数理解析研究所講究録
431巻 1981年 15-35

超分布に対する核の理論

東京大学理学部　小松彦三郎

$\mathbb{R}^n$ の開集合 Ω 上の無限回可微分函数 φ は，任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$，任意の $h > 0$ に対して定数 C が存在し（あるいは定数 h，C が存在し）

(1) $$\sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)| \leqq C h^{|\alpha|} M_{|\alpha|}, \quad |\alpha| = 0, 1, 2, \cdots,$$

をみたすとき (M_p) 族（あるいは $\{M_p\}$ 族）の超可微分函数という．ここで正数列 M_p は次の条件をみたすと仮定する：

(M.0) $$M_0 = M_1 = 1 ;$$

(M.1) $$M_p{}^2 \leqq M_{p-1} M_{p+1}, \quad p = 1, 2, \cdots ;$$

(M.2) $$\frac{M_{p+q}}{M_p M_q} \leqq A H^{p+q}, \quad p, q = 0, 1, 2, \cdots ;$$

(M.3) $$\sum_{q=p+1}^{\infty} \frac{M_{q-1}}{M_q} \leqq A p \frac{M_p}{M_{p+1}}, \quad p = 1, 2, \cdots ;$$

(M.4)′ $\left(\dfrac{M_q}{q!}\right)^{\frac{1}{q-1}} \leqq H\left(\dfrac{M_p}{p!}\right)^{\frac{1}{p-1}}, \quad 2 \leqq q \leqq p;$

ここで A および H は p, q によらない定数である．但し条件 (M.2)，(M.3) はそれぞれ次の弱い条件におきかえてもそのまま成立する結果が少くない：

(M.2)′ $M_{p+1} \leqq A H^{p+1} M_p, \quad p = 0, 1, 2, \cdots;$

(M.3)′ $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} < \infty.$

いずれにせよ $s > 1$ に対する Gevrey の数列

(2) $M_p = p!^s$

は以上の条件をすべてみたしている．

$*$ でもって (M_p) または $\{M_p\}$ を表わす．$*$ 族の超可微分函数全体の空間 $\mathcal{E}^*(\Omega)$ およびコンパクト台をもつ函数全体からなる線型部分空間 $\mathcal{D}^*(\Omega)$ はそれぞれ自然な局所凸位相をもつ．

$\mathcal{D}^*(\Omega)$ 上の連続線型汎函数を Ω 上の $*$ 族の超分布という．これら全体の空間を $\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega)$ と書き，$\mathcal{D}^*(\Omega)$ の双対空間としての強位相を与える．

$*$ 族の超可微分函数を用いても任意の開被覆に従属する 1

の分割が作られるので，分布（＝Schwartzの超函数）の理論と同様に，＊族の超分布全体 $\mathcal{D}^{*\prime}$ は自然な制限写像の下で層をなすことが示される．特に超分布の台が定義できる．$\mathcal{E}^{*}(\Omega)$ 上の連続線型汎函数全体 $\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega)$ がコンパクト台をもつ＊族の超分布全体と同一視できることも分布論と同様である．更に台を保つ連続な埋込み

$$
(3) \qquad \begin{array}{ccccc}
\mathcal{D}'(\Omega) & \subset & \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega) & \subset & \mathcal{B}(\Omega) \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\mathcal{E}'(\Omega) & \subset & \mathcal{E}^{*\prime}(\Omega) & \subset & \mathcal{B}_c(\Omega)
\end{array}
$$

がある．ここで $\mathcal{B}_c(\Omega)$ は，Ω の中でコンパクトな台をもつ佐藤超函数全体の空間であり，Ω 上の実解析函数全体の空間 $\mathcal{A}(\Omega)$ に自然な局所凸位相を与えたものの強双対空間と同一視する．

$\{M_p\}$ 族の超分布は C. Roumieu [1] によって，また (M_p) 族の超分布は幾分異った流儀で A. Beurling によって導入された．小松は [2] において超分布に対する二つの構造定理と佐藤超函数としての定義函数の振舞いによりそれぞれの超分布を特徴づける定理を与えた．また [3] において部分多様体に台のある超分布の構造定理と核の定理を得た．更に，[4]，[5]，[6] において陰函数の定理，常微分方程式の解の存在定理および＊族の写像が合成に関

して安定であることを証明し，*族の超可微分多様体論を展開するための準備を行った．

以上をSchwartz超函数論の発展と比較してみる．L. Schwartzの超函数論[7]は1950年と51年に出版された．彼は1950年のコングレスにおいて有名な核の理論[8]を発表した．すぐ後にG. de Rhamは可微分多様体上の分布であるカレントの理論[9]を発表している．もし，I. M. Gelfand－G. E. Šilov [10]の超函数のフーリエ変換の理論をわれわれの理論に加えるならば，われわれは丁度この段階にあったといってよい．

その後Schwartz [11]は局所凸空間に値をもつ可微分函数の理論を展開し，核の理論に対し一つの証明を与えた．更にA. Grothendieckの核型空間の理論[12]を援用し，局所凸空間に値をもつ分布の理論について膨大な研究[13]，[14]を発表している．

ここでは超分布に対し[8]，[11]，[13]に相当する結果が得られたことを報告したい．詳細は[15]として発表する予定であり概略のみを述べる．但し一部の結果は[16]，[17]に発表ずみであるから，これらも参照されたい．

<u>1. 局所凸空間のεテンソル積</u>

[11]，[13]においてSchwartzは有界完備な局所凸

空間 E, F の ε テンソル積 $E\varepsilon F$ の理論を用いている．これは Grothendieck [12] が完備な局所凸空間 E, F の位相テンソル積について得た結果を拡張したものである．これをさらに E, F が列的完備の場合に拡張する．ここで局所凸空間が有界完備とは任意の有界閉集合が完備であることである．

Schwartz は局所凸空間 E, F の ε テンソル積 $E\varepsilon F$ を，$E'_c \times F'_c$ 上の各個連続双線型汎函数であって，E', F' の同程度連続集合の族に関し亜連続（hypocontinuous）なもの全体に，E', F' の同程度連続集合の積上一様収束の位相を与えた局所凸空間と定義した．但し E'_c は，E の凸コンパクト集合上一様収束の位相を与えた双対空間 E' である．Schwartz は E, F が有界完備（完備）なとき，$E\varepsilon F$ が有界完備（完備）であることを証明しているが，同様に E, F が列的完備ならば，$E\varepsilon F$ も列的完備になる．

Grothendieck [12] の ε 位相をもつ代数的テンソル積 $E\otimes_\varepsilon F$ は $E\varepsilon F$ の線型部分空間とみなされる．これが $E\varepsilon F$ の列的稠密集合になるための条件として次の概念を導入する．

A を局所凸空間 E の部分集合とする．$f\in E$ が A の列的極限点とは f に収束する A の元の列が存在することで

ある．Aの列的極限点全体の集合をAの列的極限集合という．Aの列的極限集合がAと一致するとき，Aは列的閉であるという．列的閉集合の族の共通部分は列的閉である．Aを含む最小の列的閉集合をAの列的閉包という．一般にこれはAの列的極限集合より大きな集合になる．

局所凸空間Eが列的近似性（弱列的近似性）をもつとは，$L_c(E, E)$，すなわちEの凸コンパクト集合上一様収束の位相を与えた連続線型写像 $T: E \to E$ 全体の空間において，恒等写像 $1: E \to E$ が有限階連続線型写像全体 $E' \otimes E$ の列的極限集合（列的閉包）に属することであると定義する．

局所凸空間Eが列的近似性（弱列的近似性）をもつならば，任意の局所凸空間Fに対し $E \varepsilon F$ における $E \otimes F$ の列的極限集合（列的閉包）は $E \varepsilon F$ と一致する．特にE，Fが列的完備ならば，$E \varepsilon F$ は $E \otimes_\varepsilon F$ の列的完備化と一致する．

Ω が σ コンパクトかつ距離づけ可能な局所コンパクト空間であるとき，Fréchet空間 $C(\Omega)$ は列的近似性をもつ．これから，列的完備局所凸空間Fに値をもつ Ω 上の連続函数の空間 $C(\Omega ; F)$ は $C(\Omega) \varepsilon F$ と同型であることが導かれる．更に，$E \subset C(\Omega)$ が $C(\Omega)$ より強い

局所凸位相をもつ函数空間であって，Ω の中のコンパクト集合を台とする測度で表現される線型汎函数全体の E'_c における列的閉包が E'_c と一致するならば，$E \varepsilon F$ は次の条件をみたす $f \in C(\Omega ; F)$ 全体の空間と一致する：

(i) 任意の $f' \in F'$ に対し函数 $\langle f(\cdot), f' \rangle$ は E に属する；

(ii) F' の任意の同程度連続集合 A に対し $\{\langle f(\cdot), f' \rangle ; f' \in A\}$ は E の相対コンパクト集合である．

条件 (ii) は，E が半 Montel 空間または F が Schwartz 空間であって，E が De Wilde の空間であるとき (i) の下で自動的にみたされる．

2. 抽象核定理

Grothendieck [12] は E, F が共に (F) 空間または共に完備 (DF) 空間であるとき，一方が Grothendieck 空間（＝核型空間）であれば次の位相同型がなりたつことを証明している：

$$(4)\quad \begin{aligned} (E \varepsilon F)'_\beta &\cong B_\beta(E, F) = B^s_\beta(E, F) \\ &\cong L_\beta(E, F'_\beta) \cong L_\beta(F, E'_\beta) \cong E'_\beta \varepsilon F'_\beta . \end{aligned}$$

ここで E'_β は E の強双対空間，$B_\beta(E, F)$，$B^s_\beta(E, F)$ はそれぞれ $E \times F$ 上の連続，および各個連続双線型汎函数全

体の空間に有界集合の積上一様収束の位相をあたえた局所凸空間，$L_\beta(E, F)$ は有界集合上一様収束の位相をそなえた連続線型写像 $T: E \to F$ 全体の空間を表わす．

これはほぼ Schwartz の核定理の抽象化といえる結果であり，Schwartz [11] の核定理の証明もこれに基づいている．しかし Schwartz の空間 $\mathcal{D}(\Omega)$ およびわれわれの空間 $\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega)$ は (LF) 空間であって直接この定理を適用することはできない．われわれの抽象核定理は次の通りである．

<u>定理 1</u>.

$$E = \varinjlim_{\nu \to \infty} E_\nu, \quad F = \varinjlim_{\nu \to \infty} F_\nu$$

を (F) 空間の増大列の帰納極限として表わされる (LFG) 空間（= 核型 (LF) 空間）および (LF) 空間とする．このとき

$$E \hat{\otimes}_\iota F \cong \varinjlim_{\nu \to \infty} E_\nu \varepsilon F_\nu,$$

$$(5) \qquad (E \hat{\otimes}_\iota F)'_\beta \cong B^s_\beta(E, F)$$

$$\cong L_\beta(E, F'_\beta) \cong L_\beta(F, E'_\beta) \cong E'_\beta \varepsilon F'_\beta.$$

ここで $E \hat{\otimes}_\iota F$ は Grothendieck [12] の帰納位相 ι

をもつテンソル積 $E \otimes F$ の完備化である.

3. ベクトル値超可微分函数

この部分は Schwartz の [11] に相当する. はじめに $\mathcal{E}^*(\Omega)$, $\mathcal{D}^*(\Omega)$, $\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega)$, $\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega)$ 等の位相的性質をしらべ, 特にこれらが弱列的近似性をもつことを示す. 次いで, 列的完備な局所凸空間 F に値をもつ $*$ 族の超可微分函数の空間 $\mathcal{E}^*(\Omega;F)$, $\mathcal{D}^*(\Omega;F)$ 等を自然な同型 $\mathcal{E}^*(\Omega;F) \cong \mathcal{E}^*(\Omega)\varepsilon F$, $\mathcal{D}^*(\Omega;F) \cong \mathcal{D}^*(\Omega)\varepsilon F$ 等がなりたつように定義し, 局所凸位相を入れる.

F 値函数 φ が $\mathcal{E}^*(\Omega;F)$ (あるいは $\mathcal{D}^*(\Omega;F)$) に属するための必要十分条件は任意の $f' \in F'$ に対して $\langle \varphi(\cdot), f' \rangle$ が $\mathcal{E}^*(\Omega)$ (あるいは $\mathcal{D}^*(\Omega)$) に属することが示される. $\mathcal{D}^*(\Omega;F)$ は, 一般に $\mathcal{E}^*(\Omega;F)$ に属する函数であってコンパクト台をもつもの全体より広い空間になる.

4. ベクトル値超分布

これより後は Schwartz [13] に相当する結果である. [13] にならって, 列的完備局所凸空間 F に値をもつ $*$ 族の超分布の空間を

$$(6) \qquad \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega;F) = L_\beta(\mathcal{D}^*(\Omega), F)$$

によって定義する. これは $\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega)\,\varepsilon\, F$ と同型である.

一般に $\mathcal{G}$ が超分布の空間, 即ちある $\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega)$ の線型部分空間であって, $\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega)$ からの相対位相より強い局所凸位相をもつ空間とする. このとき F に値をもつ $\mathcal{G}$ 型の超分布を

$$(7) \qquad \mathcal{G}(F) = \mathcal{G}\,\varepsilon\, F$$

によって定義する. 特に $\mathcal{G} = \mathcal{E}^{*}(\Omega)$, $\mathcal{D}^{*}(\Omega)$ 等のときこれは以前の定義と一致する.

かなり多くの F, $\mathcal{G}$ に対し, $f \in \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega; F)$ が $\mathcal{G}(F)$ に属するのは, 任意の $f' \in F'$ に対して $\langle f, f' \rangle \in \mathcal{G}$ となることであることが示される.

連続線型写像の ε テンソル積を用いて, ベクトル値超分布に対しても函数との積, 微分, 畳み込み等スカラー値超分布に対するものと同じ演算が定義できる.

また, スカラー値超分布の二つの構造定理が局所的に有界なベクトル値超分布にまで拡張できる. ここで $f \in \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega; F)$ が有界とは f が $\mathcal{D}^{*}(\Omega)$ のある 0 の近傍を F の有界集合にうつすこと, 局所有界とは任意の相対コンパクト開集合 $\Omega_1 \subset \Omega$ への制限 $f|_{\Omega'}$ が有界であることである.

定理2. $f \in \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega; F)$ が局所有界であるための必要十分条件は，任意の相対コンパクト開集合 Ω_1 への制限が，

(8) $\{ H_{|\alpha|} M_{|\alpha|} f_\alpha(x) ; x \in \bar{\Omega}_1, |\alpha| = 0, 1, \cdots \}$

が F において有界になるような $\bar{\Omega}_1$ 上の F 値連続函数 f_α を用いて

(9) $$f|_{\Omega_1} = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} D^\alpha f_\alpha$$

と表わされることである. 但し，H_p は $* = (M_p)$ のとき（$* = \{M_p\}$ のとき）

(10) $H_p = h^p,\ h > 0\ (h_1 h_2 \cdots h_p,\ 0 < h_p \nearrow \infty)$

で定義されるある数列である.

定理3. $f \in \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega; F)$ が局所有界であるための必要十分条件は，任意の $\Omega_1 \subset\subset \Omega$ への制限が，$\bar{\Omega}$ 上の F 値連続函数 $g(x)$ と $*$ 族の定数係数超微分作用素 $P(D)$ を用いて

(11) $$f|_{\Omega_1} = P(D) g$$

と表わされることである.

これら二つの定理の証明は，$\mathcal{D}^*(\Omega)$ が grothendieck

であることを用いてスカラー値の場合に帰着させる．

定理 4．＊族の F 値超分布 f が 0 にのみ台をもつための必要十分条件は

$$(12) \qquad f(x) = \sum_{\alpha} D^{\alpha}\delta(x) \otimes f_{\alpha}$$

と表わされることである．ここで f_{α} は，F 上の任意の連続半ノルム q に対して（10）の数列 H_p および定数 C があって　$q(f_{\alpha}) \leqq C/(H_{|\alpha|}M_{|\alpha|})$ となる F の元の列である．

この定理の証明はスカラー値の場合の証明［3］と同様に Paley－Wiener 型の定理を用いる．

5．核定理

Ω'，Ω'' をそれぞれ $R^{n'}$，$R^{n''}$ の開集合とする．［3］で得られた核定理は，

$$(13) \qquad T\varphi(y) = \int_{\Omega'} \varphi(x)\, k(x, y)\, dy,$$

すなわち

$$\langle T\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi \otimes \psi, k \rangle, \quad \psi \in \mathcal{D}^{*}(\Omega''),$$

という対応の下で，位相的な同型

$$(14) \qquad L_{\beta}(\mathcal{D}^{*}(\Omega'), \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega'')) \cong \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega' \times \Omega'')$$

がなりたつというものである．

これは［3］で証明された位相的同型

$$\mathcal{D}^*_{K'}\,\varepsilon\,\mathcal{D}^*_{K''} \cong \mathcal{D}^*_{K'\times K''}$$

と§2の抽象核定理から直ちに従う．

連続線型写像 T の族を制限すれば，対応する核超分布 K も小さい族に入る．（13）の対応の下で次の位相的同型がなりたつ．

<u>定理 5</u>（正則化核）

$$(15)\qquad L_\beta(\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega'),\ \mathcal{E}^*(\Omega'')) \cong \mathcal{E}^*(\Omega'\times\Omega'').$$

<u>定理 6</u>（y に関する半正則核）

$$(16)\qquad \begin{aligned} &L_\beta(\mathcal{D}^*(\Omega'),\ \mathcal{E}^*(\Omega'')) \cong \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega')\,\varepsilon\,\mathcal{E}^*(\Omega'') \\ &\cong \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega';\ \mathcal{E}^*(\Omega'')) \cong \mathcal{E}^*(\Omega'';\ \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega')). \end{aligned}$$

<u>定理 7</u>（x に関する半正則核）

$$(17)\qquad \begin{aligned} &L_\beta(\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega'),\ \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega'')) \cong \mathcal{E}^*(\Omega')\,\varepsilon\,\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega'') \\ &\cong \mathcal{E}^*(\Omega';\ \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega'')) \cong \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega'';\ \mathcal{E}^*(\Omega')). \end{aligned}$$

<u>定理 8</u>（コンパクト化核）

$$(18)\qquad L_\beta(\mathcal{E}^*(\Omega'),\ \mathcal{E}^{*\prime}(\Omega'')) \cong \mathcal{E}^{*\prime}(\Omega')\,\varepsilon\,\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega'').$$

右辺の核の空間は線型空間としては $\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega' \times \Omega'')$ と一致し，$* = (M_p)$ のときは位相的にも同型である．しかし，$* = \{M_p\}$ のときは，$\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega' \times \Omega'')$ は $\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega') \hat{\otimes}_\iota \mathcal{E}^{*\prime}(\Omega'')$ と同型であり，$\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega') \varepsilon \mathcal{E}^{*\prime}(\Omega'')$ より真に強い位相をもつ．

<u>定理9</u>（y に関する半コンパクト核）

$$(19) \quad L_\beta(\mathcal{D}^*(\Omega'), \mathcal{E}^{*\prime}(\Omega'')) \cong \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega') \varepsilon \mathcal{E}^{*\prime}(\Omega'').$$

$k \in \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega' \times \Omega'')$ が右辺の核の空間に属するための必要十分条件は射影 $\mathrm{supp}\, k \longrightarrow \Omega'$ がきれい（proper）であることである．

<u>定理10</u>（x に関する半コンパクト核）

$$(20) \quad L_\beta(\mathcal{E}^*(\Omega'), \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega'')) \cong \mathcal{E}^{*\prime}(\Omega') \varepsilon \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega'').$$

$k \in \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega' \times \Omega'')$ が右辺に属するための必要十分条件は射影 $\mathrm{supp}\, k \rightarrow \Omega''$ がきれいであることである．

以上では線型写像 T の連続性を仮定したが，T が核 $k(x, y) \in \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega' \times \Omega'')$ を用いて (13) の形に表わされる写像であることがわかっているときは T が左の空間を右の空間にうつしさえすれば，連続性は自動的になりたつ．

また，定理 5 〜 10 を組合せた結果もなりたつ．例えば，

$k(x, y) \in \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega' \times \Omega'')$ が定理6，7，9，10 のいずれの核の空間にも属するための必要十分条件は，それが $\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega') \varepsilon \mathcal{D}^{*}(\Omega'')$，$\mathcal{D}^{*}(\Omega') \varepsilon \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega'')$，$\mathcal{E}^{*\prime}(\Omega') \varepsilon \mathcal{E}^{*}(\Omega'')$，$\mathcal{E}^{*}(\Omega') \varepsilon \mathcal{E}^{*\prime}(\Omega'')$ の共通部分に含まれることである．

6．局所凸層の ε テンソル積

定理8～10 の核は台に対する制限によって定まるのに対し，定理5～7 の核は正則性によって特徴づけられる．これが局所的な性質であることを示すため，次の概念を導入する．

位相空間 X 上の線型空間の層 $\mathcal{F}$ は各開集合 U 上の $\mathcal{F}(U)$ が局所凸位相をもち次の条件をみたすとき局所凸層という：

(i) 制限写像 $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$，$U \supset V$，は連続である；

(ii) $\{V_i\}$ が開集合 U の開被覆であるとき，$f \mapsto (f|_{V_i})$ によって $\mathcal{F}(U)$ は位相的に $\prod \mathcal{F}(V_i)$ に埋込まれる．

局所凸層 $\mathcal{F}$ は，各 $\mathcal{F}(U)$ が完備（有界完備，列的完備）であるとき，完備（有界完備，列的完備）という．

超可微分函数の層 $\mathcal{E}^{*}$ および超分布の層 $\mathcal{D}^{*\prime}$ は完備

局所凸層である.

定理11. $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ をそれぞれ局所コンパクト空間 X, Y 上の局所凸層とすれば, 任意の開集合 $U\subset X$, $V\subset Y$ に対し

$$(21)\qquad (\mathcal{F}\varepsilon\mathcal{G})(U\times V)=\mathcal{F}(U)\varepsilon\mathcal{G}(V)$$

となる $X\times Y$ 上の局所凸層 $\mathcal{F}\varepsilon\mathcal{G}$ が唯一つ存在する. このとき $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ が共に完備(有界完備, 列的完備)ならば, $\mathcal{F}\varepsilon\mathcal{G}$ もそうである.

これを局所凸層 $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ の ε テンソル積という.

これにより定理6, 7の核はそれぞれ $\mathbb{R}^{n'}\times\mathbb{R}^{n''}$ 上の局所凸層 $\mathcal{D}^{*\prime}_x\varepsilon\mathcal{E}^*_y$, $\mathcal{E}^*_x\varepsilon\mathcal{D}^{*\prime}_y$ の切り口であることがわかる.

定理12. Ω を $\mathbb{R}^{n'}\times\mathbb{R}^{n''}$ の開集合とする. $a(x,y)\in\mathcal{E}^*(\Omega)$ ならば, a を乗ずる演算は $\mathcal{D}^{*\prime}_x\varepsilon\mathcal{E}^*_y$ からそれ自身への連続層準同型である.

更に, $(a(x,y), k(x,y))\mapsto a(x,y)k(x,y)$ は $\mathcal{E}^*(\Omega)\times\mathcal{D}^{*\prime}_x\varepsilon\mathcal{E}^*_y(\Omega)$ から $\mathcal{D}^{*\prime}_x\varepsilon\mathcal{E}^*_y(\Omega)$ への亜連続双線型写像である.

$\mathcal{F}$ を局所コンパクト空間 X 上の局所凸層, U を $X\times\mathbb{R}^n$ の開集合, V を U の X への射影とする. $f(\xi,x)$

が $\mathcal{F}\,\varepsilon\,\mathcal{D}^{*\prime}(U)$ の元であり射影 $\operatorname{supp} f \to V$ がきれいならば，積分

$$\int f(\xi, x)\,dx \quad \in \quad \mathcal{F}(V)$$

が定義できる．これを用いて Schwartz [8]，[13] と同様に核の合成等を論ずることができる．

7．超微分作用素

$\mathcal{F}$，$\mathcal{G}$ を超可微分函数の局所凸層 $\mathcal{E}^*$ または超分布の局所凸層 $\mathcal{D}^{*\prime}$ とする．$T: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上の連続層準同型であるための必要十分条件は，対角線集合 $\Delta = \{(x, x);\ x \in \Omega\}$ に台のある核 $k(x, y) \in \mathcal{F}'_*\,\varepsilon\,\mathcal{G}(\Omega \times \Omega)$ を用いて

$$(22) \qquad T(\Omega_1)\varphi(y) = \int_{\Omega_1} \varphi(x)\,k(x, y)\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{F}(\Omega_1),$$

と表わされることである．ここで $(\mathcal{E}^*)'_* = \mathcal{D}^{*\prime}$，$(\mathcal{D}^{*\prime})'_* = \mathcal{E}^*$ とする．

この条件を表数変換および定理4を用いて具体的に書けば次のようになる．

定理13．$T: \mathcal{E}^* \to \mathcal{D}^{*\prime}$ が開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上の連続層準同型であるための必要十分条件は，次の条件をみたす $a_\alpha(x) \in \mathcal{D}^{*\prime}(\Omega)$ を用いて

$$(23)\qquad (T\varphi)(x) = \sum_{\alpha} a_\alpha(x) D^\alpha \varphi(x), \quad \varphi \in \mathcal{E}^*(\Omega_1),$$

と表わされることである．ここで $a_\alpha(x)$ は，$\mathcal{D}^{*\prime}(\Omega)$ 上の任意の連続半ノルム q に対して (10) の数列 H_p および定数 C が存在し

$$(24)\qquad q(a_\alpha) \leqq C/(H_{|\alpha|} M_{|\alpha|}), \quad |\alpha| = 0, 1, \cdots,$$

をみたす．

<u>定理14</u>．$T: \mathcal{E}^* \longrightarrow \mathcal{E}^*$ が開集合 $\Omega \subset R^n$ 上の連続層準同型であるための必要十分条件は，下の条件をみたす $a_\alpha(x) \in \mathcal{E}^*(\Omega)$ を用いて (23) の形に表わされることである．ここで $a_\alpha(x)$ は $* = (M_p)$ のとき，任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ および $h > 0$ に対し定数 L および C が存在し（$* = \{M_p\}$ のとき，任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ および $L > 0$ に対し定数 h および C が存在し）

$$(25)\qquad \sup_{x \in K} |D^\beta a_\alpha(x)| \leqq \frac{C L^{|\alpha|} h^{|\beta|} M_{|\beta|}}{M_{|\alpha|}}$$

をみたす．

この条件をみたす $a_\alpha(x) \in \mathcal{E}^*(\Omega)$ を係数とする

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha(x) D^\alpha$$

を＊族の超微分作用素という.

連続層準同型 $T: \mathcal{D}^{*\prime} \to \mathcal{D}^{*\prime}$ は＊族の超微分作用素の双対作用素である. 一方, 連続層準同型 $T: \mathcal{D}^{*\prime} \to \mathcal{E}^{*}$ は 0 以外存在しない.

Saarbrücken の E. Albrecht と M. Neumann は定理14が連続性の仮定なしになりたつといっている.

文　献

[1] C. Roumieu, Sur quelques extensions de la notion de distribution, Ann. Ecole Norm. Sup. 77 (1960), 41-121.

[2] H. Komatsu, Ultradistributions, I, Structure theorems and a characterization, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 20 (1973), 25-105.

[3] H. Komatsu, Ultradistributions, II, The kernel theorem and ultradistributions with support in a submanifold, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 24 (1977), 607-628.

[4] H. Komatsu, The implicit function theorem

for ultradifferentiable mappings, Proc. Japan Acad., 55 (1979), A 69–72.

[5] H. Komatsu, Ultradifferentiability of solutions of ordinary differential equations, Proc. Japan Acad., 56 (1980), A 137–142.

[6] 小松彦三郎, 超可微分多様体の局所理論, 超函数と線型微分方程式 VII, 数理解析研究所講究録 410 (1980), 99–107.

[7] L. Schwartz, Théorie des Distributions, Hermann, Paris, 1950–51.

[8] L. Schwartz, Théorie des noyaux, Proc. Internat. Congress Math., Mass. 1950, vol. 1, pp. 220–230.

[9] G. de Rham, Variétés Differentiables, Formes, Courants, Formes Harmoniques, Hermann, Paris, 1955.

[10] I. M. Gel'fand - G. E. Šilov, Generalized Functions, vols. II & III, Phys. Mat. Lit. Moscow, 1958 ロシヤ語.

[11] L. Schwartz, Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles, J. Anal.

Math. 4 (1954-55), 88-148.

[12] A. Grothendieck, Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires, Mem. Amer. Math Soc. No. 16, AMS, Providence, 1955.

[13] L. Schwartz, Théorie des distributions à valeurs vectorielles, Chap. I, Ann. Inst. Fourier, 7 (1957), 1-141.

[14] L. Schwartz, Théorie des distributions à valeurs vectorielles, Chap. II, Ann. Inst. Fourier, 8 (1958), 1-209.

[15] H. Komatsu, Ultradistributions, III, Vector valued ultradistributions and the theory of kernels, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. I に投稿.

[16] 小松彦三郎, Ultradistribution に対する正則化核, 線型微分方程式の超局所解析, 数理解析研究所講究録 355 (1979), 60-71.

[17] 小松彦三郎, グロタンディク空間と核定理, 上智大学数学講究録 No. 9, 上智大学数学教室, 東京, 1981.