数理解析研究所講究録
429巻 1981年 63-72

完全2組グラフのバイパータイト分解について

新居浜高専　潮　和彦

1. はじめに

n_1+n_2 個の点と n_1n_2 本の線からなる完全2組グラフ K_{n_1,n_2} を，k_1+k_2 個の点と k_1k_2 本の線からなる完全2組グラフ K_{k_1,k_2} の和（互いに線を共有しない）に分解する問題（バイパータイト分解問題，K_{k_1,k_2} 分解問題）を考える。

K_{n_1,n_2} が K_{k_1,k_2} 分解可能であるための必要十分条件について述べる。

2. 隣接行列とバイパータイト分解定理

K_{n_1,n_2} の2組の点集合を V_1, V_2（$|V_1|=n_1, |V_2|=n_2$）とする。V_1 の点を k_1 個と V_2 の点を k_2 個もつサブグラフ K_{k_1,k_2} をA型ブロックとよび，V_2 の点を k_1 個と V_1 の点を k_2 個もつサブグラフ K_{k_1,k_2} をB型ブロックとよぶ。V_1 の点 u_i と V_2 の点 v_j を線で結ぶとき (i,j) 要素を1とし，結ばないとき0とすれば，各ブロックに対して $n_1\times n_2$ の0-1行列（隣接行列）が対応する。

A型ブロックに対応する隣接行列を<u>A型行列</u>とよび，B型ブロックに対応する隣接行列を<u>B型行列</u>とよぶ。どの要素も1となる $n_1 \times n_2$ の行列を M_G とすれば，K_{n_1,n_2} には M_G が対応する。このとき，明らかに次の定理が成り立つ。

<u>定理1</u>　K_{n_1,n_2} が b_1 個のA型ブロック $B_A^{(p)}$ と b_2 個のB型ブロック $B_B^{(q)}$ にバイパータイト分解可能である

$$\Leftrightarrow \quad M_G = \sum_{p=1}^{b_1} M_A^{(p)} + \sum_{q=1}^{b_2} M_B^{(q)}$$

ここに，$M_A^{(p)}$ は $B_A^{(p)}$ に対応するA型行列，$M_B^{(q)}$ は $B_B^{(q)}$ に対応するB型行列である。

0-1行列の存在とその構成アルゴリズム，およびバイパータイト分解に関して，次の一連の lemma を得る。

<u>Lemma 2</u>　行和ベクトル $(r_1, r_2, \cdots, r_{n_1})$ と列和ベクトル $(s, s, \cdots, s)$ をもつ $n_1 \times n_2$ の 0-1 行列が存在する

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n_1} r_i = n_2 s \quad かつ \quad r_i \leqq n_2 .$$

そのような 0-1 行列を直接次の構成アルゴリズムで作ることができる。

Lemma 3（アルゴリズム）

(1) 2本の数列を作る。

$$R:\ \underbrace{1,1,\cdots,1}_{r_1},\ \underbrace{2,2,\cdots,2}_{r_2},\ \cdots,\ \underbrace{n_1,n_1,\cdots,n_1}_{r_{n_1}}$$

$$C:\ 1,2,\cdots,n_2,\ 1,2,\cdots,n_2,\ \cdots,\ 1,2,\cdots,n_2$$

(2) R, C の第 h 成分をそれぞれ $i_R(h)$, $j_C(h)$ とする。

(3) $E=\{(i_R(h), j_C(h)) \mid h=1,2,\cdots,n_2 s\}$ とする。

(4) $n_1\times n_2$ の 0-1 行列 $M=\|m_{ij}\|$ を

$$m_{ij}=\begin{cases} 1 & (i,j)\in E \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

で定義する。

$\Longrightarrow$ M は行和ベクトル $(r_1, r_2, \cdots, r_{n_1})$ と列和ベクトル $(s, s, \cdots, s)$ をもつ $n_1\times n_2$ の 0-1 行列である。

（証明） $r_i \leqq n_2$ より $(i_R(h), j_C(h))=(i_R(h'), j_C(h')) \Leftrightarrow h=h'$ である。行番号 i が R に丁度 r_i 回現われ，列番号 j が C に丁度 s 回現われるので，$\sum_{j=1}^{n_2} m_{ij}=r_i$，$\sum_{i=1}^{n_1} m_{ij}=s$ である。

この行列 M は，その行和ベクトル $(r_1, r_2, \cdots, r_{n_1})$ と列和ベクトル $(s, s, \cdots, s)$ が特殊な値をもつとき，次のように A 型行列の和で表わされる。

Lemma 4　$r_i, s, n_2 s$ がそれぞれ k_2, k_1, k_1k_2 の倍数である

$$\Longrightarrow \quad M=\sum_{p=1}^{b_1} M_A^{(p)}, \quad b_1 = n_2 \lambda / k_1 k_2 .$$

（証明）Lemma 3 に与えられた E の要素からなる数列を考える。

$$X: \ e(1),\ e(2),\ \cdots,\ e(T)$$

ここに，$T=n_2\lambda$，$e(h)=(i_R(h), j_C(h))$ である。$t=T/k_1$，$b_1=t/k_2$ とおく。この数列の始めの t 個を第1行に，次の t 個を第2行に，…，最後の t 個を第 b_1 行に並べれば，次の様な $k_1\times t$ の配列を得る。

$$\begin{array}{cccc}
e(1) & e(2) & \cdots & e(t) \\
e(t+1) & e(t+2) & \cdots & e(2t) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e(T-t+1) & e(T-t+2) & \cdots & e(T)
\end{array}$$

この配列を k_2 列ずつの小配列に分割する。

$$A^{(1)} \quad A^{(2)} \quad \cdots \quad A^{(b_1)}$$

$A^{(p)}$ にある要素の集合を $E^{(p)}$ とし，$n_1\times n_2$ の 0-1 行列 $M_A^{(p)}=\|m_{ij}^{(p)}\|$ を

$$m_{ij}^{(p)}=\begin{cases} 1 & (i,j)\in E^{(p)} \\ 0 & その他 \end{cases}$$

で定義すれば，$M_A^{(p)}$ は A 型行列である。$E=\bigcup_{p=1}^{b_1} E^{(p)}$，$E^{(p)}\cap E^{(p')}=\phi\ (p\neq p')$ であるから，$M=\sum_{p=1}^{b_1} M_A^{(p)}$，$b_1=n_2\lambda/k_1k_2$ である。

このとき，さらに，行列 (M_G-M) の行和ベクトルと列和ベクトルが特殊な値をもつならば，次のように M_G は A型行列と B型行列の和で表わされる。これは定理1より K_{n_1,n_2} のバイパータイト分解を意味している。

Lemma 5　$r_i, s, n_2 s$ がそれぞれ k_2, k_1, k_1k_2 の倍数であり，さらに，$n_2-r_i, n_1-s, n_2(n_1-s)$ がそれぞれ k_1, k_2, k_1k_2 の倍数である

$$\Longrightarrow \quad M_G=\sum_{p=1}^{b_1}M_A^{(p)}+\sum_{q=1}^{b_2}M_B^{(q)}, \quad b_2=n_2(n_1-s)/k_1k_2 .$$

（証明）$r_i'=n_2-r_i$, $s'=n_1-s$ とおく。2本の数列を作る。

$$R' : \underbrace{1,1,\cdots,1}_{r_1'}, \underbrace{2,2,\cdots,2}_{r_2'}, \cdots, \underbrace{n_1,n_1,\cdots,n_1}_{r_{n_1}'}$$

$$C' : n_2,n_2-1,\cdots,1, n_2,n_2-1,\cdots,1,\cdots, n_2,n_2-1,\cdots,1$$

R', C' の第 h 成分をそれぞれ $i_{R'}(h), j_{C'}(h)$ とし，$E'=\{(i_{R'}(h), j_{C'}(h)) \mid h=1,2,\cdots,n_2s'\}$ とする。$n_1\times n_2$ の 0-1 行列 $M'=\|m_{ij}'\|$ を

$$m_{ij}'=\begin{cases}1 & (i,j)\in E'\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

で定義する。このとき，Lemma 4 より M' はB型行列の和で表わされる。

$$M'=\sum_{q=1}^{b_2}M_B^{(q)}, \quad b_2=n_2s'/k_1k_2 .$$

$S=\{(i,j) \mid i=1,2,\cdots,n_1 ; j=1,2,\cdots,n_2\}$ とすれば，$r_i+r_i'=n_2$ より $E\cup E'=S$, $E\cap E'=\phi$ となる。S, E, E' はそれぞれ M_G, M, M' に対応

するから，$M_G = M + M'$ となる。

$n = k_1 x + k_2 y$ をみたす非負の整数ベクトル (x, y) を解ベクトルといい，その個数を $w(n)$ で表わす。このとき，定理1およびLemma 2～Lemma 5を用いて次のバイパータイト分解定理を得る。

定理6　$n_1 \leqq n_2$ かつ $k_1 \leqq k_2$ のとき，K_{n_1, n_2} が K_{k_1, k_2} 分解可能である

$\Longleftrightarrow$ (i) $n_1 n_2 \equiv 0 \pmod{k_1 k_2}$

(ii) $n_1 \geqq k_1$ かつ $n_2 \geqq k_2$

(iii) $w(n_1) \geqq 1$ かつ $w(n_2) \geqq 1$

(iv) $w(n_1) = 1$ のとき

$$\sum_{g=1}^{w(n_2)} f_g = n_1 \quad \text{かつ} \quad k_1 x_0 n_2 = \sum_{g=1}^{w(n_2)} k_2 y_g f_g$$

ここに，(x_0, y_0) は $n_1 = k_1 x + k_2 y$ の解ベクトル，(x_g, y_g) は $n_2 = k_1 x + k_2 y$ の解ベクトル

（必要性の証明）K_{n_1, n_2} $(n_1 \leqq n_2)$ が b_1 個のA型ブロックと b_2 個のB型ブロックにバイパータイト分解されたものとする. K_{n_1, n_2} は $n_1 n_2$ 本の線をもち，各ブロック K_{k_1, k_2} は $k_1 k_2$ 本の線をもつから $k_1 k_2 | n_1 n_2$ が成り立つ。従って(i)は必要である。各ブロック K_{k_1, k_2} $(k_1 \leqq k_2)$ は K_{n_1, n_2} のサブグラフであるから

$k_1 \leqq n_1,\ k_1 \leqq n_2\ \therefore k_1 \leqq n_1$, さらに, $n_2 \geqq k_1,\ n_2 \geqq k_2\ \therefore n_2 \geqq k_2$.
従って, (ii)は必要である. V_1の点uに対して, $y(u), x(u)$をそれぞれ, uが現われるA型ブロック, B型ブロックの数とする. このときuと結ばれる線の数より

$$n_2 = k_1 x(u) + k_2 y(u)$$

が成り立つ. さらに, V_2の点vに対して, $x(v), y(v)$をそれぞれ, vが現われるA型ブロック, B型ブロックの数とする. このときvと結ばれる線の数より

$$n_1 = k_1 x(v) + k_2 y(v)$$

が成り立つ. $(x(v), y(v))$は$n_1 = k_1 x + k_2 y$の解ベクトル, $(x(u), y(u))$は$n_2 = k_1 x + k_2 y$の解ベクトルであるから$w(n_1) \geqq 1,\ w(n_2) \geqq 1$となり(iii)は必要である.

b_1個のA型ブロックの線の数より

$$\sum_{v \in V_2} k_1 x(v) = \sum_{u \in V_1} k_2 y(u)$$

が成り立つ. $w(n_1) = 1$のとき, (x_0, y_0)を$n_1 = k_1 x + k_2 y$の解ベクトルとすれば, $x(v) = x_0,\ y(v) = y_0$となるので

$$k_1 x_0 n_2 = \sum_{u \in V_1} k_2 y(u)$$

が成り立つ. $n_2 = k_1 x + k_2 y$の解ベクトル(x_g, y_g)に対して, $(x(u), y(u)) = (x_g, y_g)$となる$u$の数を$f_g$とすれば

$$\sum_{g=1}^{w(n_2)} f_g = n_1,\quad \sum_{u \in V_1} y(u) = \sum_{g=1}^{w(n_2)} y_g f_g$$

が成り立つ. 従って, $k_1 x_0 n_2 = \sum_{g=1}^{w(n_2)} k_2 y_g f_g$を得る. (iv)は必要であ

る。

（十分性の証明）(iii)より k_1, k_2 の最大公約数は n_1, n_2 の約数であるから，一般性を失うことなく，k_1とk_2は互いに素であるとして証明する。

(a) $w(n_1)=1$ の場合：$(r_1, r_2, \cdots, r_{n_1}) = (\underbrace{k_2y_1, \cdots, k_2y_1}_{f_1}, \underbrace{k_2y_2, \cdots, k_2y_2}_{f_2}, \cdots, \underbrace{k_2y_p, \cdots, k_2y_p}_{f_p})$，$s=k_1x_0$，$\beta=w(n_2)$ とおけば，Lemma 5 より K_{n_1,n_2} は K_{k_1,k_2} 分解可能である。

(b) $w(n_1)\geqq 2$, $w(n_2)=1$ の場合：$n_1 \leqq n_2$ および，k_1とk_2は互いに素であることから $w(n_1)=2$ を得る。$n_1=k_1x+k_2y$ の２つの解ベクトルを (x_1, y_1)，(x_2, y_2) $(x_1<x_2)$ とする。$n_2=k_1x+k_2y$ の解ベクトルを (x_0, y_0) とする。$f_1=(k_1x_0n_1-k_2y_2n_2)/k_1k_2$，$(r_1, r_2, \cdots, r_{n_2}) = (\underbrace{k_1x_1, \cdots, k_1x_1}_{f_1}, \underbrace{k_1x_2, \cdots, k_1x_2}_{n_2-f_1})$，$s=k_2y_0$ とおけば，Lemma 5より K_{n_2,n_1} は K_{k_1,k_2} 分解可能である。

(c) $w(n_1)\geqq 2$, $w(n_2)\geqq 2$ の場合：$n_i'=n_i-(w(n_i)-2)k_1k_2$ とおく。このとき $w(n_1')=w(n_2')=2$ となる。K_{n_1,n_2} を４つの部分グラフ

$$K_{n_1',n_2'},\quad K_{n_1',t_2k_1k_2},\quad K_{n_2',t_1k_1k_2},\quad K_{t_1k_1k_2,t_2k_1k_2}\quad (t_i=w(n_i)-2)$$

に分解する。３つの部分グラフ $K_{n_1',t_2k_1k_2}$, $K_{n_2',t_1k_1k_2}$, $K_{t_1k_1k_2,t_2k_1k_2}$ は K_{k_1,k_2} 分解可能である。$K_{n_1',n_2'}$ の K_{k_1,k_2} 分解を証明する。

$n_1'\geqq n_2'$ の場合，n_1', n_2' を

$$n_i' = k_1x_{i1}+k_2y_{i1} = k_1x_{i2}+k_2y_{i2}\quad (x_{i1}<x_{i2})$$

とおく。

$$f_1 = \begin{cases} (k_1 x_{11} n_2' - k_2 y_{22} n_1')/k_1 k_2 & (k_1 x_{11} n_2' \geqq k_2 y_{22} n_1' \text{ のとき}) \\ (k_1 k_2 n_2' + k_1 x_{11} n_2' - k_2 y_{22} n_1')/k_1 k_2 & (k_1 x_{11} n_2' < k_2 y_{22} n_1' \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$r_i = \begin{cases} k_2 y_{21} & (i = 1, 2, \cdots, f_1) \\ k_2 y_{22} & (i = f_1+1, f_1+2, \cdots, n_1') \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} k_1 x_{11} & (k_1 x_{11} n_2' \geqq k_2 y_{22} n_1' \text{ のとき}) \\ k_1 x_{12} & (k_1 x_{11} n_2' < k_2 y_{22} n_1' \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおけば，Lemma 5 より $K_{n_1', n_2'}$ は K_{k_1, k_2} 分解可能である．

$n_1' < n_2'$ の場合には，n_1' と n_2' を入れかえれば上の議論より，$K_{n_1', n_2'}$ は K_{k_1, k_2} 分解可能である。（定理 6 の証明終り）

パラメータ k_1, k_2, n_1, n_2 の特別な場合には，次の系を得る。

系7　$n_1 = n_2 = n$ かつ $k_1 \leqq k_2$ のとき，$K_{n,n}$ が K_{k_1, k_2} 分解可能である

$\Leftrightarrow$　(i) $n^2 \equiv 0 \pmod{k_1 k_2}$　(ii) $n \geqq k_2$　(iii) $w(n) \geqq 2$.

系8　$k_1 = k_2 = k$ のとき，K_{n_1, n_2} が $K_{k,k}$ 分解可能である

$\Leftrightarrow$　$n_1 \equiv 0$ かつ $n_2 \equiv 0 \pmod{k}$

系9　$n_1 \leqq n_2$ かつ $k_1 = 1$ のとき，K_{n_1, n_2} が K_{1, k_2} 分解可能である

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} n_2 \equiv 0 \pmod{k_2} & n_1 < k_2 \text{ のとき} \\ n_1 n_2 \equiv 0 \pmod{k_2} & n_1 \geqq k_2 \text{ のとき}. \end{cases}$$

3. 参考文献

[1] S.Yamamoto,H.Ikeda,S.Shige-eda,K.Ushio and N.Hamada,On claw-decomposition of complete graphs and complete bigraphs, Hiroshima Math. J. 5(1975),33-42.

[2] 潮 和彦,Bipartite decomposition of complete bipartite graphs, 日本数学会・昭和55年度年会・応用数学分科会講演予稿集(1980),44-50.

[3] 潮 和彦，完全２組グラフのbipartite分解について，京都大学数理解析研究所講究録404「実験配置の理論と応用」(1981),135-157.

[4] K.Ushio,Bipartite decomposition of complete multipartite graphs,To appear in Hiroshima Math. J. 11(1981)

[5] 潮 和彦，完全２組グラフのbipartite分解，日本数学会・昭和56年度年会・応用数学分科会講演予稿集(1981), 38-42.