

有界等質領域上の正則関数からなるヒルベルト空間と  
その上への直交射影

山口大 理 井上 透

$D$  を  $\mathbb{C}^n$  の単位開球 i.e.  $D = \{z \in \mathbb{C}^n; |z| < 1\}$ ,  $\nu$  を  $\nu(D) = 1$  なる Lebesgue 測度,  $\nu$  に関する  $D$  の  $L^p$  空間を  $L^p(D, \nu)$ ,  $D$  上の正則関数全体を  $H(D)$ ,  $H^p(D, \nu) = L^p(D, \nu) \cap H(D)$  とする。

Forelli-Rudin [2] は各  $s = x + iy \in \mathbb{C}$  に対し核関数  $G_s(z, w) = (1 - |w|^2)^s (1 - w^*z)^{-(n+1+s)}$  ( $z, w$  は列ベクトルで  $w^* = \bar{w}^t$  とする) を対応させ

$$(T_s f)(z) = \binom{n+s}{n} \int_D G_s(z, w) f(w) d\nu(w)$$

で定義される作用素  $T_s$  を考察し、次のことを示している。

(a)  $1 \leq p < \infty$  のとき

$$T_s \text{ が } L^p(D, \nu) \text{ の有界作用素} \iff (1+x)p > 1.$$

(b)  $(1+x)p > 1$  のとき  $T_s$  は  $L^p(D, \nu)$  の  $H^p(D, \nu)$  上への射影。

(c)  $p = 2$  のとき

$$T_s \text{ が } L^2(D, \nu) \text{ の } H^2(D, \nu) \text{ 上への直交射影} \iff s = 0.$$

/

## 2

Kolaski [8] は  $D$  上の測度  $d\sigma_s(z) = (1-|z|^2)^s d\nu(z)$  を考え、上の  $T_s$  を

$$(T_s f)(z) = \binom{n+s}{n} \int_D (1-w^*z)^{-(n+1+s)} f(w) d\sigma_s(w)$$

と  $(1-w^*z)^{-(n+1+s)}$  を核とし測度  $\sigma_s$  に関する積分作用素とみなせば、 $H^2(D, \sigma_s) = L^2(D, \sigma_s) \cap H(D)$  とおくとき

$$\begin{cases} s > -1 \quad (s \in \mathbb{R}) \text{ なる任意の } s \text{ に対し } T_s \text{ は } L^2(D, \sigma_s) \text{ の} \\ H^2(D, \sigma_s) \text{ 上への直交射影である} \end{cases}$$

ことを示した。

ところで  $K(z, w)$  を  $D$  の Bergman kernel i.e.  $H^2(D, \nu)$  の再生核 ( $K(z, w)$  は  $K(\cdot, w) \in H^2(D, \nu)$  for  $\forall w \in D$ ,  $f(z) = \int_D K(z, w) f(w) d\nu(w)$  for  $\forall f \in H^2(D, \nu)$  で特徴づけられ、 $\mathbb{C}^n$  の任意の有界領域に対し定義できる) とすると、今の場合  $K(z, w) = (1-w^*z)^{-(n+1)}$  で与えられる。そこで  $t \in \mathbb{R}$  に対し  $D$  上の測度  $\mu_t$  を

$$d\mu_t(z) = K(z, z)^{-t+1} d\nu(z)$$

で定義すれば、 $t = \frac{n+1+s}{n+1}$  のとき

$$d\sigma_s(z) = d\mu_t(z), \quad (1-w^*z)^{-(n+1+s)} = K(z, w)^t$$

さらに恒等的に 1 の値をとる関数を  $\mathbb{1}$  とすれば、 $s > -1$  のとき  $\mathbb{1} \in H^2(D, \sigma_s)$ 、従って  $T_s \mathbb{1} = \mathbb{1}$  ぶり

$$\binom{n+s}{n} = \left( \int_D (1-w^*z)^{-(n+s)} d\sigma_s(w) \right)^{-1}$$

これより上の  $T_s$  は

$$(P_t f)(z) = C_t \int_D K(z, w)^t f(w) d\mu_t(w)$$

$$\left( C_t = \left( \int_D K(z, w)^t d\mu_t(w) \right)^{-1} \right)$$

で定義される  $P_t$  と同じものである。  $T_s$  をこの形に書けば、この  $P_t$  は単位球以外の領域に対しても定義できる場合があるが、このとき単位球に対する Kolaski の結果がそのような領域についても成立するかという疑問が生じる。

ここでは  $D$  が有界等質領域 (その正則同型群が推移的に作用するような  $\mathbb{C}^n$  の有界領域) のときはそれが成立すること、

すなわち、 $H^2(D, \mu_t) = L^2(D, \mu_t) \cap H(D)$  とおけば

$$\left\{ \begin{array}{l} t \geq 1 \text{ のとき } H^2(D, \mu_t) \neq \{0\} \text{ 上で定義された } P_t \text{ は} \\ L^2(D, \mu_t) \text{ の } H^2(D, \mu_t) \text{ 上への直交射影である} \end{array} \right.$$

ことと、さらに

$$\left\{ \begin{array}{l} D \text{ が有界対称領域 (各 } z \in D \text{ に対し } z \text{ を孤立不動点とする} \\ D \text{ の正則同型群で } \sigma_z^2 = I \text{ となるものが存在する) のとき} \\ \text{きは、ベクトル値関数 (核関数は作用素値) の場合に拡張される} \end{array} \right.$$

ことの概略を示す (詳細は [7] 参照)。後者の場合  $D$  の正則同型群の正則離散系列に属する表現は  $D$  上のベクトル値正則関

数からなるあるヒルベルト空間上で実現できるが、その空間上への直交射影にたつてゐる。これらの結果は領域に正則同型として推移的に作用する Lie 群のある 2-タリ表現を構成することにより証明される。

§ 1. この § では  $D$  は有界等質領域とす。Vinberg et al. [10] により  $D$  は II 型の等質 Siegel 領域と正則同型、従つて特に  $D$  は単連結である。  $D$  の Bergman kernel を  $K(z, w)$  とす ( $D$  が有界対称領域のときは、Bergman kernel の explicit formula が知られてゐる: cf. [5], [9], [6])。  $D$  は等質だから  $\lim_{z \rightarrow \partial D} K(z, z) = \infty$  となる ([1], p. 40)。従つてある  $C > 0$  が存在して

$$(1.1) \quad K(z, z)^{-1} \leq C \quad \text{for } \forall z \in D.$$

$D$  の正則同型群は Lie 群にたつてゐるが、その単位元を含む連結成分の universal covering group を  $G$  とすると、 $G$  も自然に  $D$  に推移的に作用する。  $g \in G, z \in D$  に対し正則写像  $u \rightarrow g \cdot u$  の点  $z$  での complex Jacobian を  $j(g, z)$  とす。  $G \times D$  は単連結だから  $t \in \mathbb{R}$  に対し  $j(g, z)^t$  か  $j(e, z)^t = 1$  ( $\forall z \in D, e$  は  $G$  の単位元) とすように定義できる。同様に  $K(z, w)^t$  を  $K(z, z)^t > 0$  ( $\forall z \in D$ ) とすように定義できる。このとき

$$(1.2) \quad j(g_1 g_2, z)^t = j(g_1, g_2 \cdot z)^t j(g_2, z)^t, \quad g_1, g_2 \in G, z \in D,$$

$$(1.3) \quad K(g \cdot z, g \cdot w)^t = j(g, z)^{-t} K(z, w)^t \overline{j(g, w)^t}, \quad g \in G, z, w \in D$$

が成り立つ。

$\nu$  を  $D$  の Lebesgue 測度とし、 $t \in \mathbb{R}$  に対し  $D$  上の測度  $\mu_t$  を

$$d\mu_t(z) = K(z, z)^{-t+1} d\nu(z)$$

で定義する。

(1.4) 注意  $\mu_0$  ( $t=0$  のとき) は  $G$  の変換で不変な測度で、この  $\mu_0$  を用いて  $d\mu_t(z) = K(z, z)^{-t} d\mu_0(z)$ .

$\mu_t$  に関する  $D$  の  $L^2$  空間を  $L^2(D, \mu_t)$ 、また  $D$  上の正則関数全体を  $H(D)$  とし  $H^2(D, \mu_t) := L^2(D, \mu_t) \cap H(D)$  とおく。  $L^2(D, \mu_t)$  は自然な内積によりヒルベルト空間になる。この内積に関する norm を  $\|\cdot\|_t$  で表わすことにする。

(1.5) 補題  $t \in \mathbb{R}$  を固定すると、 $D$  のコンパクト集合  $X$  に対し  $C_X \geq 0$  が存在し

$$|f(z)| \leq C_X \|f\|_t$$

が任意の  $f \in H^2(D, \mu_t)$  と  $z \in X$  について成り立つ。

この補題と (1.1) より次の命題が成り立つ。

(1.6) 命題  $t \geq 1$  ならば  $H^2(D, \mu_t) \neq \{0\}$  で  $H^2(D, \mu_t)$  は  $L^2(D, \mu_t)$  の閉部分空間。

以下  $t \geq 1$  と仮定する。  $f \in L^2(D, \mu_t)$  に対し

$$(P_t f)(z) = C_t \int_D K(z, w)^t f(w) d\mu_t(w)$$

で、この積分が存在するような  $z \in D$  に対し、 $P_t f$  を定義する。ただし  $C_t = \left( \int_D K(z, w)^t d\mu_t(w) \right)^{-1}$  (後で  $C_t$  は  $z$  に依らないことかわかる)。

(1.7) 定理 任意の  $f \in L^2(D, \mu_t)$  と任意の  $z \in D$  に対し  $(P_t f)(z)$  を定義する積分は存在し、 $P_t f$  は  $H^2(D, \mu_t)$  に属す。さらに  $P_t : L^2(D, \mu_t) \rightarrow H^2(D, \mu_t)$  は  $H^2(D, \mu_t)$  上への直交射影である。

以下この定理の証明のあらすじ、および  $G$  の  $2$ -タリ表現との関係について述べる。

$f \in L^2(D, \mu_t)$ ,  $g \in G$  に対し

$$(U_t(g)f)(z) = j(g^{-1}, z)^t f(g^{-1} \cdot z)$$

とおけば (1.2), (1.3), (1.4) より次の命題がいえる。

(1.8) 命題  $U_t : g \rightarrow U_t(g)$  は  $G$  の  $L^2(D, \mu_t)$  上での  $2$ -タリ表現である。

明らかに  $H^2(D, \mu_t)$  は表現  $U_t$  の不変部分空間であるが、次の命題は  $H^2(D, \mu_t)$  の表現論的意味を与える。

(1.9) 命題  $G$  の  $H^2(D, \mu_t)$  上での表現  $(U_t, H^2(D, \mu_t))$  は既約。

補題 (1.5) より各  $z \in D$  に対し  $f \rightarrow f(z)$  は  $H^2(D, \mu_t)$  から  $\mathbb{C}$  への連続な線型写像である。従って  $H^2(D, \mu_t)$  は再生核をもつ。

次の (1.10a) ~ (1.10c) をみたす  $K_t : D \times D \rightarrow \mathbb{C}$  が存在する。  
(すなわち)

$$(1.10a) \quad K_x(\cdot, w) \in H^2(D, \mu_x) \quad \text{for } \forall w \in D,$$

$$(1.10b) \quad K_x(w, z) = \overline{K_x(z, w)},$$

$$(1.10c) \quad f(z) = \int_D K_x(z, w) f(w) d\mu_x(w) \quad \text{for } \forall f \in H^2(D, \mu_x).$$

$(U_x, L^2(D, \mu_x))$  が  $\mathcal{H}$  の表現ということからこの再生核  $K_x$  は次の性質をもつことがいえる。

(1.11) 補題 任意の  $g \in G, z, w \in D$  に対し

$$\underline{K_x(g \cdot z, g \cdot w) = j'(g, z)^{-t} K_x(z, w) \overline{j'(g, w)^{-t}}}$$

と  $\mathcal{H}$  の関数  $M: D \times D \rightarrow \mathbb{C}$  が

$$(a) \quad M(z, w) \text{ は } z \text{ についての正則で } M(w, z) = \overline{M(z, w)}$$

$$(b) \quad M(g \cdot z, g \cdot w) = j'(g, z)^{-t} M(z, w) \overline{j'(g, w)^{-t}}, \quad g \in G, z, w \in D$$

を満たせば  $D$  は等質だから  $M$  は定数倍を除いて一意に定まる。

従って (1.3) と補題 (1.11) より次の補題がいえる。

(1.12) 補題

$$K_x(z, w) = c_x K(z, w)^t$$

$$\underline{\text{ここで } c_x = \left( \int_D K(z, w)^t d\mu_x(w) \right)^{-1} \text{ と } c_x \text{ は } z \text{ に依らない。}}$$

定理 (1.7) の証明

$$f \in L^2(D, \mu_x) \text{ とし } f = f_1 + f_2, \quad f_1 \in H^2(D, \mu_x), \quad f_2 \perp H^2(D, \mu_x)$$

と分解すると、(1.10c) と補題 (1.12) より  $P_x f_1 = f_1$ 。一方

$$\begin{aligned} (P_x f_2)(z) &= \int_D K_x(z, w) f_2(w) d\mu_x(w) \\ &= \int_D f_2(w) \overline{K_x(w, z)} d\mu_x(w) = 0 \quad ((1.10ab) \text{ より}) \end{aligned}$$

$$\therefore P_x f = f_1$$

§ 2. この § では  $D$  は有界対称領域とす。  $D$  は Harish-Chandra realization により circular starlike 領域と正則同型であることが知られている。以下では Harish-Chandra realization が本質的なのでその復習から始める (詳細は [4] 参照)

まず  $D$  は正則同型として作用する線型単純 Lie 群  $G$  とその極大コンパクト部分群  $K$  により  $D = G/K$  とかける。  $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$  を  $G, K$  の Lie 環とし、  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$  を Cartan 分解とす。  $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{p}$  の複素化を  $\mathfrak{g}_c, \mathfrak{k}_c, \mathfrak{p}_c$  とすれば  $D$  の複素構造により

$$\mathfrak{p}_c = \mathfrak{p}^+ + \mathfrak{p}^-, \quad \mathfrak{g}_c = \mathfrak{k}_c + \mathfrak{p}^+ + \mathfrak{p}^-$$

という直和分解が定まる。ここで  $\mathfrak{p}^\pm$  は可換部分環で  $\mathfrak{k}_c$  で normalize される。

$G_c$  を  $G$  の複素化とし、  $K_c, P^\pm$  を  $\mathfrak{k}_c, \mathfrak{p}^\pm$  に対応する  $G_c$  の連結部分群とす。  $\Omega = P^+ K_c P^-$  とおけば  $\Omega$  は  $G_c$  の稠密な開集合で  $G$  を含んでいる。また  $(X, k, Y) \rightarrow \exp X \cdot k \cdot \exp Y$  で定義される  $\mathfrak{p}^+ \times K_c \times \mathfrak{p}^-$  から  $\Omega$  への写像は正則同型である。従って  $g \in \Omega$  は

$$(2.1) \quad g = \pi_+(g) \cdot \pi_0(g) \cdot \pi_-(g), \quad \pi_\pm(g) \in P^\pm, \pi_0(g) \in K_c$$

と一意的に表わされる。そこで  $\zeta: \Omega \rightarrow \mathfrak{p}^+$  を  $\zeta(g) = \log \pi_+(g)$  と定義すれば、  $\zeta$  は  $D = G/K$  から  $\zeta(G) \subset \mathfrak{p}^+$  への正則同型を引き起こし  $\zeta(G)$  は  $\mathfrak{p}^+$  の有界領域となる。以下  $D = G/K = \zeta(G) \subset \mathfrak{p}^+$  とす。このとき  $G$  の  $D$  上での作用は  $g \cdot z = \zeta(g \cdot \exp z)$  とす



えられる。

$\mathfrak{g}$  を  $K$  の極大可換部分環とすれば、 $\mathfrak{g}$  の複素化  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  は  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  の Cartan 部分環である。  $\mathfrak{h}$  を  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  の  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$  に属するルート系とし、  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ ,  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  をそれぞれコンパクト, 非コンパクトルートの全体とする。従って

$$\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} + \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} \mathfrak{g}_{\alpha}^{\alpha}, \quad \mathfrak{p}_{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}} \mathfrak{g}_{\alpha}^{\alpha}$$

とすることができる ( $\mathfrak{g}_{\alpha}^{\alpha}$  はルート  $\alpha$  に対応する固有空間)。  $\mathfrak{h}$  の  $\mathbb{R}$  上の線型順序を、対応する正ルートをそれぞれ  $\mathfrak{h}^{+}$ ,  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^{+}$ ,  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{+}$  としたとき、  $\mathfrak{p}^{+} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^{+}} \mathfrak{g}_{\alpha}^{\alpha}$  と書きかえることができる。

$\lambda$  を  $\mathfrak{h}$  上の整形式で  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^{+}$  に属し dominant とする。 与えられる  $\lambda$  が  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$  に対応する部分群  $T_{\lambda}$  上 well defined とし、  $\langle \lambda, \alpha \rangle \geq 0$  ( $\forall \alpha \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^{+}$ ) とする。  $T_{\lambda}$  を  $\lambda$  を最高のウェイトとする  $K_{\mathbb{C}}$  の正則表現、  $E_{\lambda}$  をその表現空間とし  $J_{\lambda}: G \times D \rightarrow GL(E_{\lambda})$  と  $K_{\lambda}: D \times D \rightarrow GL(E_{\lambda})$  を

$$J_{\lambda}(g, z) = \tau_{\lambda}(\pi_0(g \exp z))$$

$$K_{\lambda}(z, w) = \tau_{\lambda}(\pi_0(\exp(-\bar{w}) \exp z))^{-1}$$

で定義する ( $\pi_0$  は (2.1) で定義したものの、  $\mathfrak{g}$  に  $w \rightarrow \bar{w}$  は  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$  の  $\mathfrak{h}$  に関する conjugation とする)。  $E_{\lambda}$  に  $\tau_{\lambda}(K)$  不変な内積を入れれば、  $J_{\lambda}(g, z)$ ,  $K_{\lambda}(z, w)$  の adjoint を  $J_{\lambda}(g, z)^*$ ,  $K_{\lambda}(z, w)^*$  とすれば、  $J_{\lambda}$  と  $K_{\lambda}$  は次の性質をもつことになる。

(2.2a)  $J_\lambda(g, z)$  は  $g \in G$  に對し  $C^n$  上  $z \in D$  に對し正則

$$(2.2b) \quad J_\lambda(g_1 g_2, z) = J_\lambda(g_1, g_2 \cdot z) J_\lambda(g_2, z),$$

$$(2.3a) \quad K_\lambda(w, z) = K_\lambda(z, w)^*,$$

$$(2.3b) \quad K_\lambda(g \cdot z, g \cdot w) = J_\lambda(g, z) K_\lambda(z, w) J_\lambda(g, w)^*.$$

よつて  $\rho_n = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_n^+} \alpha$  とおき、 $\text{vol}(D)$  を Lebesgue 測度  $\nu$  に對する  $D$  の volume とおけば、 $D$  の Bergman kernel  $K$  は

$$K(z, w) = \text{vol}(D)^{-1} K_{-\rho_n}(z, w)$$

と与えられる ([6], p. 123).  $\mu$  を

$$d\mu(z) = K(z, z) d\nu(z)$$

と定義される  $D$  の  $G$  不変正測度とし、

$$L^2(D, \lambda) = \left\{ f: D \rightarrow E_\lambda; \begin{array}{l} f \text{ は measurable} \\ \|f\|_\lambda^2 = \int_D \langle K_\lambda(z, z)^{-1} f(z), f(z) \rangle d\mu(z) < \infty \end{array} \right\}$$

とおけば、 $L^2(D, \lambda)$  は内積

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_D \langle K_\lambda(z, z)^{-1} f_1(z), f_2(z) \rangle d\mu(z)$$

によりヒルベルト空間になる。

$f \in L^2(D, \lambda)$ ,  $g \in G$  に對し

$$(U_\lambda(g)f)(z) = J_\lambda(g^{-1}, z)^{-1} f(g^{-1} \cdot z)$$

とおくと

(2.4) 命題  $U_\lambda: g \rightarrow U_\lambda(g)$  は  $G$  の  $L^2(D, \lambda)$  上の  $2 = \rho$  表現。

$$H_\lambda = \{f \in L^2(D, \lambda); f \text{ は正則}\}$$

とおけば、 $H_\lambda$  は  $L^2(D, \lambda)$  の閉部分空間で表現  $U_\lambda$  で不変であるが、次のことが知られている。

(2.5) 定理 (Harish-Chandra [3], Wallach [11])

$H_\lambda \neq \{0\}$  であるための必要十分条件は  $\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle < 0$   
for  $\forall \alpha \in \bar{\Phi}_m^+$ . ただし  $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \bar{\Phi}_m^+} \alpha$ . またこのとき表現  
( $U_\lambda, H_\lambda$ ) は既約.

$z = z$  以下  $\lambda$  は  $\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle < 0$  ( $\forall \alpha \in \bar{\Phi}_m^+$ ) をみたすとは定  
有る。

$$c(\lambda) = \frac{1}{\dim E_\lambda} \prod_{\alpha \in \bar{\Phi}_m^+} \frac{\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle}{\langle \rho, \alpha \rangle}$$

とおき、 $f \in L^2(D, \lambda)$  に對し

$$(P_\lambda f)(z) = |c(\lambda)| \int_D K_\lambda(z, w) K_\lambda(w, w)^{-1} f(w) d\mu(w)$$

で  $P_\lambda f$  を定義する。

(2.6) 定理 任意の  $f \in L^2(D, \lambda)$  と  $z \in D$  に對し  $(P_\lambda f)(z)$  を定義  
する積分は存在し、 $P_\lambda f \in H_\lambda$ . しかも  $P_\lambda: L^2(D, \lambda) \rightarrow H_\lambda$  は  
上への直交射影である。

この定理と定理(1.7)と同様  $H_\lambda$  の再生核をもち、それが  
 $|c(\lambda)| K_\lambda(z, w)$  で与えられることを示すことにより証明され  
る。まず  $H_\lambda$  の再生核から始まる。

$z \in D$  に對し  $E_z: H_\lambda \rightarrow E_\lambda$  を  $E_z(f) = f(z)$  で定義すると、  
 $E_z$  が  $E_\lambda$  上への連続線型写像であることか、従って  $E_z$  の

adjoint  $E_z^*: E_\lambda \rightarrow H_\lambda$  が存在し.

$$(2.7a) \quad \langle f(z), a \rangle_{E_\lambda} = \langle f, E_z^* a \rangle_{H_\lambda}, \quad f \in H_\lambda, a \in E_\lambda$$

をみたす.  $\exists$  2つの  $H_\lambda$  の再生核と与えられる関数  $R_\lambda: D \times D \rightarrow \text{End}(E_\lambda)$  を

$$R_\lambda(z, w) = E_z E_w^*$$

で定義する. このとき (2.7a) は

$$(2.7b) \quad \langle f(z), a \rangle_{E_\lambda} = \langle f(\cdot), R_\lambda(\cdot, z) a \rangle_{H_\lambda}$$

とかけらる.

$(U_\lambda, H_\lambda)$  がユニタリ表現ということから次の補題がいえる.

(2.8) 補題 任意の  $g \in G, z, w \in D$  に対し

$$R_\lambda(g \cdot z, g \cdot w) = J_\lambda(g, z) R_\lambda(z, w) J_\lambda(g, w)^*$$

この補題と (2.3),  $D$  の等質性, および  $\tau_\lambda$  の既約性より,  $c > 0$  が存在して, 任意の  $z, w \in D$  に対し,  $R_\lambda(z, w) = c K_\lambda(z, w)$  と表すことがいえる. この  $c$  が  $|c(\lambda)|$  に等しいことは,  $a_\lambda$  を  $\tau_\lambda$  の最高ウェイトベクトルとし, 定値関数  $\mathbb{1}_\lambda: z \rightarrow a_\lambda$  に (2.7b) を適用することにより示される.

定理 (2.6) の証明

$f \in L^2(D, \lambda)$  とし  $f = f_1 + f_2$ ,  $f_1 \in H_\lambda, f_2 \perp H_\lambda$  と分解すると  $R_\lambda(z, w) = |c(\lambda)| K_\lambda(z, w)$  より,  $\forall a \in E_\lambda, \forall z \in D$  に対し,

$$\begin{aligned} \langle (R_\lambda f)(z), a \rangle &= \int_D \langle K_\lambda(w, w) f(w), R_\lambda(w, z) a \rangle d\mu(w) \\ &= \langle f_1(\cdot), R_\lambda(\cdot, z) a \rangle + \langle f_2(\cdot), R_\lambda(\cdot, z) a \rangle \end{aligned}$$

$$= \langle f_1(z), a \rangle \quad ((2.7b) \text{ と } R_\lambda(\cdot, z)a = E_z^* a \in H_\lambda \text{ 列})$$

従って  $R_\lambda f = f_1$ ,

最後にこの結果を  $D = \mathbb{C}^n$  の単位球  $\mathbb{C}^n$  の表現の次数が  $n$  のある場合に適用すればこのように示す。

### 例

$D = \{z \in \mathbb{C}^n; |z| < 1\}$ ,  $\nu$  は  $\nu(D) = 1$  なる Lebesgue 測度.

$d\mu(z) = (1 - |z|^2)^{-(n+1)} d\nu(z)$  とする.  $I_n$  は  $n$  次単位行列とし.

$s \in \mathbb{R}$  に関する

$L^2(D, s)$

$$:= \left\{ f: D \rightarrow \mathbb{C}^n; \begin{array}{l} f \text{ は measurable} \\ \int_D (1 - |z|^2)^s \langle (I_n - z z^*)^{-1} f(z), f(z) \rangle d\mu(z) < \infty \end{array} \right\}$$

$$H_s := \left\{ f \in L^2(D, s); f \text{ は 正則} \right\}$$

と記す。

$$H_s \neq \{0\} \iff s > n+1$$

このとき  $L^2(D, s)$  の  $H_s$  上への直交射影  $P_s$  は

$$(P_s f)(z)$$

$$= |c(s)| \int_D \frac{(1 - w^* w)^s}{(1 - w^* z)^s} (I_n - z w^*) (I_n - w w^*)^{-1} f(w) d\mu(w)$$

$$\left( |c(s)| = \frac{\prod_{j=1}^{n+1} (s-j)}{(s-n) \cdot n!} \right)$$

が与えられる。

## References

- [ 1 ] W.L. Baily: Introductory lectures on automorphic forms, Iwanami, 1973.
- [ 2 ] F. Forelli and W. Rudin: Projections on spaces of holomorphic functions in balls, Indiana Univ. Math. J. 24 (1974), 593-602.
- [ 3 ] Harish-Chandra: Representations of semi-simple Lie groups VI, Amer. J. Math. 78 (1956), 564-628.
- [ 4 ] S. Helgason: Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces, Academic Press, New York, 1978.
- [ 5 ] L.K. Hua: Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains, Trans. Math. Monographs, vol. 6, Amer. Math. Soc., 1963.
- [ 6 ] T. Inoue: Unitary representations and kernel functions associated with boundaries of a bounded symmetric domain, Hiroshima Math. J. 10 (1980), 75-140.
- [ 7 ] T. Inoue: Orthogonal projections onto spaces of holomorphic functions on bounded homogeneous domains (Preprint).
- [ 8 ] C.J. Kolaski: A new look at a theorem of Forelli and Rudin, Indiana Univ. Math. J. 28 (1979), 495-499.
- [ 9 ] A. Koranyi: The Poisson integral for generalized half-planes and bounded symmetric domains, Ann. of Math. 82 (1965), 332-350.
- [10] E.B. Vinberg, S.G. Gindikin and I.I. Piatetski-Sapiro: On classification and canonical realization of complex homogeneous domains, Trans. Moscow Math. Soc. 12 (1963), 404-437.
- [11] N.R. Wallach: The analytic continuation of the discrete series I, Trans. Amer. Math. Soc. 251 (1979), 1-17.