数理解析研究所講究録
428巻 1981年 115-134

圧縮性完全流体の初期境界値問題

北大理　上見　練太郎

<u>はじめに</u>.　完全流体の方程式系はL. Eulerにより18世紀に確立されている。この境界値問題は初期値問題のように線形化すると特性境界値問題になり手がつけられていなかったが，1979年 D. G. Ebin [2] がこの問題にアタックして初期速度がsubsonicかつ初期密度が定数に近いとき時間について解の局所存在定理を証明した。この報告の目的は初期条件についての上の条件を仮定しなくても同じ結果が成立することを示すことにある。

<u>1. 結果</u>. 空間$\mathbb{R}^3$内の滑らかな境界$\partial\Omega$をもつ有界領域Ωにおいて，完全流体は次の方程式系で支配される：

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{dv}{dt} + \frac{p'(\rho)}{\rho}\nabla\rho = K \\
&\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,v = 0
\end{aligned}
\qquad \text{in } (0,T)\times\Omega,
$$

ここで，d/dt は物質微分，

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v\cdot\nabla \quad , \quad v\cdot\nabla = \sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \, ,$$

で，$v(t,x) = (v_1, v_2, v_3)$，$K(t,x) = (K_1, K_2, K_3)$，$\rho(t,x)$，$p(\rho(t,x))$ はそれぞれ流体の速度，外力，密度，圧力を表わす。更に，物理的要請より ρ，$p'(\rho)$ は正とする。この方程式系に対して次の初期，境界条件を課す：

(2) $\qquad v(0) = v_0 \quad , \quad \rho(0) = \rho_0 \qquad \text{on } \Omega \, ,$

(3) $\qquad \langle v, n \rangle = 0 \qquad \text{on } (0,T)\times\partial\Omega \, ,$

ここで，$\langle v, n \rangle$ は速度と外向き法単位ベクトル n との内積を表すものとする。

我々の結果は次の通りである。

定理. (v_0, ρ_0, K) が $H^s(\Omega, \mathbb{R}^4) \times X^s(T, \Omega, \mathbb{R}^3)$ $(s \geqq 3)$ に属しかつ order s までの整合条件をみたすとする。このとき，適当に T_1 $(0 < T_1 \leqq T)$ をとると初期境界値問題 (1)－(3) は一意的な解 $(v, \rho) \in X^s(T_1, \Omega, \mathbb{R}^4)$ をもつ。

上で使用した関数空間 $X^s = X^s(T, \Omega, \mathbb{R}^m)$ は次の様に定義したものである。

$$X^s = \bigcap_{k=0}^{s} C^k([0,T] ; H^{s-k}(\Omega, \mathbb{R}^m)),$$

$$\| f \|_{X^s} = \sup_{0\leqq t\leqq T} \sum_{k=0}^{s} \left\| \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(t) \right\|_{s-k} .$$

注 1. 一意性はすでに Serrin [3] により証明されている。

注2. 解の data (v_0. ρ_0. K) に関する連続性は X^{s-1}–category で成立する。

注3. 上の結果は方程式系(1)にエントロピー S についての方程式 $dS/dt=0$ を加えても成立する。

定理の証明の方針はあらく言うと Ebin [2] にしたがうが，主たる変更は次の通りである。第一は方程式系 (1) と同値なものとして integro-differential equations の系を使用したことであり，これは楕円型境界値問題の可解性にかゝわっている。第二はいまのべた方程式系の中にある二階双曲型方程式に [2] とちがう解釈を与えたことである。(*) 第三に，ベクトル場 v の gradient part により精密な評価式を与えたことである。

紙数の関係で証明の詳細を記すことはできないので，Agemi [1] でおぎなっていただきたい。

2. 同値な方程式系.

[2]のように，$g=\log\rho$，$a(g)=p'(e^g)$ とおくと，(1)は

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{dg}{dt}+\operatorname{div} v=0\\
&\frac{dv}{dt}+a(g)\nabla g=K
\end{aligned}
$$

(*) このことは最近得た結果—マッハ数 M をパラメータとして含む圧縮性方程式系の解が $M\to 0$ としたとき，非圧縮性方程式系の解に近づく—においても重要な役割を果す。

と同値になる。境界$\partial\Omega$はこの方程式系に対して特性的なので更に変形する。まず，(4)の第一式にd/dtを作用して

$$\frac{d^2 g}{dt^2} + \operatorname{div}\frac{\partial v}{\partial t} + v\cdot\nabla(\operatorname{div} v) = 0$$

を得る。これに(4)の第二式を代入し，かつ恒等式

$$(5)\qquad \operatorname{div}((v\cdot\nabla)u) = v\cdot\nabla(\operatorname{div} u) + \operatorname{tr}((Dv)(Du)),$$

ここで $Dv = (\partial v_j/\partial x_k)$，を用いると

$$(6)\qquad \frac{d^2 g}{dt^2} - \operatorname{div}(a(g)\nabla g) = \operatorname{tr}((Dv)^2) - \operatorname{div} K \quad \text{in } (0,T)\times\Omega.$$

(6)式に対応する初期条件及び境界条件は(2)(3)(4)式より

$$(7)\qquad g(0) = g_0,\quad \partial g/\partial t\,(0) = -(v_0\cdot\nabla g_0 + \operatorname{div} v_0) \quad \text{on } \Omega,$$

$$(8)\qquad \langle (v\cdot\nabla)v + a(g)\nabla g - K,\ n\rangle = 0 \quad \text{on } (0,T)\times\partial\Omega.$$

さて，残りの方程式系を得るために，ベクトル場vをsolenoidalとgradient partsに$L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$において直交分解しよう。

$$v = w + \nabla f = Pv + Qv,$$

ここで，wは$\operatorname{div} w = 0$ in Ω, $\langle w, n\rangle = 0$ on $\partial\Omega$ をみたすsolenoidalな部分である。なお，∇fは楕円型境界値問題

$$(9)\qquad \Delta f = \operatorname{div} v \quad \text{in } \Omega,\quad \langle \nabla f, n\rangle = \langle v, n\rangle \quad \text{on } \partial\Omega,$$

の解としてきまる。まず，fについての方程式は(3),(9),及び(4)の第一式から次のようになることが分る；

$$(10)\qquad \begin{cases} \Delta f = -\dfrac{dg}{dt} & \text{in } (0,T)\times\Omega, \\ \langle \nabla f, n\rangle = 0 & \text{on } (0,T)\times\partial\Omega. \end{cases}$$

$w = Pv$ についての方程式は P を (4) の次式に作用させて

$$\partial w/\partial t + P((v\cdot\nabla)w + (w\cdot\nabla)(\nabla f) - K) = -P(a(g)\nabla g + (\nabla f\cdot\nabla)\nabla f)$$

をまず得る。ところが

$$a(g)\nabla g = \nabla\int_0^g p'(e^y)\,dy\ ,\quad (\nabla f\cdot\nabla)\nabla f = \nabla\langle\nabla f, \nabla f\rangle/2$$

と gradient としてかけるから，結局

$$(11)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial t} + P((v\cdot\nabla)w + (w\cdot\nabla)\nabla f) = PK \\ &w(0) = Pv_0 \end{aligned}$$

が w についての方程式系である。

逆に，(w, f, g) を (6), (7), (8), (10), (11) の解とすると，$v = w + \nabla f$ とおくことにより (v, g) が (2), (3), (4) の解となることが [2] で証明されている。しかし，我々がここで使用する方程式系は楕円型境界値問題の可解性を考慮に入れて，(10) の代りに積分項を含む次の方程式を採用する；

$$(10)'\quad \begin{aligned} &\Delta f = -\frac{dg}{dt} + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \frac{dg}{dt}\,dx && \text{in } (0,T)\times\Omega, \\ &\langle\nabla f, n\rangle = 0 && \text{on } (0,T)\times\partial\Omega, \end{aligned}$$

ここで，$|\Omega|$ は Ω の volume を表わす。

次に，我々は (6), (7), (8), (10)′, (11) の解 (w, f, g) が (6), (7), (8), (10), (11) の解となること，即ち，

$$b(t) = \int_\Omega \frac{dg}{dt}\,dx = 0$$

となることを示めそう。まず，(7) と発散定理より

$$b(0) = -\int_{\partial\Omega}\langle v_0, n\rangle\,dS = 0$$

を得る。最後の等式は整合条件 $\langle v_0, n\rangle = 0$ を用いた。次に，w が solenoidal であることより $\Delta f = \operatorname{div} v$ が成立することに注意して，(5), (6), (10) より次の等式を得る；

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{dg}{dt} = \frac{d^2 g}{dt^2} - v\cdot\nabla\left(\frac{dg}{dt}\right)$$
$$= \operatorname{div}\left(\, (v\cdot\nabla)v + a(g)\nabla g - K\,\right).$$

ここで，発散定理と境界条件(8) を用いると $\partial b/\partial t\,(t) = 0$ となり，結局 $b(t) = 0$ が結論される。

注4. 境界上 $\langle v, n\rangle = 0$ だから，二階双曲型方程式(6)(7), (8) は非特性的初期境界値問題となることに注意されたい。

3. 整合条件

$(v, g) \in X^s$ が (2), (3), (4) の解であるとすると，

$$\frac{\partial g}{\partial t}(0) = -(\, v_0\cdot\nabla g_0 + \operatorname{div} v_0)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}(0) = -(\, (v_0\cdot\nabla)v_0 + a(g_0)\nabla g_0) + K(0)$$

が成立する。更に，(4) を t で微分することにより $\partial^k v/\partial t^k$, $\partial^k g/\partial t^k$ ($k = 1, \cdots, s$) の初期値は帰納的に (v_0, g_0, K) 及びそれらの微分を用いて表わすことができる。このとき，$\partial^k v/\partial t^k$, $\partial^k g/\partial t^k$ ($k = 1, \cdots, s$) は $t = 0$ で方程式 (4) をみたすという。次に，境界条件 (3) を t で微分して，

$(12)_k$ $\quad \langle \partial^k v/\partial t^k(0), n\rangle = 0 \quad$ on $\partial\Omega$ ($k = 0, \cdots, s-1$)

が (v_0, g_0, K) とその微分についての関係式であることが

わかる。このとき，$(12)_k$ $(k=0,\cdots,s-1)$ を<u>s次の整合条件</u>という。

本稿でよく使用する関数の積についての評価式についてふれておこう。3次元（2次元でも以下通用する）であるので，$H^s(\Omega,\mathbb{R}^m)$ $(s\geqq 2)$ が algebra をなすこと，Sobolevの補題 $\|f\|_\infty \leqq C\|f\|_2$，及び L^2 又は H^1 評価式としては

$$\|f_1f_2\|_0 \leqq C\|f_1\|_0\|f_2\|_2, \quad \|f_1f_2\|_0 \leqq C\|f_1\|_1\|f_2\|_1$$
$$\|f_1f_2\|_1 \leqq C\|f_1\|_1\|f_2\|_1$$

を使用する。ここで，C は Ω と微分階数に依存する定数であり，以下も同じ意味で使用する。

4．線型化方程式とその解の評価式

この節では $(v,g)\in X^s$ $(s\geqq 3)$ が以下の条件をみたすように与えられたとする。

$\langle v,n\rangle = 0$ on $(0,T)\times\partial\Omega$，$a(g) > 2d > 0$，

$a(g)-\langle v,n\rangle^2 > d$ on $(0,T)\times U(\partial\Omega)$，かつ，

$(v(0),g(0)) = (v_0,g_0)$ で $\partial^k v/\partial t^k$，$\partial^k g/\partial t^k$ は

$t=0$ で方程式(4)をみたす。

最初に，$\hat{g}$ についての線型化方程式

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\hat{g}}{dt^2} - \mathrm{div}\,(a(g)\nabla\hat{g}) = F && \text{in } (0,T)\times\Omega,\\
(13)\quad &\hat{g}(0)=g_0,\ \frac{\partial\hat{g}}{\partial t}(0)=g_1 && \text{on } \Omega,\\
&\langle\nabla\hat{g};n\rangle = h && \text{on } (0,T)\times\partial\Omega
\end{aligned}$$

を考える。ここで，

$$F = tr((Dv)^2) - div\,K\ ,\ g_1 = -(v_0 \cdot \nabla g_0 + div\, v_0),$$
$$h = \langle K - (v \cdot \nabla)v,\ n \rangle / a(g).$$

$a(g) > d$ ，$\langle v, n \rangle = 0$ だから，境界は (13) に対して非特性的であることがわかる。更に，s 次の整合条件 $(12)_k$ ($k = 0, 1, \cdots, s-1$) は初期境界値問題 (13) の data (g_0, g_1, h, F) に対する s 次の整合条件になっている。

<u>命題 1</u>．初期境界値問題 (13) は一意的な解 $\dot{g} \in X^s(T)$ をもち，次の評価式をみたす；

$$\|\dot{g}(t)\|^2_{X^1} \leqq p\, e^{pt} \Big(\|\dot{g}(0)\|^2_{X^1} + \int_0^T \|F(t)\|_0^2\, dt + \|h\|^2_{1/2,\,(0,T)\times\partial\Omega} \Big) \tag{14}$$

$$\|\dot{g}(t)\|^2_{X^s} \leqq q(t)\, e^{pt} \Big(\|\dot{g}(0)\|^2_{X^s} + \|F(0)\|^2_{X^{s-2}} + p\big(\int_0^T \|F(t)\|^2_{X^{s-1}} + \|h\|^2_{s-1/2,\,(0,T)\times\partial\Omega}\big) \Big). \tag{15}$$

<u>注 5</u>．(14), (15) 式における p は $\|v\|_{X^s}$, $\|g\|_{X^s}$ の多項式を表わし，$q(t)$ は $\|v(t)\|_{X^{s-1}}$, $\|g(t)\|_{X^{s-1}}$ の多項式を表わす。以下，本稿では上の記号を使用する。

<u>注 6</u>．$\langle v, n \rangle = 0$ より $v \cdot \nabla$ は tangential，よって，$-\langle (v\cdot\nabla)v,\ n \rangle = \langle v,\ (v\cdot\nabla)n \rangle$ は低階と考えることができる。

次に，$\dot{g}$ についての線型化方程式

$$
(16)\qquad
\begin{aligned}
&\Delta \hat f = G && \text{in } (0,T)\times\Omega, \\
&\langle \nabla \hat f, n\rangle = 0 && \text{on } (0,T)\times\partial\Omega.
\end{aligned}
$$

を考える．ここで

$$G = -\frac{d\hat g}{dt} + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \frac{d\hat g}{dt}\,dx,$$

かつ $\hat g$ は (13) の解である。

注7. [2] における線型化方程式は

$$-\Delta \hat f = \partial \hat g/\partial t + w\cdot\nabla \hat g + \nabla \hat f\cdot\nabla \hat g$$

であり，このため $\|\hat g(0)\|_{X^s}$ が十分小，即ち，密度が定数に近いという条件がついたのである。

命題2. 境界値問題 (16) は定数を法として一意的な解 $\hat f \in X^s_1$ をもち，次の評価式をみたす；

(17) $\|\nabla \hat f\|_{X^1} \leqq C\,\|G\|_{X^0}$,

(18) $\|\nabla \hat f\|_{X^s_1} \leqq g(t)\,\|\hat g(t)\|_{X^3}$.

注8. X^s_1 は X^s の定義で t についての s 階微分をとった Banach 空間である。

最後に，$\hat w$ についての線型化方程式

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
&\partial \hat w/\partial t + P((v\cdot\nabla)\hat w + (\hat w\cdot\nabla)\nabla \hat f) = PK && \text{in } (0,T)\times\Omega, \\
&\hat w(0) = Pv_0 && \text{on } \Omega,
\end{aligned}
$$

を考える。ここで，$\hat f$ は (16) の解である。

命題3. 初期値問題(19)は一意的な解 $\hat{w}\in X^s$ をもち、次の評価式をみたす；

$$(20)\quad \|\hat{w}(t)\|_{X^1} \le e^{p't}\|\hat{w}(0)\|_{X^1} + \int_0^t e^{p'(t-\tau)}\|PK(\tau)\|_{X^1}\,d\tau,$$

$$(21)\quad \|\hat{w}(t)\|_{X^s_1} \le e^{p'(t)}\|\hat{w}(0)\|_{X^s_1} + \int_0^t e^{p'(t-\tau)}\|PK(\tau)\|_{X^s_1}\,d\tau,$$

$$(22)\quad \left\|\frac{\partial^s\hat{w}}{\partial t^s}(t)\right\|_0 \le C\left(\|v(t)\|_{X^{s-1}} + \|\nabla\hat{f}\|_{X^s_1}\right)\|\hat{w}(t)\|_{X^s_1},$$

ここで、$p' = C\left(\|v\|_{X^s_1} + \|\nabla\hat{f}\|_{X^s_1}\right)$ である。

今考えた三つの方程式系(13), (16), (19)を用いて次の命題を証明することができる。

命題4. $\nabla\hat{f}$ は X^s に属し、次の評価式をみたす；

$$(23)\quad \begin{aligned}\left\|\frac{\partial^s}{\partial t^s}\nabla\hat{f}(t)\right\|_0 \le\ & g(t)\left(\|\hat{g}\|_{X^3_1} + \|\hat{v}\|_{X^3_1}\right)\\ &+ C\left(\|v(t)\|_{X^{s-1}}\|v\|_{X^s_1} + \|K\|_{X^s}\right),\end{aligned}$$

ここで、$\hat{v} = \hat{w} + \nabla\hat{f}$ である。

注9. 評価式(23)は[2]では考えていなかった。

5. 定理の証明.

前節の初めに与えた(v, g)に対して、方程式(13), (16), (19)の解を$(\hat{v}, \hat{g})$ $(\hat{v} = \hat{w} + \nabla\hat{f})$とすると、一つの写像Φ

$$\Phi(v, g) = (\hat{v}, \hat{g})$$

ができる。定理は不動点定理を用いて証明される。

Iterationsを行うX^sの部分集合をきめるために、まず

$$A = \|v_0\|_s + \|g_0\|_s + \|F\|_{X^s}$$

とおき，

$$4d = \min_{|y| \leqq CA} a(y) \quad (d > 0)$$

で d を定義する。ここで，Sobolev の補題 $\|g_0\|_\infty \leqq C\|g_0\|_2$ を用いた。次に $\langle v_0, n\rangle = 0$ を考えに入れて，

$$a(g_0(x)) - \langle v_0(x), n\rangle^2 \geqq 2d \quad \text{in } U$$

が成立するような $\partial\Omega$ の近傍 U を一つきめる。この d，U を用いて，

$$\begin{aligned} E(C,T) = \{ (v, g) \in X^s(T) \,;\, & (v(0), g(0)) = (v_0, g_0),\ \partial^k v/\partial t^k \\ & \partial^k g/\partial t^k \ (k=1,\cdots,s-1) \text{ は } t=0 \text{ で方程式 (4) をみ} \\ & \text{たす},\ \langle v, n\rangle = 0 \text{ on } (0,T)\times\partial\Omega,\ a(g) \geqq 2d, \\ & a(g) - \langle v, n\rangle^2 \geqq d \text{ on } (0,T)\times U, \\ & \|v\|_{X^s(T)} + \|g\|_{X^s(T)} \leqq C \ \} \end{aligned}$$

とおく。

<u>命題 5</u>. Ω と A にのみ依存する定数 C，T，δ がとれて，$\|v(0)\|_{X^{s-1}} \leqq \delta$ ならば $E(C,T)$ は亜で不変である。

これを証明するためにまず次を示す。

<u>補題 1</u>. $\partial^k \hat{v}/\partial t^k$，$\partial^k \hat{g}/\partial t^k$ $(k=1,\cdots,s-1)$ は $t=0$ で方程式 (4) をみたす。

証明. $\hat{w}$ と $\hat{g}$ との初期条件より

$$\hat{w}(0) = w_0, \quad \hat{g}(0) = g_0, \quad \frac{\partial \hat{g}}{\partial t}(0) = -(v_0 \cdot \nabla g_0 + \operatorname{div} v_0),$$

ここで，$v_0 = w_0 + \nabla f_0$ である。まず，

$$\hat{v}(0) = v_0$$

をまめそう。このためには $\nabla\hat{f}(0) = \nabla f_0$, 即ち, $\nabla(\hat{f}(0) - f_0)$ が solenoidal であることを示すとよい。これは, (16)を用いて

$$\mathrm{div}\,(\nabla\hat{f}(0) - \nabla f_0) = -\frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega}\langle v_0, n\rangle\, dS = 0$$

$$\langle \nabla\hat{f}(0) - \nabla f_0,\ n\rangle = \langle v_0, n\rangle = 0$$

よりしたがう。次に,

$$(24) \qquad \frac{\partial v}{\partial t}(0) = -\left((v_0 \cdot \nabla) v_0 + a(g_0)\nabla g_0 - K(0)\right)$$

を示めそう。(13), (16) を用いて,

$$(25) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{d\hat{g}}{dt} = \frac{d^2\hat{g}}{dt^2} - v \cdot \nabla\left(\frac{d\hat{g}}{dt}\right)$$
$$= \mathrm{div}\left((v \cdot \nabla)\hat{v} + a(g)\nabla\hat{g} - K\right) + \mathrm{tr}\left((Dv)^2 - (Dv)(D\hat{v})\right).$$

(16) を t で微分して, (25) を $t = 0$ で考えると,

$$\mathrm{div}\left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla\hat{f}(0) + Q\left((v_0 \cdot \nabla)v_0 + a(g_0)\nabla g_0 - K(0)\right)\right)$$
$$= \frac{1}{|\Omega|}\int_{\partial\Omega}\langle (v_0 \cdot \nabla)v_0 + a(g_0)\nabla g_0 - K(0),\ n\rangle\, dS = 0.$$

ここで, 一次の整合条件 $(12)_1$ を用いた。よって,

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\hat{f}(0) = -Q\left((v_0 \cdot \nabla)v_0 + a(g_0)\nabla g_0 - K(0)\right)$$

を得る。方程式 (19) を用いて

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{w}(0) = -P\left((v_0 \cdot \nabla)v_0 + a(g_0)\nabla g_0 - K(0)\right)$$

も容易に導かれるから, (24) が証明されたことになる。$\partial^2\hat{g}/\partial t^2$ が $t = 0$ で方程式 (4) をみたすことは (24) と (25) からしたがう。一般には (25) と (19) を t で微分して帰納的に示めされる。

命題5の証明．$\|v\|_{X^3(T)}+\|g\|_{X^3(T)}\leq C$ ならば $\|\hat{v}\|_{X^3(T)}+\|\hat{g}\|_{X^3(T)}\leq C$ となる C，T の存在を示すと十分であろう。不等式 (15)，(18)，(23) の $g(t)$ の処理には

$$\|v(t)\|_{X^{s-1}}+\|g(t)\|_{X^{s-1}}\leq\|v(0)\|_{X^{s-1}}+\|g(0)\|_{X^{s-1}}+2Ct$$

を使用する。A と C についての多項式を $p_j(A,C)$ とおいて，

$$\|F\|_{X^{s-1}}\ ,\quad \|h\|_{s-1/2,(0,T)\times\partial\Omega}\leq p_1(A,C)$$

$$\|\hat{g}(0)\|_{X^s}\ ,\quad \|F(0)\|_{X^{s-2}}\leq p_2(A)$$

が成立するから，(15) 式より

$$\|\hat{g}(t)\|^2_{X^s}\leq e^{p_3(C)t}(p_4(A)+p_5(A,C)T)$$

を得る。ここで，T_1 を

$$p_3(C)T_1\leq 1\ ,\quad p_5(A,C)T_1\leq p_4(A)$$

なるようにとると

(26) $\quad \|\hat{g}(t)\|^2_{X^s}\leq 4\sqrt{p_4(A)}\qquad 0\leq t\leq T_1\ .$

同様にして，不等式 (18)，(21)，(22)，(26) より

(27) $\quad \|\hat{g}(t)\|_{X^s}+\|\hat{w}(t)\|_{X^s}+\|\nabla\hat{f}(t)\|_{X^s_1}\leq p_6(A)$

が $0\leq t\leq\min(T_1,T_2)$ で成立するように T_2 をとることができる。更に，不等式 (23) と (27) より

$$\left\|\frac{\partial^s}{\partial t^s}\nabla\hat{f}(t)\right\|_0\leq(p_7(A)+p_8(C))t\,p_6(A)$$
$$+cC(\|v(0)\|_{X^{s-1}}+Ct+A)$$

を得る。よって，T_3 と $\|v(0)\|_{X^{s-1}}$ を

$$(p_6(A)p_8(C)+cC^2)T_3\leq p_6(A)p_7(A)+cA,$$

(28) $$c\,C\,\|v(0)\|_{X^{s-1}} \leqq p_6(A)\,p_7(A) + cA$$

となるように選ぶと，

(29) $$\left\|\frac{\partial^s}{\partial t^s}\nabla\hat{f}(t)\right\|_0 \leqq 3\,(p_6(A)\,p_7(A) + cA)$$

が $0 \leqq t \leqq \min(T_1, T_2, T_3)$ に対して成立する。故に，(26) ー (29) より

$$C \geqq 4\sqrt{p_4(A)} + p_6(A)(1 + 3p_7(A)) + 3cA$$

$$T \leqq \min(T_1, T_2, T_3)$$

$$\delta \leqq (p_6(A)\,p_7(A) + cA)/cC$$

なる T. C. δ が求めるものであることがわかる。

次の段階として，Φ の不動点を求めるために $E(C, T)$ に X^1 による metric を導入しよう；

$$d_T((v_1, g_1), (v_2, g_2)) = \|v_1 - v_2\|_{X^1(T)} + \|g_1 - g_2\|_{X^1(T)}$$

$$(v_1, g_1),\ (v_2, g_2) \in E(C, T).$$

注 10　[2] における metric は w, g について X^1, ∇f については X_1^1 であった。

命題 6.　任意の ε $(0 < \varepsilon < 1)$ に対して，ε, Ω, A にのみ依存する定数 T, δ があって，$\|v_0\|_2 < \delta$ ならば

$$d_T(\Phi(v_1, g_1), \Phi(v_2, g_2)) \leqq \varepsilon\, d_T((v_1, g_1), (v_2, g_2))$$

が成立する。

証明.　$(\hat{v}_j, \hat{g}_j) = \Phi(v_j, g_j)$ $(j = 1, 2)$ とし，$\hat{g} = \hat{g}_1 - \hat{g}_2$ $\hat{w} = \hat{w}_1 - \hat{w}_2$，$\nabla\hat{f} = \nabla(\hat{f}_1 - \hat{f}_2)$ とおくと，$\hat{g}$, $\hat{w}$, $\hat{f}$ は

次の方程式系をみたす。

$$\text{(30)}\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\hat{g}}{dt^2} - \mathrm{div}\,(a(g_1)\nabla\hat{g}) = \tilde{F} & \text{in } (0,T)\times\Omega, \\ \hat{g}(0) = \dfrac{\partial\hat{g}}{\partial t}(0) = 0 & \text{on } \Omega, \\ \langle \nabla\hat{g}, n\rangle = \tilde{h} & \text{on } (0,T)\times\partial\Omega, \end{cases}$$

ここで, $d/dt = \partial/\partial t + v_1\cdot\nabla$

$$\tilde{h} = \langle K-(v_1\cdot\nabla)v_1,\, n\rangle/a(g_1) - \langle K-(v_2\cdot\nabla)v_2,\, n\rangle/a(g_2),$$

$$\begin{aligned}\tilde{F} = {} & \mathrm{tr}((Dv_1)^2-(Dv_2)^2) + \mathrm{div}((a(g_1)-a(g_2))\nabla\hat{g}_2) \\ & -2(v_1-v_2)\cdot\nabla\left(\frac{\partial\hat{g}_2}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}(v_1-v_2)\cdot\nabla\hat{g}_2 + \\ & (v_2\cdot\nabla)(v_2\cdot\nabla\hat{g}_2) - (v_1\cdot\nabla)(v_2\cdot\nabla\hat{g}_2).\end{aligned}$$

$$\text{(31)}\quad \begin{cases} \Delta\tilde{f} = \tilde{G} & \text{in } (0,T)\times\Omega, \\ \langle\nabla\tilde{f}, n\rangle = 0 & \text{on } (0,T)\times\partial\Omega, \end{cases}$$

ここで,

$$\tilde{G} = -\left(\frac{d\tilde{g}}{dt} + (v_1-v_2)\cdot\nabla\hat{g}_2\right) + \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\left(\frac{d\tilde{g}}{dt} + (v_1-v_2)\cdot\nabla\hat{g}_2\right)dx.$$

$$\text{(32)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\hat{w}}{\partial t} + P((v_1\cdot\nabla)\hat{w} + (\hat{w}\cdot\nabla)\nabla f_1) = P\tilde{K} & \text{in } (0,T)\times\Omega, \\ \hat{w}(0) = 0 \end{cases}$$

ここで,

$$-\tilde{K} = (v_1-v_2)\cdot\nabla\hat{w}_2 + (\hat{w}_2\cdot\nabla)(\nabla f_1-\nabla f_2).$$

方程式(30)の解 $\hat{g}$ に対して不等式(14)を適用して

(33) $\quad \|\hat{g}_1-\hat{g}_2\|_{X^1(T)} \leqq p_1(A,C)\,T\,d_T((v_1,g_1),(v_2,g_2))$

が成立することが分る。更に，(31) の解 $\hat{f}$ に不等式 (17) を適用して，(33) を用いると

(34) $\quad \|\nabla\hat{f}_1-\nabla\hat{f}_2\|_{X^0(T)} \leqq p_2(A,C)\,T\,d_T((v_1,g_1),(v_2,g_2))$.

同様にして，(32) の解 $\hat{w}$ に不等式 (20) を適用して

(35) $\quad \|\hat{w}_1-\hat{w}_2\|_{X^1(T)} \leqq p_3(C)\,T\,d_T((v_1,g_1),(v_2,g_2))$

を得る。

さて，問題は $\partial(\nabla\hat{f})/\partial t$ の評価である。これは次の補題によるが，この補題の手法は命題4の証明にも用いられる。

<u>補題 2</u>.

(36) $\quad \|\frac{\partial}{\partial t}\nabla(\hat{f}_1-\hat{f}_2)\|_{X^0(T)} \leqq C\|v_0\|_2\|v_1-v_2\|_{X_1^1(T)}$

$$+\,p_4(C,A)\,T\,d_T((v_1,g_1),(v_2,g_2)).$$

命題(6) は不等式 (33)−(36) よりしたがう。

<u>補題 2 の証明</u>. $\hat{f}_j$ についての方程式を t で微分して，関係式 (25) を用いると，

$$\Delta\frac{\partial\hat{f}_j}{\partial t} = \operatorname{div} u_j - \operatorname{tr}((Dv_j)^2-(Dv_j')(D\hat{v}_j'))$$
$$-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega(\operatorname{div} u_j - \operatorname{tr}((Dv_j)^2-(Dv_j')(D\hat{v}_j')))\,dx,$$

ここで，

$$u_j = K - a(g_j)\nabla\hat{g}_j - (v_j\cdot\nabla)\hat{v}_j.$$

更に，

$$G_j = \operatorname{div} u_j - \operatorname{tr}((Dv_j)^2 - (Dv_j)(D\hat{v}_j))$$
$$\nabla b_j = Q u_j$$

とおき，$\hat{f}_j$ と $\hat{g}_j$ とに対する境界条件を考えに入れると次のΔに対する境界値問題を得る。

$$\Delta\left(\frac{\partial}{\partial t}(\hat{f}_1 - \hat{f}_2) - (b_1 - b_2)\right) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega (G_2 - G_1)\,dx$$
$$\text{(37)}\quad - \operatorname{tr}((Dv_1)^2 - (Dv_2)^2 + (Dv_2)(D\hat{v}_2) - (Dv_1)(D\hat{v}_1)),$$
$$\left\langle \nabla\frac{\partial}{\partial t}(\hat{f}_1 - \hat{f}_2) - \nabla(b_1 - b_2), n \right\rangle$$
$$= \langle (v_1\cdot\nabla)(\hat{v}_1 - v_1) - (v_2\cdot\nabla)(\hat{v}_2 - v_2), n\rangle$$

$f = \partial(\hat{f}_1 - \hat{f}_2)/\partial t + (b_1 - b_2)$ とおき，b_j を適当に選ぶと

$$\int_\Omega f\,dx = 0$$

とすることができる。よって，Green 公式より (37) も合せ

$$\|\nabla f\|_0^2 \leqq \int_{\partial\Omega} |\langle (v_1\cdot\nabla)(\hat{v}_1 - v_1) - (v_2\cdot\nabla)(\hat{v}_2 - v_2), n\rangle f|\,dS$$
$$+ \int_\Omega |\operatorname{tr}((Dv_1)^2 - (Dv_2)^2 + (Dv_2)(D\hat{v}_2) - (Dv_1)(D\hat{v}_1)) f|\,dx$$

を得る。体積々分の積分関数は

$$|f\partial v_j \text{ or } f\partial\hat{v}_j| \times |\partial(v_1 - v_2) \text{ or } \partial(\hat{v}_1 - \hat{v}_2)|$$

の和であるからそれらの積分は次で評価される；

$$\text{(38)}\quad \varepsilon\|f_1\|^2 + \varepsilon^{-1}\big(C\|v_0\|_2\|v_2 - v_1\|_1 + p_5(C, A)\,T\,d_T((v_1, g_1), (v_2, g_2))\big).$$

たとへば，

$$\int_\Omega |f\partial v_1 \partial(v_1-v_2)|\,dx \le \|f\partial v_1\|_0 \, \|\partial(v_1-v_2)\|_0$$
$$\le C\|f\|_1 \, \|v_1\|_2 \, \|v_1-v_2\|_1$$
$$\le \varepsilon\|f\|_1^2 + \varepsilon^{-1}C^2(\|v_0\|_2+Ct)\|v_1-v_2\|_1^2 \, .$$

境界上の積分も同様に(38)で評価される。(38)の右辺にあらわれる$\|f\|_0$はPoincaréの補題

$$\|f\|_0 \le C\left(\|\nabla f\|_0 + \left|\int_\Omega f(x)\,dx\right|\right) = C\|\nabla f\|_0$$

を用いて，εを十分小にして左辺にもってゆくことができる。結局$\|\nabla f\|_0$の評価式として，(34),(35)も用いて

$$\|\nabla f\|_0 \le C\|v_0\|_2 \, \|v_1-v_2\|_1 + p_6(C,A)\,T\,d_T((v_1,g_1),(v_2,g_2)) \tag{39}$$

を得ることになる。よって，f, b_jの定義と(33)−(35), (39)を用いて補題2の不等式(36)が証明される。

<u>定理の証明</u>　Tと$\|v(0)\|_{X^{s-1}}$を命題5.6が成立するように十分小さくとると，ΦはcontractionとなるからΦは$E(C,T)$のX^1−metricによるclosureに不動点(v,g)をもつことが分り，その(v,g)がX^sに属することもあわせて方程式(4)の解となることが結論できる。

最後に，初期値に関する制限$\|v(0)\|_{X^s}$が小ーを取除くためにスケールの変換を行う。

$$g_\lambda = g\,,\quad v_\lambda = \lambda v\,,\quad a_\lambda = \lambda^2 a\,,\quad K_\lambda = \lambda^2 K\,,\quad t_\lambda = t/\lambda$$

とおくと，$(v_\lambda(t_\lambda,x),\ g_\lambda(t_\lambda,x),\ a_\lambda,\ K_\lambda)$が方程式(4)

をみたすことと (v, g, a, K) がそうであることと同等である。関係式 $\partial^k v_\lambda / \partial t_\lambda^k = \lambda^{k+1} \partial^k v / \partial t^k$ が成立するから，λ を十分小とすることにより上の制限はとれる。

6．$\hat{g}$ の評価式

$\hat{f}$，$\hat{w}$ の評価式（命題2．3）は楕円型境界値問題，非圧縮性流体の問題と同様の手法で得られる。$\hat{g}$ の評価式（命題1）はふつう擬微分作用素を用いるが，ここではそれを用いないで通常の方法を徹底させる。方程式（13）の h に対して，

$$\langle \nabla f_1, n \rangle = h \qquad \text{on } (0,T) \times \partial\Omega$$

$$\| f_1 \|_{k+1, (0,T)\times\Omega} \leq C \| h \|_{k-1/2, (0,T)\times\partial\Omega} \quad (k=1, \cdots, s)$$

をみたすような $f_1 \in H^{s+1}((0,T) \times \Omega)$ をとり，（13）の代りに境界条件が0となる問題

$$\frac{d^2 f_2}{dt^2} - \mathrm{div}\,(a(g)\nabla f_2) = F - \frac{d^2 f_1}{dt^2} - \mathrm{div}\,(a(g)\nabla f_1)$$

$$(39) \qquad f_2(0) = g_0 - f_1(0), \quad \frac{\partial f_2}{\partial t}(0) = g_1 - \frac{\partial f_1}{\partial t}(0)$$

$$\langle \nabla f_2, n \rangle = 0$$

の解を f_2 とする。このとき，$\hat{g} = f_1 + f_2$ が（13）の解となる。よって，（13）で $h = 0$ の評価式をだすと十分となる。$h = 0$ のときは

$$\int_0^t dt \int_\Omega \left(\frac{d^2 \hat{g}}{dt^2} - \mathrm{div}\,(a(g)\nabla \hat{g}) \right) \frac{d\hat{g}}{dt}\, dx$$

を部分積分することにより

$$\int_{\Omega}\left(\left(\frac{d\hat{q}}{dt}(t)\right)^2 + \langle a(g)\nabla\hat{g}, \nabla\hat{g}\rangle\right) dx$$

がいわゆる energy norm にとれることがわかる。詳しくは [1] をみよ。命題4は補題と同じ手法を用いる。

References

[1] R. Agemi, The initial boundary value problem for inviscid barotropic fluid motion (to appear in Hokkaido M. J. vol 9)

[2] D. G. Ebin, The initial boundary value problem for subsonic fluid motion, C. P. A. M, vol. 32 1–19 (1979)

[3] J. Serrin, On the uniqueness of compressible fluid motions, Arch. Rat. Mach. Anal. vol. 3, 271 - 288 (1959)

(*) [1]の原稿をかいたあと，西田孝明氏から次の論文について御指摘を受けた。方法はちがうように思われる。

H. B. da Veiga, Un théorème d'existence dans la dynamique des fluides compressibles. C. R. Acad. Sc. t. 289 (17 décembre 1979), Ser. B 297–299.