数理解析研究所講究録
431巻 1981年 50-57

無限大に台をもつ超函数

上智大 理工　森本 光生
吉野 邦生

$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$, $\mathbb{D}=[-\infty,+\infty]$ とする. $\mathcal{R}$で, $\mathbb{D}$上のフーリエ超函数の層を表わす。このとき,

(i) $\Gamma(\mathbb{R},\mathcal{R})=\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$上の超函数の空间,

(ii) $\mathcal{R}$は, $\mathbb{D}$上の軟弱層(flabby)

が知られている。故に, 次の定理が成立する。

定理1 制限写像

$$\rho:\ \mathcal{R}(\mathbb{D})\longrightarrow\mathcal{B}(\mathbb{R})$$

は, 全射である.

我々の問題は, (i) ρの核の要素, すなわち, $\pm\infty$にのみ台をもつフーリエ超函数を具体的に構成すること, (ii), $\mathbb{R}$上の超函数 e^x の, ρによる原像を具体的に構成することの二つである。この報告では, 指数函数の合成を何回か積分することにより, このようなフーリエ超函数が求まることを示したい。

§1. 定義 (文献 [5])

$\Omega \subset \mathbb{D} + i\mathbb{R}$ を，開集合として，

(1) $\tilde{\mathcal{O}}(\Omega) := \{ f \in \mathcal{O}(\Omega \cap \mathbb{C})\, ;\, \forall \varepsilon > 0,\ \forall K \subset\subset \Omega,$

$\sup \{ |f(z)|\, e^{-\varepsilon |z|}\, ;\, z \in K \cap \mathbb{C} \} < \infty \}$

とおく．$\tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$ は，FS 空間の構造をもつ．

$\omega \subset \mathbb{D}$ を，開集合として，

(2) $\mathcal{R}(\omega) := \tilde{\mathcal{O}}(\Omega \setminus \omega) / \tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$

とする．ここで，Ω は ω の複素近傍である．(2) の右辺は，Ω に依存しないことが知られている．$\mathcal{R}(\mathbb{D})$ は，FS 空間の構造をもつ．

$\mathcal{R}(\mathbb{D})$ は，双対性によって与えることもできる．いま，$\Omega \subset \mathbb{D} + i\mathbb{R}$ を開集合として，

(3) $\underset{\sim}{\mathcal{O}}(\Omega) = \{ f \in \mathcal{O}(\Omega \cap \mathbb{C})\, ;\, \forall K \subset\subset \Omega,\ \exists \varepsilon > 0,$

$\sup \{ |f(z)|\, e^{\varepsilon |z|}\, ;\, z \in K \cap \mathbb{C} \} < \infty \}$

とおく．$\underset{\sim}{\mathcal{O}}(\Omega)$ は，DFS 空間の位相をもつ．

(4) $\underset{\sim}{\mathcal{O}}(\mathbb{D}) = \lim\mathrm{ind} \{ \underset{\sim}{\mathcal{O}}(\Omega)\, ;\, \Omega \supset \mathbb{D} \}$

とおけば，$\underset{\sim}{\mathcal{O}}(\mathbb{D})$ はまた DFS 空間である．このとき，

<u>定理 2</u> 線形位相空間としての同型

(5) $\mathcal{R}(\mathbb{D}) \cong \underset{\sim}{\mathcal{O}}(\mathbb{D})'$ 共に，FS 空間

が成立する．

§2. パラモドフの結果（文献[4]）

定理1に関して，パラモドフは興味深い定理を証明したので，紹介しておく．

(6) $\Pi = \{ z = x + iy \ : \ |y| < 1 \}$

とおく．φを$\mathbb{R}$上の実数値連続函数で，

(7) $|t-s| \leq 1$のとき，$|\log\varphi(t) - \log\varphi(s)| \leq C$

（Cは，ある定数）なる条件をみたすものとする．

(8) $\mathcal{O}_\varphi(\mathbb{R}+iU) = \{ f \in \mathcal{O}(\mathbb{R}+iU) ; \forall\lambda > 0,$
$\forall K \subset\subset U,$
$\int_{\mathbb{R}+iK} |f(z)|^2 e^{\lambda\varphi(x)} \, dx\,dy < \infty \}$

とおき，

(9) $\mathcal{B}_\varphi = \mathcal{O}_\varphi(\mathbb{R} + i(\Pi \setminus \{0\})) / \mathcal{O}_\varphi(\mathbb{R} + i\Pi)$

と定義する．自然に写像

(10) $\rho_\varphi : \mathcal{B}_\varphi \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbb{R})$

が定義される．

<u>定理3.</u> ρ_φが全射となるための必要十分条件は，

(11) $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-(\pi+\varepsilon)|t|} \, dt < \infty, \quad \forall\varepsilon > 0$

である．

§3. $\{+\infty\}$のみに台をもつフーリエ超函数（文献[2]）

$H_{M,\pi}=\{\zeta=\xi+i\eta\,;\,\xi\geq M,\ |2\xi\eta|\leq\pi\}$

として，次の汎函数Tを考える．

$$(12)\qquad T:\psi\longmapsto\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial H_{M,\pi}}\psi(\zeta)\exp(\exp\zeta^2)\,d\zeta .$$

いま，

$$|\exp(\exp\zeta^2)|=\exp(\exp(\xi^2-\eta^2)\cos 2\xi\eta)$$

に注意する．$\psi\in\underset{\sim}{\mathcal{O}}(\mathbb{D})$に対しては，十分大きな$M>0$をとれば，(12)の右辺は$M\gg 0$に依ることなく定義される．故に，$T\in\underset{\sim}{\mathcal{O}}(\mathbb{D})'$であることが，示せる．$\underset{\sim}{\mathcal{O}}(\mathbb{D})'=\mathcal{R}(\mathbb{D})$（定理2）から，Tは$\mathbb{D}$上のフーリエ超函数である．また，(12)の形より，すべての$a>0$に対し，

$$\operatorname{supp}T\subset[a,+\infty]$$

がわかる．一方，$t>0$のとき，

$$(13)\qquad \langle T_\zeta,\ \zeta e^{-t\zeta^2}\rangle=-\frac{1}{2}\frac{1}{\Gamma(1+t)}\neq 0$$

であるので，Tは，恒等的に0でない．故に，このTは，$\{+\infty\}$のみに台をもつフーリエ超函数である．

この汎函数Tの$\tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}+i(\mathbb{R}\setminus\{0\}))$に属する定義函数Fは，次の式で与えられる（[1]）．

$$(14)\qquad F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial H_{M,\pi}}\frac{\exp(-(z-w)^2)}{z-w}\exp(e^{w^2})\,dw$$

この函数Fについては，次が示せる．

$$A_\varepsilon = [a-\varepsilon, \infty) + i(-\varepsilon, \varepsilon)$$

とおく．

命題1．（i） Fは整函数である．

（ii） $\forall R>0,\ \forall a>0,\ \forall \varepsilon>0,\ 0<\forall r<1,\ \exists C \geqq 0.$

(15) $$|F(z)| \leqq C\exp(-rx^2),\quad z \notin A_\varepsilon,\ |y| \leqq R.$$

（iii） この整函数は，A_ε上で，次の形の評価をもたない．

(16) $$|F(z)| \leqq C\exp(B\exp(\alpha|x|)),\ \exists B>0,\ \exists \alpha>0,\ \exists C \geqq 0.$$

（i），（ii）は，$F(z)$の定義式（14）より容易に示せる．もし，（iii）でいう不等式がA_ε上で成立すれば，フラグメン・リンデレフの定理より，$F \in \tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}+i\mathbb{R})$となり，$T=[F]=0$（$T \neq 0$に矛盾）を得る．

Tのフーリエ・ボレル変換$\tilde{T}$は，次式で与えられる：

(17) $$\tilde{T}(\zeta) = \int_{\partial A_\varepsilon} e^{\zeta z} F(z)\,dz$$

$\tilde{T}(\zeta)$はゼロでない整函数で，次の指数型評価をもつ．

(18) $$|\tilde{T}(\zeta)| \leqq C\exp((-a+\varepsilon)|\mathrm{Re}\,\zeta| + \varepsilon|\mathrm{Im}\,\zeta|)$$

$$(\forall a>0\ \ \forall \varepsilon>0\ ,\ \exists C \geqq 0)$$

証明は，[1]の一般論による．

§4. e^x の $[-\infty, +\infty]$ への拡張（文献[3]）

$\tilde{T}$を，§3で構成した$\{+\infty\}$のみに台をもつフーリエ超函数Tのフーリエ・ボレル変換とする．λを$\tilde{T}(-\lambda) \neq 0$なる数とし，固定する．$(\lambda \neq 0)$

(19) $$F_\lambda(z) = F\left(\frac{z}{\lambda}\right) \Big/ \left(\lambda \tilde{T}(-\lambda)\right)$$

とおく．

<u>命題2</u> $\forall R > 0,\ \forall a > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ 0 < \forall r < \lambda^{-2},\ \exists C \geqq 0,$

(20) $$|F_\lambda(z)| \leqq C \exp(-r x^2), \quad z \notin A_\varepsilon,\ |y| \leqq R$$

いま，次の微分方程式

(21) $$f'(z) - f(z) = F_\lambda(z)$$

を，$\mathbb{C}^\pm = \{z = x + iy\,;\ \pm y > 0\}$ で考える．$\mathbb{C}^\pm$での解は，

$$f_+(z) = e^z \int_{+\infty+iy}^{x+iy} e^{-w} F_\lambda(w)\,dw, \quad y > 0$$

$$f_-(z) = e^z \int_{+\infty+iy}^{x+iy} e^{-w} F_\lambda(w)\,dw, \quad y < 0$$

で与えられる．ここで，積分路は，x軸に平行である．

命題2の評価より次の命題の評価(ii)が得られる．

<u>命題3</u> (i) f_+, f_- はそれぞれ整函数に解析接続できる．

(ii) $\forall R>0,\ \forall\varepsilon>0,\ 0<{}^{\forall}r<\lambda^{-2},\ C\geqq 0$

$$\begin{cases} |f_+(z)|\leqq Ce^{-rx^2}, & \varepsilon\leqq y\leqq R, \quad x\geqq 0 \\ |f_+(z)|\leqq Ce^{-|x|}, & \varepsilon\leqq y\leqq R, \quad x<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} |f_-(z)|\leqq Ce^{-rx^2}, & -\varepsilon\geqq -y\geqq -R, \quad x\geqq 0 \\ |f_-(z)|\leqq Ce^{-|x|}, & -\varepsilon\geqq -y\geqq -R, \quad x<0 \end{cases}$$

(iii) $f_+(z)-f_-(z)=e^z, \quad z\in\mathbb{C}.$

命題3（iii）の証明は，コーシーの積分表示式とF_λの定義式（19）による．

さて，

$$f_0(z)=\begin{cases} f_+(z) & y>0 \\ f_-(z) & y<0 \end{cases}$$

とおけば，$f_0\in\tilde{\mathcal{O}}(\mathbb{D}+i(\mathbb{R}\setminus 0))$であり，$f_0$は$\mathbb{D}$上のフーリエ超函数$E_\lambda=[f_0]$を定める。命題3（iii）より，$E_\lambda$は$e^x$の$[-\infty,+\infty]$への拡張であることがわかる．

文献

[1] Morimoto, M. : Analytic functionals with non compact carrier. Tokyo J. Math., 1, 77-103 (1978)

[2] Morimoto, M., and Yoshino K. : Some examples of analytic functionals with carrier at the infinity.

Proc. Japan Acad., 56A, 357-361 (1980)

[3] Morimoto, M.: An extension of e^x to $[-\infty,\infty]$. Proc. Japan Acad., 56A, 450-454 (1980)

[4] Паламодов, В. П.: От гиперфункций к Аналитическим Функционалам. Доклады Академии Наук СССР 235, 534-537 (1977)

[5] 佐藤幹夫: 超函数の理論, 数学 10, 1-27 (1958).