数理解析研究所講究録
431巻 1981年 83-89

Holonomic system の制限と characteristic variety

京大 数理研　柏原 正樹*)

Holonomic system を subvariety に制限したらその support はどうなるか，という問題を考える．$X \supset Y$ とし，$\mathcal{M}$ を連接 $\mathcal{D}_X$-加群，$\mathcal{M}_Y = \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ をその Y への制限とする．これは $\mathcal{D}_Y$-加群である．

$$\begin{tikzcd} X \times_Y T^*Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "\rho"] & T^*X \\ T^*Y & \end{tikzcd}$$

により射影 ρ を定義する．まず基本的な結果として

<u>定理</u>　非特性的な場合，即ち $Ch(\mathcal{M}) \cap T^*_Y X$ が 0-切断に含まれるとき，$\mathcal{M}_Y$ は連接的で

$$Ch(\mathcal{M}_Y) \subset \rho(Ch(\mathcal{M}) \cap X \times_Y T^*Y)$$

(このとき ρ は $Ch(\mathcal{M})$ の上で有限的写像になり，像は閉集合となる．)

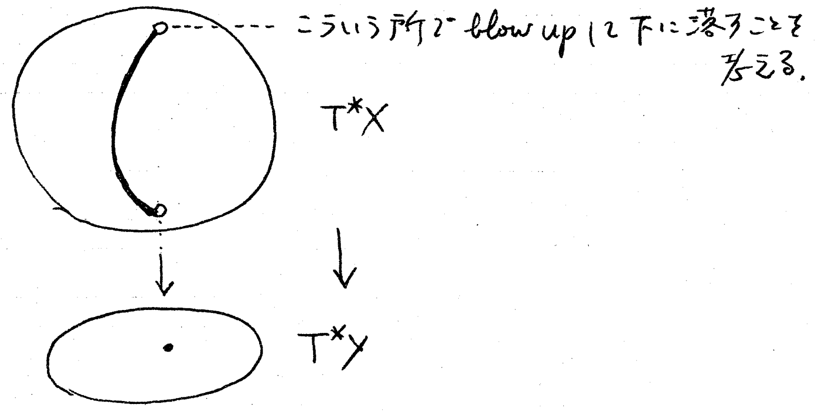
<u>注意</u>　一般には $\mathcal{M}_Y$ は連接的と限らぬ．連接的でない $\mathcal{M}_Y$

*) P. Schapira との共同の仕事．文責・研究代表者．

に対しては，その台を

$$Ch(\mathcal{M}_Y) = \bigcup_{\substack{\mathcal{N}\subset\mathcal{M}_Y \\ \text{coherent}}} Ch(\mathcal{N})$$

で定義する．



Xを複素多様体，$\mathfrak{X}=T^*X$とし，Λをその conic, homogeneous, non-singular な Lagrange多様体とする．$\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(m)$ を $\mathfrak{X}$ 上の m次同次函数の作る層とする．このとき $T_\Lambda X \simeq T^*\Lambda$ とみなせる．実際，

$$\begin{tikzcd}
0 \\
T_\Lambda\mathfrak{X} \arrow[u] & T^*\Lambda \\
T\mathfrak{X} \arrow[u] & T^*\mathfrak{X}/T^*_\Lambda\mathfrak{X} \arrow[l, "H"'] \arrow[u] \\
T\Lambda \arrow[u] \\
0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

において Hamilton写像Hにより $T^*_\Lambda\mathfrak{X}$ と $T\Lambda$ が一対一に対応

することが，Λ が Lagrangean であることと同値である．$\mathcal{E}(m)$ を高々 m 階の擬微分作用素が作る層，$\sigma_m : \mathcal{E}(m) \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(m)$ を主シンボルとする．次のものを導入する．

$$\mathcal{J}_\Lambda = \{ P \in \mathcal{E}(1) \, ; \, \sigma_1(P)|_\Lambda = 0 \}$$

$\mathcal{E}_\Lambda$: $\mathcal{J}_\Lambda$ で生成される $\mathcal{E}$ の部分環

$$\mathcal{E}_{\Lambda, m} = \mathcal{E}(m) \cap \mathcal{E}_\Lambda = \mathcal{J}_\Lambda^m \quad (m \geq 0)$$

$$\tilde{\sigma}_m : \mathcal{E}_{\Lambda, m} \to \mathcal{E}_{\Lambda, m} / (\mathcal{E}_{\Lambda, m-1} + \mathcal{E}_{\Lambda, m+1}\mathcal{E}(-1))$$

また，$J_\Lambda = \{ \varphi \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \, ; \, \varphi|_\Lambda = 0 \}$ とすれば，

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_{\Lambda, m} \arrow[r, "\sigma_m"] \arrow[rr, bend right, "\tilde{\sigma}_m"'] & J_\Lambda^m \cap \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(m) \arrow[r] & J_\Lambda^m / J_\Lambda^{m-1} \cap \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(m) \end{tikzcd}$$

と分解される．最後の項は $T_\Lambda \mathcal{X}$ の二つの $\mathbb{C}$-作用について m 次同次なものとなる．

<u>例</u> $X = \{ (x_1, \cdots, x_n) = (x', x'') \}$, $\quad x' = (x_1, \cdots, x_\ell)$

$$\mathcal{X} = \{ (x, \xi) = (x', x'', \xi', \xi'') \}$$

$$\Lambda = \{ (x, \xi) \, ; \, x' = \xi'' = 0 \}$$

$$T_\Lambda \mathcal{X} = \{ (x, \xi) = (\underbrace{(0, x'', \xi', 0)}_{\text{基底点}} \, ; \, \underbrace{(x', 0, 0, \xi'')}_{\text{法線ベクトル}}) \} \quad \left(= x' \frac{\partial}{\partial x'} + \xi'' \frac{\partial}{\partial \xi''} \right)$$

を考える．このとき

$\mathcal{E}_\Lambda = \{ P \in \mathcal{E} \, ; \, P = \sum P_j(x, D)$，各 P_j $(j \geq 1)$ は Λ で j 重に消える$\}$

$\tilde{\sigma}_m : \mathcal{E}_{\Lambda, m} \ni P \longmapsto \underset{m\text{次の項}}{P_m \text{ の } (x', \xi'') \text{ に関する Taylor 展開の}}$

となる. $\tilde{\sigma}_m(P)$ は (ξ', ξ'') と (x', ξ'') についてそれぞれ m 次の $T_\Lambda \mathfrak{X}$ 上の函数である.

<u>定義</u> 連接 $\mathcal{E}$-加群 $\mathcal{M}$ に対して $Ch_\Lambda(\mathcal{M})$ を次のように定める: $\mathcal{M} = \mathcal{E}u$ のとき

$$Ch_\Lambda(\mathcal{M}) = \{ q \in T_\Lambda \mathfrak{X} \,;\, Pu = 0 \text{ を満たす } {}^\forall P \in \mathcal{E}_{\Lambda, m},\ {}^\forall m \geq 0 \text{ に対して } \tilde{\sigma}_m(P)(q) = 0 \}$$

一般に $\mathcal{M} = \mathcal{E}u_1 + \cdots + \mathcal{E}u_N$ のとき

$$Ch_\Lambda(\mathcal{M}) = \bigcup_{j=1}^{N} Ch(\mathcal{E}u_j)$$

この概念は filtration を用いても, 或はミクロ微分作用素を使っても定義可能である.

次に

$\mathfrak{X} = \mathring{T}^*X = T^*X - 0$ 切断

$X \supset Y$ 部分多様体

$\Lambda = T^*_Y X \cap \mathfrak{X} \longrightarrow Y$

という状況を考える. 射影 ρ, p を

$$\begin{array}{ccc} \mathring{T}^*X \supset Y \underset{X}{\times} \mathring{T}^*X - \Lambda \\ \downarrow \rho \\ \mathring{T}^*Y \end{array} \qquad \begin{array}{c} \mathring{T}_\Lambda \mathfrak{X} \simeq \mathring{T}^*\Lambda \supset \Lambda \underset{Y}{\times} T^*Y \\ \searrow p \qquad \downarrow \\ \mathring{T}^*Y \end{array}$$

により定める.

<u>定理1</u> $\mathcal{M}$ が連接 $\mathcal{D}_X$-加群のとき

$$\mathring{T}^*Y \cap Ch(\mathcal{M}_Y) \subset \rho\,(Ch(\mathcal{M}) \cap (Y \underset{X}{\times} T^*X - \Lambda)) \cup p\,(Ch_\Lambda(\mathcal{M}))$$

右辺の集合は閉じていることに注意．実際

$$\left(Y \underset{X}{\times} T^*X - \Lambda\right) \cup T_\Lambda \mathfrak{X} \supset Ch(\mathcal{M}) \cup Ch_\Lambda(\mathcal{M})$$
$$\downarrow$$
$$T^*Y$$

において射影化を行えば，固有写像になる．

具体的な計算は（普通の characteristic variety のときより更に）大変であるが，簡単にわかる場合もあるので以下それを述べよう．一般に $X \supset Y$，smooth とし，部分集合 $Z \subset X$ に対して集合 $C_Y(Z) \subset T_Y X$ を次のように定める：適当に座標を入れて $X \subset \mathbb{R}^n$ $(\subset \mathbb{C}^n)$ とするとき，

$$C_Y(Z) = \bigcup_{x \in Y} \{ v \in T_x X / T_x Y \;;\; v = \lim a_n(x_n - y_n)，\text{ここに } a_n \in \mathbb{R},\ y_n \in Y,\ x_n \in Z \text{ で } y_n \to y,\ x_n \to x \}$$

例えば $Y = \{x' = 0\}$ なら

$$C_Y(Z) = \{ (x', x'') \;;\; {}^\exists x_\nu \in Z,\ a_\nu x_\nu' \to x' \}$$

<u>定理2</u>　$\mathcal{M}$ が確定特異点を持ったホロノミー系ならば

$$Ch_\Lambda(\mathcal{M}) = C_\Lambda(Ch(\mathcal{M})) \subset T_\Lambda \mathfrak{X}$$

となる．（$Ch(\mathcal{M}) \subset \mathfrak{X}$ である．）

<u>応用例</u>　f を正則函数とし $\mathcal{M} = \mathcal{D} f^\lambda$ とおくとき

$$Ch(\mathcal{M}) \subset \{ (x, \xi) \;;\; {}^\exists x_\nu \to x,\ {}^\exists c_\nu \in \mathbb{C},\ c_\nu f(x_\nu) \to 0,\ c_\nu df(x_\nu) \to \xi \}$$

（λ が generic ならここで等号が成り立つ）

証明 (t,x) 空間の加群として $\mathcal{N}=\mathcal{D}(t+f(x))^\lambda$ とおくと $\mathcal{N}|_{t=0}=\mathcal{D}f^\lambda$ である。そこで次の主張を用いる。

系 $Ch(\mathcal{M}_Y)\subset\{(x'',\xi'')\in T^*Y\,;\ {}^\exists(x_\nu,\xi_\nu)\in Ch(\mathcal{M}),$
$x_\nu'\to 0,\ x_\nu''\to x'',\ \xi_\nu''\to\xi'',\ |x_\nu'||\xi_\nu'|\to 0\}$

この系は定理1と定理2から出る。これを用いると上の例が出る。実際、

$$Ch(\mathcal{N})=\{0\text{-切断}\}\cup\{(t,x,\tau,\xi)\,;\ t+f(x)=0,\ \xi=\tau\,df(x)\}$$

$$Ch(\mathcal{N}_Y)=\{0\text{-切断}\}\cup\{(x,\xi)\,;\ {}^\exists x_\nu\to x,\ \tau_\nu df(x_\nu)\to\xi,$$
$$f(x_\nu)\to 0,\ |f(x_\nu)\tau_\nu|\longrightarrow 0\}$$

定理1の証明は時間が無いので止める。(論文は inventiones にまもなく出る。)

ここで holonomic でない例を少し見てみよう。

$X=\mathbb{C}^n,\ Y=\{x_1=0\},\ \mathcal{M}=\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_XD_2$ のとき、$\{\xi_2=0\}$ である。$\mathcal{M}=\mathcal{D}u$ とするとき $\mathcal{M}_Y=(\mathcal{D}/\mathcal{D}D_2)^{\mathbb{N}}$ と書け、$Ch(\mathcal{M}_Y)\subset\{\xi_2=0\}$.

$\mathcal{M}=\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X(D_2+x_1D_1)$ のときは、

$$0=D_1^j(D_2+x_1D_1)u=(D_2D_1^j+(x_1D_1+j)D_1^j)u$$
$$=(D_2+x_1D_1+j)D_1^ju=0$$

$$\therefore\ (D_2+j)u_j=0$$

よって $\mathcal{M}_Y=\bigoplus_{j\geq 0}\mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X(D_2+j)$, となる。各 u_j は独立なので直和因子はすべて同型である。(感じとしては b-函数の

存在：$\mathcal{E}_{\Lambda,m} \ni \{b(x,D_1,x)+\mathcal{E}_{\Lambda,m+1}(-1)\}u=0$, のようなものが無いと連接的にはならぬようである．

定理2の証明は今のところ大変面倒である．これは次の予想からも出る：

<u>予想</u> $\mathcal{M}$ が確定特異点型を持つホロノミー系のとき，任意の Λ に関して $\mathcal{L}evi$ 条件が成り立つ

ここで $\mathcal{L}evi$ 条件とは次のように定義されるものである：

一般に $\mathcal{E}$-加群 $\mathcal{M}$ に対して次は同値である．

1) $\mathcal{M}$ に含まれる任意の連接的な $\mathcal{E}_\Lambda$-部分加群 $\mathcal{N}$ と，任意の連接的な $\mathcal{E}(0)$-加群 $\mathcal{L}\subset\mathcal{M}$ に対して，$m\gg 0$ のとき

$$\mathcal{J}_\Lambda(\mathcal{N}\cap\mathcal{E}(m)\mathcal{L})=\mathcal{N}\cap\mathcal{E}(m+1)\mathcal{L}$$

2) 上が $\mathcal{M}$ を生成するようなある $\mathcal{N}$, $\mathcal{L}$ について成り立つ．

3) 上が $\mathcal{N}=\mathcal{E}_\Lambda\mathcal{L}$ のとき成り立つ．

<u>定義</u> これらが成り立つとき $\mathcal{M}$ は $\mathcal{L}evi$ 条件を満たすという．

$\mathcal{L}evi$ 条件から定理2の結論が得られる．もう少し弱い予想として次のものがある．

<u>予想</u> 任意の連接 $\mathcal{E}$-加群 $\mathcal{M}$ について，

$$Ch_\Lambda(\mathcal{M})\subset\{\omega=0\} \quad\Rightarrow\quad \mathcal{L}evi\text{ 条件}.$$

ただしこの仮定から制限が連接的とは云えない．