 型急減少関数の Fourier-Laplace 変換が解析的に延びる tube domain と一致している.

文　献

[1] Gindikin-Karpelevič, Plancherel measure of Riemannian symmetric spaces of non-positive curvature, Doklady Acad. Nauk. SSSR., 145(1962), 252-255.

[2] Helgason-Johnson, The bounded spherical functions on symmetric spaces, Advances in Math., 3(1969), 586-593.

[3] Kunze-Stein, Uniformly bounded representations and harmonic analysis on the 2 × 2 real unimodular group, Amer. J. Math., 82(1960), 1-62.

[4] Lipsman, Uniformly bounded representations of SL(2,C), Amer. J. Math., 91(1969), 47-66.

[5] ———, Harmonic analysis on SL(n,C), J. of Functional Analysis, 3(1969), 126-155.

[6] Warner, Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups II, Springer, 1972.