数理解析研究所講究録
430巻 1981年 132-139

移流拡散問題の有限要素近似
── 空間3次元問題への拡張 ──

(財) 電力中央研究所　　池田 勉

1. はじめに　　$\mathbb{R}^3 \supset \Omega$: polyhedral domain, $\partial\Omega \equiv \Gamma$, $0 < T$: fixed として、次の移流項を含む拡散方程式の有限要素近似を考える：

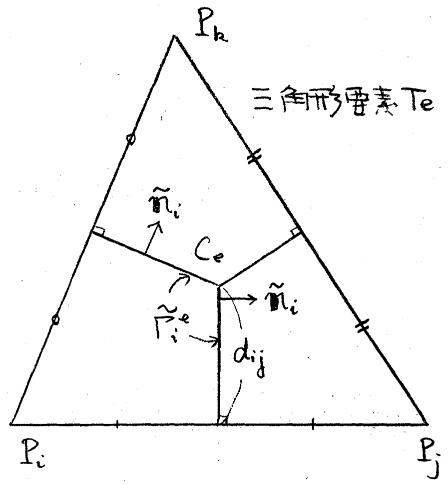
$$
(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{b}\nabla u = a\Delta u & \text{in } \Omega\times(0,T), \\ u = 0 & \text{on } \Gamma, \\ u = u^0 & \text{in } \Omega \text{ at } t = 0 。\end{cases}
$$

ただし、$0 < a$: constant, $\mathbf{b} \in \{C^1(\bar{\Omega})\}^3$, $u^0 \in C(\bar{\Omega})$ とする。

周知のように、(1) の滑らかな解は「最大値原理」を満たし、流速データ $\mathbf{b}$ に発散がない ($\mathrm{div}\,\mathbf{b} \equiv 0$) 場合には「保存則」も満たす。最大値原理も保存則も物理的に重要な意味を持つので、有限要素解がこれらの法則の離散アナロジーを満たすかどうかは興味深い問題である。

近年、領域を弱鋭角型に有限要素分割すれば、空間きざみ

中に対する制約条件なしに離散最大値原理が成立する有限要素法がいくつか開発された。（[1], [2], [3], [6], [7]）　そのうち、空間2次元の場合について提案された人工拡散項導入型有限要素法（[2]）と部分上流型有限要素法（[3]）は、各三角形要素 T_e の「外心」の特質、すなわち，Iwaki [5] の等式



(2)　$$-\int_{T_e} \nabla\phi_{jk} \nabla\phi_{ik}\, d\Omega = \frac{d_{ij}}{\overline{P_iP_j}}$$

を利用して構成されたものである。ここに，ϕ_{jk}（ϕ_{ik}）は節点 P_j（P_i）で1，他の節点では0となる要素内線形関数である。(2) は

(3)　$$-\int_{T_e} \nabla w_h \nabla\phi_{ik}\, d\Omega = \int_{\tilde{\Gamma}_i^e} \nabla w_h \cdot \tilde{n}_i\, d\Gamma$$

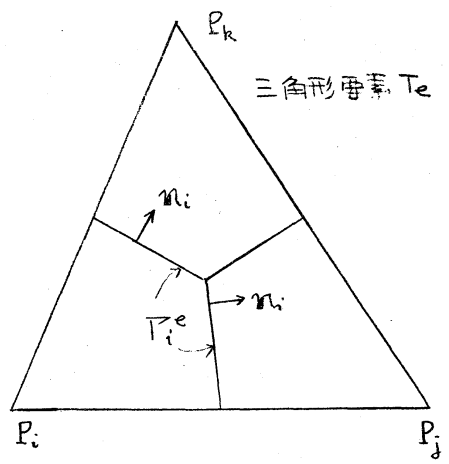
とも表現できる。（w_h：任意の要素内線形関数，$\tilde{\Gamma}_i^e = T_e \cap$（$P_i$に associate した外心領域 $\tilde{\Omega}_i$ の境界），$\tilde{n}_i$ = $\tilde{\Omega}_i$ の境界上の外向き単位法線ベクトル）

しかしながら、空間3次元のときには、有限要素分割が鋭角型であっても要素の外接球の中心が要素内にあるとは限らず、たとえ要素内にあっても (2) あるいは (3) に対応する等式は成立しない。

一方、重心領域についても

$$(4) \quad -\int_{T_e} \nabla w_h \nabla \varphi_{ih}\, d\Omega = \int_{\Gamma_i^e} \nabla w_h \cdot n_i\, d\Gamma$$

が成立する。（$\Gamma_i^e = T_e \cap$（P_i に associate した重心領域 Ω_i の境界），$n_i = \Omega_i$の境界上の外向き単位法線ベクトル）



以下では、空間３次元のときにも (4) に対応する等式が成立することを利用して、(1) の人工拡散係数導入型有限要素近似および部分的上流型有限要素近似を構成する。

2. 有限要素分割　$\mathbb{R}^3 \supset \Omega$ の四面体による有限要素分割族を $\{T^h\}$, h = 最大要素直径，として

(i) 各 T^h は弱鋭角型，　(ii) $\{T^h\}$ は正則

であるとする。節点を P_i（$i \le N \Rightarrow$ 内点，$N < i \le K \Rightarrow \Gamma$ 上の節点），四面体要素を T_e（$1 \le e \le N_E$）とする。各節点 P_i に associate した重心領域を Ω_i と記し，

$\Gamma_i = \partial\Omega_i$，$\Gamma_i^e = \Gamma_i \cap T_e$，

$n_i = \Gamma_i$ 上の外向き単位法線ベクトル

とおく。節点 P_i が属する要素 T_e の他の節点の添字全体を

Λ_i^e とする。 P_i に associate した形状関数を φ_{ih} とし, 近似関数空間を

$$V^h = \mathrm{span}\{\varphi_{1h}, \cdots, \varphi_{Kh}\}, \qquad V_0^h = \mathrm{span}\{\varphi_{1h}, \cdots, \varphi_{Nh}\}$$

とする。補間作用素 $I_h : C(\bar{\Omega}) \longrightarrow V^h$, 質量集中化作用素 $- : C(\bar{\Omega}) \longrightarrow L^\infty(\Omega)$ を

$$I_h w = \sum w(P_i)\,\varphi_{ih}, \qquad \bar{w} = \sum w(P_i)\,\bar{\varphi}_{ih}$$

で与える。ここに、 $\bar{\varphi}_{ih}$ は Ω_i の特性関数である。

<u>3. 移流項の近似</u>　移流項の近似に際しては簡単な計算によって示される次の lemma と cor. が重要な役割を果す。

<u>Lemma 1.</u>　$P_i \in T_e$ に対して次式が成立する:

$$(5) \quad -\int_{T_e} \nabla w_h \nabla \varphi_{ih}\, d\Omega = \int_{\Gamma_i^e} \nabla w_h \cdot \mathbf{n}_i\, d\Gamma \qquad {}^\forall w_h \in V^h. \ \blacksquare$$

<u>Cor. 1.</u>　$P_i \in T_e$ に対して

$$(6) \quad \int_{\Gamma_i^e} \mathbf{n}_i\, d\Gamma = \sum_{j \in \Lambda_i^e} \alpha_{ij}^e\, \overrightarrow{P_i P_j}$$

となる。ここに, α_{ij}^e は次式で与えられる:

$$(7) \quad \alpha_{ij}^e = -\int_{T_e} \nabla \varphi_{jh} \nabla \varphi_{ih}\, d\Omega\ . \ \blacksquare$$

はじめに, 各要素 T_e ごとに任意に一点 $Q_e \in T_e$ を定め, $P_i \in T_e$, $j \in \Lambda_i^e$ について

$$(8) \quad b_{ij}^e = -b_{ji}^e = \alpha_{ij}^e\, \mathbf{b}(Q_e)\, \overrightarrow{P_i P_j}$$

とおく。

移流項 $(\mathbf{b}\nabla w, \phi_h)$, $\phi_h \in V_0^h$ は人工拡散項導入型有限要素近似では

(9) $\quad (R_h^1 w_h, \overline{\Phi}_h) \equiv \sum_{i=1}^{N} \phi_i \sum_{e=1}^{N_E} \sum_{j\in\Lambda_i^e} b_{ij}^e \frac{1}{2}(w_j - w_i)$

で近似され $(w_h = I_h w,\ w_i = w_h(P_i),\ \phi_i = \phi_h(P_i))$, 部分的上流型有限要素近似では

(10) $$(R_h^2 w_h, \overline{\Phi}_h) \equiv \sum_{i=1}^{N} \phi_i \sum_{e=1}^{N_E} \sum_{j\in\Lambda_i^e} b_{ij}^e \left\{(1-\beta_{ij}^e)(1-H(b_{ij}^e)) + \frac{1}{2}\beta_{ij}^e\right\}(w_j - w_i)$$

で近似される。ここに

(11) $\quad \beta_{ij}^e = \min\{1,\ 2a d_{ij}^e / |b_{ij}^e|\}$

であり, H = Heaviside関数である。

近似式 (9) を得る手順を以下に示す。($\Rightarrow$ は近似を意味する。)

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{b}\nabla w,\ \phi_h)\\
&\Rightarrow (\mathbf{b}\nabla w_h,\ \overline{\Phi}_h) = (\operatorname{div}\mathbf{b}\, w_h - w_h \operatorname{div}\mathbf{b},\ \overline{\Phi}_h)\\
&\Rightarrow (\operatorname{div}\mathbf{b}\, w_h - \overline{w}_h \operatorname{div}\mathbf{b},\ \overline{\Phi}_h)\\
&\qquad = \sum_{i=1}^{N} \phi_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{b}(w_h - w_i)\,\mathbf{n}_i\, d\Gamma\\
&\qquad = \sum_{i=1}^{N} \phi_i \sum_{e=1}^{N_E} \int_{\Gamma_i^e} \mathbf{b}(w_h - w_i)\,\mathbf{n}_i\, d\Gamma\\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \phi_i \sum_{e=1}^{N_E} \mathbf{b}(Q_e) \int_{\Gamma_i^e} (w_h - w_i)\,\mathbf{n}_i\, d\Gamma\\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \phi_i \sum_{e=1}^{N_E} \mathbf{b}(Q_e)\,(w_h(Q_e) - w_i) \int_{\Gamma_i^e} \mathbf{n}_i\, d\Gamma
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \phi_i \sum_{e=1}^{N_E} \mathbf{b}(Q_e)\,(w(Q_e)-w_i) \sum_{j\in\Lambda_i^e} \alpha_{ij}^e\, \overrightarrow{P_iP_j}$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{N} \phi_i \sum_{e=1}^{N_E} \mathbf{b}(Q_e) \sum_{j\in\Lambda_i^e} \left(\tfrac{1}{2}(w_i+w_j)-w_i\right) \alpha_{ij}^e\, \overrightarrow{P_iP_j}$$

$$\equiv (R_h^1 w_h,\ \overline{\Phi}_h)\ 。$$

<u>Lemma 2.</u>　$p>3$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ とする。次の評価が成立する：

$$(12)\quad \begin{cases} |(R_h^1 I_h w, \overline{\Phi}_h) - (\mathbf{b}\nabla w, \phi_h)| \le C h \|w\|_{2,p} \|\phi_h\|_{1,q} & \forall w \in W^{2,p}(\Omega), \\ |(R_h^2 I_h w, \overline{\Phi}_h) - (\mathbf{b}\nabla w, \phi_h)| \le C h \|w\|_{2,p} \|\phi_h\|_{1,q} & \forall w \in W^{2,p}(\Omega). \end{cases}$$

ここに，C は h によらない正定数である。■

<u>4. 有限要素近似</u>

(1) の人工拡散項導入型有限要素近似は

$$(13)\quad \begin{cases} \text{Find } \{v_h^n\}_{n=0}^{N_\tau} \subset V_0^h \quad \text{such that} \\ \left(\frac{1}{\tau}(\overline{V}_h^{n+1}-\overline{V}_h^n), \overline{\Phi}_h\right) + (R_h^1 v_h^n, \overline{\Phi}_h) = -(a_h \nabla v_h^n, \nabla \phi_h) \\ \qquad\qquad \text{for } \forall \phi_h \in V_0^h,\ n=0,1,\cdots,N_\tau-1, \\ v_h^0 = I_h u^0 \end{cases}$$

である。ここに，τ = 時間きざみ，$N_\tau = [T/\tau]$ であり，

$L^\infty \ni a_h$ は

$$(14)\quad a_h|T_e \equiv a_e = a + \max\{0, \tfrac{1}{2} b_e h_e - a\}$$

$$b_e = \max_{T_e} |\mathbf{b}|,\quad h_e = T_e \text{ の最大辺長}$$

で与えられる。

(1) の部分的上流型有限要素近似は

$$
(15)\quad \begin{cases} \text{Find } \{v_h^n\}_{n=0}^{N_\tau} \subset V_0^h \text{ such that} \\ (\frac{1}{\tau}(\bar{v}_h^{n+1} - v_h^n), \Phi_h) + (K_h^2 v_h^n, \Phi_h) = (a \nabla v_h^n, \nabla \phi_h) \\ \qquad\qquad \text{for } {}^\forall \phi_h \in V_0^h,\ n = 0, 1, \dots, N_\tau - 1, \\ v_h^0 = I_h u^0 \end{cases}
$$

である。

<u>Theorem 1. (maximum principle & uniform convergence)</u> 有限要素スキーム (14) は条件

$$(16)\qquad \tau \le \min\{K_e^2/(4a_e + 2K_e b_e)\} \qquad K_e = T_e \text{ の最小垂線長}$$

の下で，有限要素スキーム (15) は条件

$$(17)\qquad \tau \le \min\{K_e^2/(4a + 4K_e b_e)\}$$

の下で，L^∞-stable であり，解 v_h^n は離散最大値原理

$$
(18)\qquad \min\{u^0, 0\} \le v_h^n(x) \le \max\{u^0, 0\} \qquad \text{for } {}^\forall x \in \bar{\Omega},\ n = 0, \dots, N_\tau
$$

を満たす。さらに，(1) の解が十分滑らかならば (14)，(15) の有限要素解は各々の安定条件 (16)，(17) の下で，一様に (1) の真の解に収束する。∎

<u>Remark.</u> (8) 式中の $\mathbf{b}(Q_e)$ の代りに，各要素 T_e ごとに次式で一意に定まる $\mathbf{b}_e$ を用いれば，連続問題 (1) が保存則を満たすとき ($\operatorname{div} \mathbf{b} \equiv 0$ in Ω) には，(14)，(15) は離散保存則を満たす：

$$\mathbf{b}_e \int_{\Gamma_{ei}^e} \mathbf{n}_{ei}\, d\Gamma = \int_{\Gamma_{ei}^e} \mathbf{b}\, \mathbf{n}_{ei}\, d\Gamma \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

ただし，T_e の4頂点を $P_{e1}, P_{e2}, P_{e3}, P_{e4}$ とした。∎

<u>Example of (14), (15)</u>　　　$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$: constant,

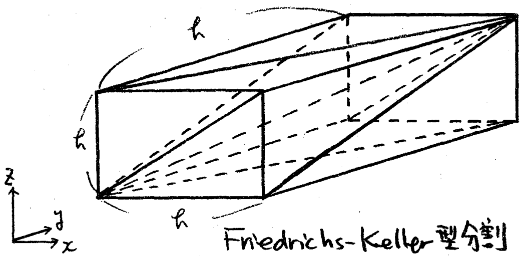
Friedrichs-Keller型有限要素分割のときには，(14) は x, y, z 各方向に人工拡散係数

$$\max\left\{0, \frac{\sqrt{3}}{2} h (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)^{\frac{1}{2}} - a\right\}$$

を付加した差分近似と一致し，(15) は x, y, z 各方向ごとに人工拡散係数

$$\begin{cases} \max\left\{0, \frac{1}{2} h |b_1| - a\right\} & (x\text{方向}), \\ \max\left\{0, \frac{1}{2} h |b_2| - a\right\} & (y\text{方向}), \\ \max\left\{0, \frac{1}{2} h |b_3| - a\right\} & (z\text{方向}) \end{cases}$$

を付加した差分近似と一致する。



Friedrichs-Keller型分割

(参考文献)

[1] Baba & Tabata, A finite element method satisfying both discrete conservation law and discrete maximum principle.

[2] Ikeda, Artificial viscosity in finite element approximations to diffusion equation with drift terms. Lecture Note in Num. Appl. Anal. 2.

[3] 池田，上流型有限要素法の一改良，数学会応用数学分科会講演予稿集(1980).

[4] 池田，移流を伴う拡散現象の数値解析，電力中央研究所研究報告 No 680001.

[5] Iwaki, Comparison of FEM and triangular FDM in heat conduction problem, Theoritical and Applied Mechanics, 23 (1975).

[6] Kanayama, Finite element analysis on the tidal current and COD distribution in Mikawa Bay, Coastal Engng. in Japan, 21 (1978).

[7] Tabata, A finite element approximation corresponding to the upwind finite differencing, Mem. Numer. Math., 4 (1977).