数理解析研究所講究録
431巻 1981年 150-163

双曲型方程式の特性境界値問題について

上智大学 理工学部 内山康一

1. 問題と仮定.

半空間で境界値問題

$$(1.1)\quad \begin{cases} P(D_x, D_z)u(x,z) = f(x,z) & x>0,\ z\in\mathbb{R}^n \\ B_j(D_x, D_z)u\big|_{x=0} = g_j(z) & \end{cases}$$

を考え，解の評価式

$$(1.2)\qquad \|u\|^2 + \sum_j \langle \gamma_j u\rangle^2 \leq C\left(\|f\|^2 + \sum_j \langle g_j\rangle^2\right)$$

を求めることを問題にする．（$\gamma_j u \underset{def.}{=\!=} D_x^j u|_{x=0}$）．Pが楕円型のときは，境界$\{x=0\}$は非特性であるが，Pが双曲型のときは境界が特性的になることがある．(1.1)を境界上の方程式に還元するとき，'楕円型'になるときは一様Lopatinski条件という．ここでは'双曲型'になるときまで考察の対象をひろげる（非一様Lopatinski条件）．ただし，P，B_jは定数係数微分作用素でPは単独狭双曲型（strictly hyperbolic）とする．

双曲型境界値問題を考える以上，非一様Lopatinski条件，特性境界の考察は理論上は必然的と思われる．一方，数理物理にあらわれる基本方程式にはMaxwell方程式など特性境界をもつものが登場している．（Majda-Osher [3]，久保田-大久保 [2]）．単独定係数の双曲型作用素 P に対する C^∞-$\mathcal{D}'$ 枠内の特性境界値問題は柴田 [5]，若林 [8] において扱われている．

記号を導入して仮定を明確にする．

$(x, z) = (x, y, t) \in \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y^{n-1} \times \mathbb{R}_t$ とし，その dual を $(\xi, \zeta) = (\xi, \eta, \tau)$ とする．

$$D_x = \partial/i\partial x, \quad D_y = (\partial/i\partial y_1, \cdots, \partial/i\partial y_{n-1}), \quad D_t = \partial/i\partial t.$$

仮定
- (P1) $P(D) = P(D_x, D_y, D_t)$ は m 階（非同次），D_t に関して狭双曲型（strictly hyperbolic）
- (P2) P^0 を P の主要項とするとき，$P^0(1, 0, 0) = 0$．
  （i.e. $\{x=0\}$ が P の特性境界）

仮定（P1），（P2）から，P を ξ の降冪の順にかくとき

$$P(\xi, \zeta) = P_{m-1}(\zeta)\xi^{m-1} + \cdots + P_1(\zeta)\xi + P_0(\zeta)$$

であって，$P_{m-1}(D_y, D_t)$ は 1 階の D_t に関する双曲型したがって狭双曲型作用素であることがわかる．したがって，ある正数 γ_0 が存在して

$$(1.3) \qquad P(\xi, \eta, \tau) \neq 0 \qquad (\xi, \eta, \tau) \in \mathbb{R}^n \times \{\operatorname{Im}\tau < -\gamma_0\}$$

$$(1.4) \qquad P_{m-1}(\eta, \tau) \neq 0 \qquad (\eta, \tau) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{\operatorname{Im}\tau < -\gamma_0\}.$$

特性方程式 $P(\xi,\zeta)=0$ を考える．$\zeta\in\mathbb{R}^{n-1}\times\{\mathrm{Im}\,\tau<-\gamma_0\}$ を parameter とすると，根 ξ は実根でありえない．虚部正の根を $\xi_j^+(\zeta)$, $j=1,2,\cdots,\mu^+$，虚部負の根を ξ_j^-, $j=1,2,\cdots,\mu^-$ とする．$\mu^++\mu^-=m-1$．$\mu^\pm$ は parameter に依存しない．

境界作用素 $\begin{cases} B_j(\xi,\zeta)=\sum_{j=0}^{m_j}B_{j,k}(\zeta)\xi^k \\ b_j=\deg_{(\xi,\zeta)}B_j \quad , \quad m_j=\deg_\xi B_j \end{cases}$

について

仮定 | (B1) 条件の個数は μ^+．i.e. $j=0,1,\cdots,\mu^+-1$.
(B2) $0\le m_j\le m-2$．すなわち，
$m_*\underset{def}{=}\max m_j$ とするとき，$m_*\le m-2$.

次に，楕円型境界値問題と同じく，Lopatinski - Shapiro 行列（LS 行列）を導入する．まず

$$(1.5)\qquad P^+(\xi,\zeta)\underset{def.}{=}\prod_{j=1}^{\mu^+}(\xi-\xi_j^+(\zeta))$$

$$=P_\mu^+(\zeta)\xi^\mu+\cdots+P_1^+(\zeta)\xi+P_0^+(\zeta)$$

とおく．$B_j(\xi,\zeta)$ を ξ の多項式として $P^+(\xi,\zeta)$ で割り，商を S_j，剰余を B_j' とする．i.e.

$$(1.6)\qquad B_j(\xi,\zeta)=S_j(\xi,\zeta)P^+(\xi,\zeta)+B_j'(\xi,\zeta)$$

ただし

$$B_j'(\xi,\zeta)=\sum_{k=0}^{\mu^+-1}B_{j,k}'(\zeta)\xi^k,\quad S_j(\xi,\zeta)=\begin{cases}\sum_{h=0}^{m_j-\mu^+}S_{j,h}(\zeta)\xi^h & (m_j\geq\mu^+)\\ 0 & (m_j<\mu^+)\end{cases}$$

定義. $\{B'_{j,k}(\zeta)\ ;\ j,k=0,1,\cdots,\mu-1\} = B'(\zeta)$ を LS行列といい，行列式を LS行列式といい $R(\zeta)=\det B'(\zeta)$ とする. $B'(\zeta)$の逆行列を $A(\zeta)=\{A_{j,k}(\zeta)\}$ とする.

函数空間 $H_{s;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$, $H_{s,t;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_{+})$, $H_{s;\gamma}(\mathbb{R}^{n})$ は常用のものである. $\tau=\sigma-i\gamma$ (σ,γ実) とするとき, $P(\xi,\eta,\sigma-i\gamma)\neq 0$, ξ,η,σ実, $\gamma>\gamma_0$ である. Fourier-Laplace変換を

$$\hat{u}(\xi,\eta,\sigma-i\gamma) \underset{def}{=} \widehat{e^{-\gamma t}u}(\xi,\eta,\sigma)$$

で定義するとき, $u\in H_{s,t;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})$, $v\in H_{s;\gamma}(\mathbb{R}^{n})$に対し

$$\|u|^2_{s,t;\gamma} = \iiint (|\xi|^2+|\eta|^2+\sigma^2+\gamma^2)^s(|\eta|^2+\sigma^2+\gamma^2)^t|\hat{u}(\xi,\zeta)|^2 d\xi d\eta d\sigma$$

$$\langle v\rangle^2_{s;\gamma} = \iint (|\eta|^2+\sigma^2+\gamma^2)^s\ |\hat{v}(\eta,\tau)|^2 d\eta d\sigma$$

で定義し, $H_{\infty;\gamma} = \bigcap_{s>0} H_{s;\gamma}$ とおく.

2. 結果.

結果をのべるのに必要な指数を導入する.

$P_{m-1}(\zeta)$は1階双曲型の多項式だからτを含む. $P_{m-2}(\zeta),\cdots,P_0(\zeta)$を$\tau$の多項式として割った剰余を $P'_{m-2}(\eta),\cdots,P'_0(\eta)$ とする. 一般に $\deg_\eta P'_{m-j}(\eta)=j$ である. $\deg_\eta P'_{m-j}(\eta)<j$ $j=1,2,\cdots,j'$となる最大のj'をℓとする. ($1\le\ell\le m$).

$$\nu = \begin{cases} 1/\ell & \cdots\ 1\le\ell\le m-1 \text{ のとき} \\ 0 & \cdots\ \ell=m \text{ のとき}\end{cases}$$

と定義する.

さて, 十分大きい正数 γ_1 が存在して, $\gamma \geqslant \gamma_1$ となる任意の γ について, 境界値問題 (1.1) が $f \in H_{\infty;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $g_j \in H_{\infty;\gamma}(\mathbb{R}^n)$ に対し, 仮定 (P1) (もっと弱くてもよい), (P2), (B1) のもとで一意に解 $u \in H_{\infty;\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ が存在することは次の条件

$$(2.1)\qquad R(\zeta) \neq 0 \quad , \quad \zeta = (\eta, \tau) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{\mathrm{Im}\,\tau < -\gamma_1\}$$

と同値であることがわかっている. (発展型境界値問題) [ ]

双曲型境界値問題になるためには更に,

$$(2.2)\qquad \tilde{R}^0(0,1) \neq 0 \qquad (\tilde{R}^0 \text{ は } R \text{ の主要項})$$

が必要である. ([4], [7]). $\tilde{R}^0$ は主要項 P^0, B_j^0 の LS 行列式と必ずしも一致しないが, ここでは簡単のため一致する場合に相当する場合を考える. (条件 L_θ として以下にかく).

<u>主結果</u>. (P1), (P2), (B1), (B2) および

$$(L_\theta)\qquad |A_{k,j}(\zeta)| \leqslant \frac{C|\zeta|^{k-b_j+\theta}}{|\mathrm{Im}\,\tau|^\theta} \quad , \quad \zeta = (\eta,\tau) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{\mathrm{Im}\,\tau < -\gamma_1\}, \ \theta \geqslant 0$$

を仮定する. 解 u は次の評価式をみたす:

<u>$\mu^+ = m-1$ のとき</u>

$$(2.3)\qquad \gamma |u|^2_{m-1;\gamma} + \sum_{k=0}^{m-2} \langle \gamma_k u \rangle^2_{m-1-k;\gamma} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\frac{1}{\gamma}|f|^2_{0;\gamma} + \frac{1}{\gamma^{2\theta}} \sum_{j=0}^{\mu-1} \langle g_j \rangle^2_{m-1-b_j+\theta;\gamma}\right)$$

$1\le\mu^+\le m-2$ のとき　　$\alpha(k)=(k-\mu^+)\nu+\min\{\mu^+\nu,1\}$ とおく．

(2.4)
$$\gamma^{1+2\alpha(m-2)}|u|^2_{m-1,-\alpha(m-2);\gamma}+\sum_{k=0}^{\mu^+-1}\langle\gamma_k u\rangle^2_{m-1-k;\gamma}+$$
$$+\sum_{k=\mu^+}^{m-2}\gamma^{2\alpha(k)}\langle\gamma_k u\rangle^2_{m-1-k-\alpha(k);\gamma}\le$$
$$\le\frac{C}{\gamma^{2\theta}}\left\{\frac{|f|^2_{0,\theta+m_*+1;\gamma}}{\gamma^{1+2(m_*+1)}}+\sum_{j=0}^{\mu^+-1}\langle g_j\rangle^2_{m-1-b_j+\theta;\gamma}\right\}.$$

とくに，$m_*=\mu-1$ (i.e. B_j の D_x に関する階数が高々 $\mu-1$)のとき，

(2.5)
$$(2.4)\text{の左辺}\le\frac{C|f|^2_{0,\max\{\mu^+\nu,1\};\gamma}}{\gamma^{1+2\max\{\mu^+\nu,1\}}}+\frac{C}{\gamma^{2\theta}}\sum_{j=0}^{\mu^+-1}\langle g_j\rangle^2_{m+b_j+\theta;\gamma}$$

非特性境界の場合と比べてみよう．(L_θ) から非特性なら

(2.6)
$$\gamma|u|^2_{m,-1;\gamma}+\sum_{k=0}^{m-1}\langle\gamma_k u\rangle^2_{m-1-k;\gamma}\le$$
$$\le\frac{C}{\gamma^{2\theta}}\left\{\frac{|f|^2_{0;\gamma}}{\gamma}+\sum_{j=0}^{\mu^+-1}\langle g_j\rangle^2_{m-1-b_j+\theta;\gamma}\right\}$$

が導かれ ([1],[6])，これが(2.4)に対応する．(2.6)と比べると(2.4)の評価は接方向 $\mathbb{R}^n_{y,t}$ に損をしている．ν に依存するが，$\nu=0$ のときでも(2.5)から得られるのは

(2.7)
$$\gamma|u|^2_{m-1;\gamma}+\sum_{k=0}^{m-2}\langle\gamma_k u\rangle^2_{m-1-k;\gamma}\le$$
$$\le C\left\{\frac{|f|^2_{0,1;\gamma}}{\gamma^3}+\frac{1}{\gamma^{2\theta}}\sum_{j=0}^{\mu^+-1}\langle g_j\rangle^2_{m-1-b_j+\theta;\gamma}\right\}$$

であって，$|f|$ の接方向に1損がある．一方，$\mu^+=m-1$ のときは損はない．

Majda - Osher [3] は変数係数 1階対称双曲系として狭双曲系の直和に相当するものの特性境界値問題 $Lu = F$, $v^{I} = S v^{II} + g$ $(\gamma u = {}^{t}(z, v^{I}, v^{II})$, $v = (v^{I}, v^{II})$ は非特性部分) を考察して一様Lopatinski条件 (Kreiss 条件) のもとで

$$(2.8) \qquad \gamma |u|^2_{0;\gamma} + \langle v \rangle^2_{0;\gamma} \leq C\left(\frac{1}{\gamma}|F|^2_{0;\gamma} + \langle g \rangle^2_{0;\gamma}\right)$$

を得た。1階対称のため損がない。高次の評価式では損が表面化する。(詳しくは [3] p622. Th.3)

我々の評価の改善は一般的には難しいと思われるが，たとえば特性根 $\xi^{\pm}_{j}(\zeta)$ の挙動に制限をつけて損の少いクラスをとり出すことは次の課題である。

3. 例.

仮定 (P1) (P2) をみたす作用素の例と特性根を与えよう。

(i) 自明な例として $a = (a_1, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ とするとき

$P(D) = a \cdot D_y + D_t = a_1 D_{y_1} + \cdots + a_{n-1} D_{y_{n-1}} + D_t$, $\mu^+ = \mu^- = 0$

で境界条件は必要ない。単独1階ではおもしろくない。

(ii) $P(D) = D_t^2 + 2 D_t D_x - D_y^2$ $\quad \mu^+ = 1, \ \mu^- = 0, \ \nu = 1.$

$\xi^+(\zeta) = \dfrac{\eta^2 - \tau^2}{2\tau}$ (久保田氏に教えて頂いた例)

(iii) $P(D) = D_t^2 + 2(D_t D_y + D_y D_x + D_x D_t)$, $\mu^+ = 1, \ \mu^- = 0$

$\nu = 1, \quad \xi^+(\zeta) = \dfrac{-\tau^2 - 2\tau\eta}{2\eta + 2\tau}$

(iv) $P(D) = D_t(D_t^2 - D_y^2 - D_x^2)$, $\mu^+ = \mu^- = 1$, $\nu = 0$

$\xi^\pm(\zeta) = \pm {}^+\sqrt{\tau^2 - \eta^2}$, $|\xi^\pm(\zeta)| = O(|\zeta|)$.

(v) $P(D) = D_t(D_t^2 - D_y^2 - D_x^2) + \frac{2}{3} D_y^2 D_x$, $\mu^+ = \mu^- = 1$,

$\nu = 1$, $\xi^\pm(\zeta) = \left\{ \frac{\eta^2}{3} \pm {}^+\sqrt{\eta^4/9 + \tau^2(\tau^2 - \eta^2)} \right\} / \tau$.

$|\xi^+(\zeta)| = O(|\zeta|^2 / |\mathrm{Im}\,\tau|)$, $|\xi^-(\zeta)| = O(|\zeta|)$.

(vi) $P(D) = D_t(D_t^2 - D_y^2 - D_x^2) + \frac{1}{3} D_y^3$, $\mu^+ = \mu^- = 1$,

$\nu = 1/2$, $\xi^\pm(\zeta) = \pm \sqrt{-\eta^2 + \tau^2 + \frac{1}{3}\eta^3/\tau}$,

$$|\xi^\pm(\zeta)| = O\left(\frac{|\zeta|^{1+1/2}}{|\mathrm{Im}\,\tau|^{1/2}} \right).$$

(vii) $P(D) = (D_t^2 + 2D_t D_x - D_y^2)(2D_t^2 + D_x^2 + 4D_t D_x - D_y^2)$

$\mu^+ = 3$, $\mu^- = 0$. $\nu = 1$.

4．方法について．

考えている parameter $\zeta = (\eta, \tau) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \{\mathrm{Im}\,\tau < -\gamma_0\}$ に対しては $P_{m-1}(\zeta) \neq 0$ だから特性根の定義方程式は

$$(4.1) \qquad \xi^{m-1} + \frac{P_{m-2}(\zeta)}{P_{m-1}(\zeta)} \xi^{m-2} + \cdots + \frac{P_0(\zeta)}{P_{m-1}(\zeta)} = 0$$

とかける． $P^0_{m-1}(\eta, \tau) = 0 \iff \tau = \sigma(\eta) \quad (\eta \in \mathbb{R}^{n-1} - \{0\})$ とする．方向 $(\eta, \sigma(\eta))$ において (4.1) の係数が特異になり，特性根が<u>特異になりうる</u>ことが特性境界値問題に特有の事情である．2節で導入した指数 ℓ は特異根の個数に対応するが， $P'_{m-\ell-1} \neq 0$

であっても，$P'_{m-\ell-1}(\eta)$ が実零点をもちうるので，一般には parameter η によって特異根の分岐の様子は変化するであろう．しかし次の評価が成立する．

<u>補題1.</u> 十分大きな正数 γ に対し，C_γ があって，特性根は

(4.2) $$|\xi_j(\zeta)| \le \frac{C_\gamma}{|\mathrm{Im}\,\tau|^{\nu}}|\zeta|^{1+\nu}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^{n-1}_x \times \{\mathrm{Im}\,\tau < -\gamma\}$$

をみたす．($j=1,2,\cdots,m-1$).

<u>補題2.</u> (4.2) のもとで $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_j \le m-1$ とすると

(4.3) $$|\xi_{i_1}(\zeta)\cdots\xi_{i_j}(\zeta)| \le \frac{C_\gamma|\zeta|^{j+\min\{j\nu,1\}}}{|\mathrm{Im}\,\tau|^{\min\{j\nu,1\}}}.$$

<u>補題3.</u> $m_j \ge \mu^+$ のときは

(4.4) $$|S_{j,h}(\zeta)| \le \frac{|\zeta|^{b_j-\mu-h+(m_j-\mu-h)\nu}}{|\mathrm{Im}\,\tau|^{(m_j-\mu^+-h)\nu}}, \quad h=0,1,\dots,m_j-\mu.$$

評価を導く基本方針は次の

<u>命題4.</u> (P1) (P2) のもとで

$$\gamma|u|^2_{m-1;\gamma} \le C\left(\frac{1}{\gamma}|Pu|^2_{0;\gamma} + \sum_{k=0}^{m-2}\langle r_k u\rangle^2_{m-1-k;\gamma}\right)$$

$\langle r_k u\rangle^2_{m-1-k;\gamma}$, $k=0,\dots,m-2$ を評価するため，$r_k u$ を f, g_j で表示する．(Fourier-Laplace変換)．掛算因子 $A_{k,j}(\zeta)$, $S_{j,h}(\zeta)$, $P^+_j(\zeta)$ の評価は (L_θ), 補題2, 3 による．積分核

$$\int_{C^-(\zeta)} \frac{e^{-ix'\xi}\xi^h}{P^-(\xi,\zeta)}\frac{d\xi}{2\pi}$$ の $L^2(\mathbb{R}_x^+)$ 評価が必要となる.

ここで $P(\xi,\zeta)=P^+(\xi,\zeta)P^-(\xi,\zeta)$ であり, $C^-(\zeta)$ は $\{\xi_j^-(\zeta)\}$ を囲む閉路. 命題4と解の表示式から

<u>命題5</u>

$$\int_0^\infty \left| \int_{C^-(\zeta)} \frac{e^{-ix\xi}\xi^h}{P^-(\xi,\zeta)} d\xi \right|^2 dx \leq \frac{C_\gamma |\zeta|^{2\{-m+\mu+1+h+(\mu+\nu+1)\}}}{|\mathrm{Im}\,\tau|^{1+2(\mu+\nu+1)}}$$

ただし $\mu \leq m-2$.

これらからはじめの評価式を得る.

補題1の証明. §2 の ℓ の定義から

$$|P_{m-k}(\zeta)|/|P_{m-1}(\zeta)| \leq C|\zeta|^{k-1}, \quad k=1,2,\ldots,\ell.$$

そこで, $u=|\mathrm{Im}\,\tau|^{1/\ell}|\zeta|^{-1-1/\ell}\xi \quad (1\leq \ell\leq m-1)$, $|\zeta|^{-1}\xi \ (\ell=m)$

と変換すると特性方程式は

$$u^{m-1}+\cdots+c_{m-k}(\zeta)u^{m-k}+\cdots+c_0(\zeta)=0$$

となり $$|c_{m-k}(\zeta)| \leq \begin{cases} C\,(|\mathrm{Im}\,\tau|/|\zeta|)^{k-1/\ell} \leq C, & (2\leq k\leq \ell) \\ C\,(|\mathrm{Im}\,\tau|/|\zeta|)^{(k-1-\ell)/\ell} \leq C & (\ell+1\leq k) \end{cases}$$

だから, 根 u は有界. したがって (4.2) を得る.

補題2の証明. (4.2) $0\leq {}^\exists\nu\leq 1$ としてよい. $\sharp\nu\leq 1$ なら (4.3) は (4.2) の積にすぎない. そこで $\sharp\nu>1$ とする. 簡単のため, $\mathcal{J}^{(j)}=\{I=(i_1,\ldots,i_j)\in \mathbf{N}^j;\ 1\leq i_1<\cdots<i_j\leq m-1\}$ と定義し, 多重添字集合 $\mathcal{J}^{(j)}$ に辞書式順序を入れておく.

$I \in \mathcal{J}^{(j)}$ に対し，$\Xi_I(\zeta) = (-1)^j \xi_{i_1}(\zeta) \cdots \xi_{i_j}(\zeta)$ と定める．1変数 x の多項式 $R(x,\zeta)$ と係数 $r_k(\zeta)$ $\left(0 \le k \le \binom{m-1}{j}-1\right)$ を

$$R(x,\zeta) = \prod_{I \in \mathcal{J}^{(j)}} (x - \Xi_I(\zeta))$$
$$= x^{\binom{m-1}{j}} + r_{\binom{m-1}{j}}(\zeta) x^{\binom{m-1}{j}-1} + \cdots + r_0(\zeta)$$

によって定める．$r_{\binom{m-1}{j}-\ell}(\zeta)$ は $\xi_1(\zeta), \cdots, \xi_{m-1}(\zeta)$ の ℓj 次の斉次対称多項式である．$A_\ell(\zeta)$ を $\xi_1, \cdots, \xi_{m-1}$ の ℓ 次の基本対称式とする．よく知られているように斉重多項式 $G_{j,\ell}(A_1, \cdots, A_{m-1}) = \sum C_\alpha A_1^{\alpha_1} \cdots A_{m-1}^{\alpha_{m-1}}$ が存在して

$$\begin{cases} r_{\binom{m-1}{j}-\ell}(\zeta) = G_{j,\ell}(A_1(\zeta), \cdots, A_{m-1}(\zeta)) \\ \alpha_1 + \cdots + \alpha_{m-1} \le \ell \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + (m-1)\alpha_{m-1} = \ell j. \end{cases}$$

したがって $|r_{\binom{m-1}{j}-\ell}(\zeta)| \le C|\zeta|^{\ell j}(|\zeta|/|\mathrm{Im}\,\tau|)^\ell$．一方，

$$x^p + a_1 x^{p-1} + \cdots + a_p = 0$$

の根の優評価として $\max\{|pa_1|, |pa_2|^{1/2}, \cdots, |pa_p|^{1/p}\}$ があるから，$\Xi_I(\zeta)$ の優評価として $C|\zeta|^j(|\zeta|/|\mathrm{Im}\,\tau|)$ を得る．

5．補足的注意．

評価の改善の可能性をみるため，方針をみなおす．4で触れたように

(5.1) $\quad \gamma_k \hat{u}(\zeta) = \sum_{j=0}^{\mu^+-1} A_{k,j}(\zeta)\hat{g}_j(\zeta) - \sum_{j=0}^{\mu^+-1} A_{k,j}(\zeta) \sum_{h=0}^{m_j-\mu^+} S_{j,h}(\zeta) \times$

$$\times \int_0^\infty \hat{f}(x',\zeta)\,dx' \left(\int_{C^-(\zeta)} \frac{e^{-ix'\xi}\,\xi^h}{P^-(\xi,\zeta)} \frac{d\xi}{2\pi} \right)$$

$k=0,1,\cdots,\mu^+-1$

$$(5.2)\qquad \gamma_{\mu+h}\hat{u}(\zeta) = \int_0^\infty \hat{f}(x',\zeta)\,dx' \left(\int_{C^-(\zeta)} \frac{e^{-ix'\xi}\,\xi^h}{P^-(\xi,\zeta)} \frac{d\xi}{2\pi} \right) - \sum_{j=0}^{\mu^+-1} P_j^+(\zeta)\gamma_{j+h}\hat{u}(\zeta)$$

$h=0,1,2,\cdots$

とかける．命題4の右辺の $\langle \gamma_k u \rangle^2_{m-1-k;\gamma}$ を (5.1)，(5.2) を用いて f，g_j の norm で評価すればよいが，そのとき接方向に"損"があらわれる．原因を列挙する．

① LS逆行列 $A_{k,j}(\zeta)$ から θ の損 ---- 一様 Lopatinski 条件からのずれをあらわす量で条件 (L_θ) に見合っている．

② 商 $S_{j,h}(\zeta)$ から $(m_j-\mu^+-h)\nu$ の損．---- 境界条件の D_x 方向の微分が μ 階以上だと現われる．（補題3）．

③ 積分核 $\int_{C^-(\zeta)} \frac{e^{-ix'\xi}\,\xi^h}{P(\xi,\zeta)} \frac{d\xi}{2\pi}$ から $\mu^+\nu+1$ の損．(命題5)．

④ $P_j^+(\zeta)$ から $\min\{(m-j)\nu, 1\}$ の損（補題2）．

問題になるのは③である．命題5の証明において損の現われ方をみると次のとおりである．

③-(i) 補助問題 $Pu=0$，$\gamma_0 u=\gamma_1 u=\cdots=\gamma_{\mu-2}u=0$，$\gamma_{\mu-1}u=g$ を考える．命題4と (5.2) から

(5.3) $\qquad \gamma^{1+2(m-1-\mu^+)\nu}\,|u|^2_{m-1;\gamma} \leqslant C_\gamma \langle g\rangle^2_{m-\mu+(m-1-\mu^+)\nu;\gamma}$

を得る．(5.2) を反復使用する過程で原因④により損 $(m-1-\mu^+)\nu$ が現われる．

③-(ii) $Pu=0$ から $P^+u=0$ となり u は

(5.4) $$D_x^k\hat{u}(x,\zeta)=\hat{g}(\zeta)\int_{C^+(\zeta)}\frac{e^{ix\xi}\,\xi^k}{P^+(\xi,\zeta)}\frac{d\xi}{2\pi}, \quad x>0$$

とかける．(5.3) に代入して，命題5の $P^-(\xi,\zeta)$ を $P^+(\xi,\zeta)$ におきかえた積分核の評価を得る．損はそのまま伝わって $(m-1-\mu^+)\nu$ である．

③-(iii) $P(\xi,\zeta)$ のかわりに $P(-\xi,\zeta)$ を考え，③-(i),(ii) の考察をあてはめると $\prod_{j=1}^{\mu^-}(\xi-\xi_j^-(\zeta))$ に対する積分核の評価が得られる．$P^-(\xi,\zeta)=P_{m-1}(\zeta)\prod_{j=1}^{\mu^-}(\xi-\xi_j^-(\zeta))$ であるから，$P_{m-1}(\zeta)$ から損1が加わり，$\prod_{j=1}^{\mu^-}(\xi-\xi_j^-(\zeta))$ の方からは $(m-1-(m-1-\mu^+))\nu=(m-1-\mu^-)\nu=\mu^+\nu$ の損，したがって $\mu^+\nu+1$ の損となる．

主結果の (2.4), (2.5) において $|f|$ の norm は $\theta+m_*+1$ あるいは $\max\{\mu^+\nu, 1\}$ の損をしているが，③-(ii) の方法をかえる（命題4を $P^+(D)$, $P^-(D)$ の評価にかえる必要がある）ことができれば改善できる．現在検討中で，その結果，Majda-Osher の結果との比較も明らかなものになるだろう．

文　献

[1] Chazarain et A. Piriou, Caractérisation des problèmes mixtes hyperboliques bien posés, Ann. Inst. Fourier 22 (1972) 193-237

[2] K. Kubota and T. Okubo, On well posedness of mixed problems for Maxwell's equation I, II. Hokkaido Math. Journ. 7 (1978) 142-168, 308-327

[3] A. Majda and S. Osher, Initial-Boundary Value Problems for Hyperbolic Equations with Uniformly Characteristic Boundary, C. P. A. M. 28 (1975) 607-675

[4] R. Sakamoto, $\mathcal{E}$-well posedness for hyperbolic mixed problems with constant coefficients, J. Math Kyoto Univ. 14 (1974) 93-118

[5] Y. Shibata, A characterization of the hyperbolic mixed problems ··· . Publ. RIMS., Kyoto Univ. 15 (1979) 357-399

[6] K. Uchiyama, Caractérisation des Problèmes Mixtes Bien Posés pour des Opérateurs Evolutifs à Coefficients Constants, Tokyo J. Math. 1 (1978) 369-388.

[7] 内山康一，定数係数の混合問題の特徴づけについて 数理研講究録 341 (1978) 153-163

[8] S. Wakabayashi, Propagation of Singularities of the Fundamental Solutions ···, Publ. RIMS. Kyoto Univ., 15 (1979), 653-678.