数理解析研究所講究録
435巻 1981年 55-71

乱流における散逸構造

名大 工学部 桑原 真二

§1. まえおき

散逸とは一般に大きい運動の形式から小さい運動の形式へ，最終的には熱運動へエネルギーの移行する現象である。散逸関数（単位体積あたりの散逸）は $\frac{1}{2}$（応力×変形速度）であり，したがって粘性率に比例する。そこで乱流においては渦粘性に比例すると考えられる。

乱流ずり流（turbulent shear flow）の中で，みぞの間の Poiseuille 乱流（plane Poiseuille turbulence＝P.P.T.）は種々の乱流機構を包含する，しかも最も単純な流れである。P.P.T. では両壁附近の境界層でつくられた大きい渦が中央部の core flow に放出される。境界層においては強い速度勾配のために，大きい散逸をともなう。core flow においては，放出された渦はもっと小さい渦に遷移し，最後は粘性により消滅する。後者の core flow における散逸過程は乱流特有なものであり，層流にくらべて乱流で散逸が顕著になる原因である。

境界層では壁に接した粘性底層から順次に緩和層（buffer layer），対数層があり，その外に core flow が存在する。

対数層では渦粘性率が壁からの距離に比例し、途中遷移の領域をすぎて，core flowでは渦粘性率一定とみなされる。core flowではゆるい平均流の変化はあるが、乱れは一様，等方的とみなしうる。

粘性には速度の不均一性を平等化する作用があり、たとえば不均一な平行な速度場では，不均一性の方向に垂直で，速度に平行な平面を通しての運動量のやりとりにより、平等化の機構が説明できる。分子粘性では分子個々の運動量が，乱流ではもっと大きい規模の“小さい渦”の運動量がその役割をはたす。そこで小さい渦のふるまいが渦粘性の特性を決定すると考えることができる。

§2. 渦粘性の乱流ミクロ理論

前節にのべたように，core flowでは渦粘性率はほゞ一定であり、それは小さい渦のふるまいでその特性が決定されると考えられる。core flowは空間的にも，時間的にもゆっくり変動する平均流（乱乱マクロ，T-macro）と乱れ（乱流ミクロ，T-micro）が共存し，お互に相互作用をおよぼし合っている。乱れは一様，等方的とみなしてよく，したがって乱れの場をFourier変換によって表わすことができる。乱れのエネルギーは不均一な平均流からも供給されるが，境界

層からの渦の放出による供給が主であると考えうるので，境界層の厚さ δ に対応する波数 k_0 $(\simeq \delta^{-1})$ の附近にエネルギー・スペクトルの極大値があると考えられる。波数空間に T-macro の対応 k_M をもとめれば $k_M \ll k_0$ である。k_M と k_0 の間に k_1 $(k_M \ll k_1 < k_0)$ をとり，これを T-micro と T-macro の境界と考える。これからは $k > k_1$ を小さい渦 $k < k_1$ を大きい渦とよぶことにする。

Fourier 変換された Navier-Stokes (N.-S.) 方程式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) u_\alpha(\boldsymbol{k}, t) = -i\,\Delta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})\, k_\gamma \int u_\beta(\boldsymbol{k}', t)\, u_\gamma(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}', t)\, d^3\boldsymbol{k}' \qquad (2.1)$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}) &= \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / k^2 \\ u_\alpha(\boldsymbol{k}, t) &= \int v_\alpha(\boldsymbol{x}, t)\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, d^3\boldsymbol{x} \end{aligned}\right\} \qquad (2.2)$$

である。ここで $v_\alpha(\boldsymbol{x}, t)$ は乱れの流速，$u_\alpha(\boldsymbol{k}, t)$ はその Fourier 変換である。(2.1) の右辺を input，左辺の $\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}$ を output と考えれば，右辺の"2点同時刻非線形相互作用"は

$$\begin{array}{lcl} \text{input} & & \text{output} \\ \boldsymbol{k}', t & & \\ & \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \longrightarrow & \boldsymbol{k}, t \\ \boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}', t & & \end{array} \qquad (2.3)$$

の形をしている。

もし大きい渦 $(|\boldsymbol{k}| \ll k_1)$ のふるまいが

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu_T k^2\right)u_\alpha(k,t)=\text{非線形相互作用} \tag{2.4}$$

の形で表わされるならば，ν_Tは"渦動粘性率"と考えることができる。(2.1)の右辺を非斉次項とみなして形式的に積分すると

$$u_\alpha(k,t)=-i\Delta_{\alpha\beta}(k)k_\gamma\int_{-\infty}^{t}\int u_\beta(k',t')\,u_\gamma(k-k',t')\,e^{-\nu k^2(t-t')}\,d^3k'\,dt' \tag{2.5}$$

となる。そこで(2.5)における非線形効果は

$$\left.\begin{array}{r} k',t' \\ k-k',t' \end{array}\right\}\xrightarrow{t'=-\infty\sim t} k,t \tag{2.6}$$

の形となる。(2.1)の$u_\gamma(k-k',t)$の所に(2.5)の表式を入れれば

$$\left.\begin{array}{r} k,t \\ \left.\begin{array}{r} k'',t' \\ k-k'-k'',t' \end{array}\right\}\xrightarrow{-\infty\sim t} k-k',t \end{array}\right\}\longrightarrow k,t$$

したがって

$$\begin{array}{lcl} \text{input} & & \text{output} \\ \left.\begin{array}{r} k',t \\ k'',t' \\ k-k'-k'',t' \end{array}\right\} & \xrightarrow{-\infty\sim t} & k,t \end{array} \tag{2.7}$$

の形にまとまる。これを3点2時刻非線形相互作用とよぶことにする。

(2.1) における k' の積分を実行するにあたって原点と k を中心とする半径 k_1 の2球によって k-空間を I, II, II', III に分割する (Fig. 1)。k' は I, II' にあるとき T-macro, II, III にあるとき, T-micro, $k-k'$ は I, II にあるとき T-macro, II', III にあるとき T-micro に属することになる。この分割によって

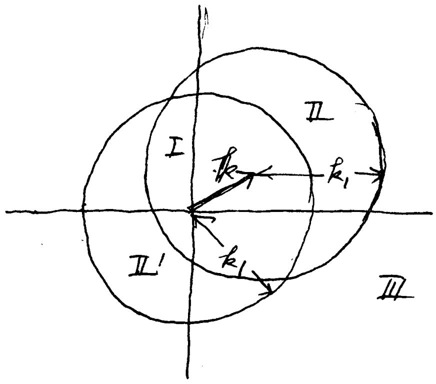


Fig. 1. k-空間の分割

$$
\left.\begin{array}{lcl}
k' \text{ in I} & \Longleftrightarrow & k-k' \text{ in I} \\
k' \text{ in II} & \Longleftrightarrow & k-k' \text{ in II}' \\
k' \text{ in II}' & \Longleftrightarrow & k-k' \text{ in II} \\
k' \text{ in III} & \Longleftrightarrow & k-k' \text{ in III}
\end{array}\right\} \qquad (2.8)
$$

の関係がある。k', $k-k'$ が II 又は II' にあるときは T-micro に属する方を, III にあるときはその一方たとえば k' に (2.5) の表式を入れると

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) u_\alpha(k,t) = -i\,\Delta_{\alpha\beta}(k)\, k_\gamma \Big[& \int_{\mathrm{I}} u_\beta(k',t)\, u_\gamma(k-k',t)\, d^3k' - i \int_{-\infty}^{t} \int_{\mathrm{II}+\mathrm{III}} \int \Delta_{\beta\lambda}(k')\, k'_\mu\, u_\lambda(k'',t') \\
& u_\mu(k'-k'',t')\, u_\gamma(k-k',t)\, e^{-\nu k'^2 (t-t')}\, d^3k''\, d^3k'\, dt' \\
& - i \int_{-\infty}^{t} \int_{\mathrm{II}'} \int \Delta_{\gamma\lambda}(k-k')\,(k_\mu - k'_\mu)\, u_\beta(k',t)\, u_\lambda(k'',t') \\
& u_\mu(k-k'-k'',t')\, e^{-\nu (k-k')^2 (t-t')}\, d^3k''\, d^3k'\, dt' \Big]
\end{aligned} \qquad (2.9)
$$

をうる。

以下の理論の展開のために次の基本的仮定を導入する：

1）T-macro と T-micro の分離は明確にでき，対応する特性時間 t_{mac}, t_{mic} の間には

$$t_{mac} \gg t_{mic} \qquad (2\cdot10)$$

の関係がある。

2）T-macro は一様，T-micro は一様，等方的である。

3）
$$t_{mac} \gg t_{mean} \gg t_{mic} \qquad (2\cdot11)$$

を満足する時間 t_{mean} の間での平均として〈 〉を定義する。

以上の仮定から導かれる2，3の基本的結果をのべる。それぞれ T-macro，T-micro に関連した量 Q, g の積の平均を

$$\langle Q g \rangle \simeq Q(t) \langle g \rangle \qquad (2\cdot12)$$

のように近似する。さらに 2）の T-micro の一様，等方性から 波数空間の2点2時刻速度相関に対して

$$\langle u_\alpha(k,t) u_\beta(k',t') \rangle = \Delta_{\alpha\beta}(k)\, \Phi(k,t,t') \, \delta^3(k+k') \qquad (2\cdot13)$$

が成り立つ。また $Q(k,t)$, $g(k',t)$ をふくむ積分は 1）の仮定から次のように近似する：

$$\int_{-\infty}^{t} Q(k,t')\, g(k',t')\, dt' \simeq Q(k,t) \int_{-\infty}^{t} g(k',t')\, dt' \qquad (2\cdot14)$$

さて $|k| \ll k_1$ を考慮し，(2·12) の近似をもちいると

(2·9) は

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu k^2\right) u_\alpha(k,t) = &-i\,\Delta_{\alpha\beta}(k)\,k_\gamma \int_{\mathrm{I}} u_\beta(k',t)\,u_\gamma(k-k',t)\\
&d^3k' - \int_{-\infty}^{t}\int_{\mathrm{II}} \Delta_{\alpha\beta}(k)\,\Delta_{\beta\lambda}(k')\,k_\gamma\,k'_\mu \langle u_\lambda(k',t')\,u_\mu(k'\\
&-k'',t')\rangle\,u_\gamma(k-k',t)\,e^{-\nu k'^2(t-t')}\,d^3k''\,d^3k'\,dt'\\
&-\int_{-\infty}^{t}\int_{\mathrm{II}'}\int \Delta_{\alpha\beta}(k)\,\Delta_{\beta\lambda}(k-k')\,k_\gamma(k_\mu-k'_\mu)\;u_\beta(k',t)\\
&\langle u_\lambda(k'',t')\,u_\mu(k-k'-k'',t')\rangle\,e^{-\nu(k-k')^2(t-t')}\\
&d^3k''\,d^3k'\,dt' - \int_{-\infty}^{t}\int_{\mathrm{III}}\int \Delta_{\alpha\beta}(k)\,\Delta_{\beta\lambda}(k')\,k_\gamma\,k'_\mu\\
&\langle u_\lambda(k'',t')\,u_\mu(k'-k'',t')\,u_\gamma(k-k',t)\rangle\,e^{-\nu k'^2(t-t')}\\
&d^3k''\,d^3k'\,dt' \qquad\qquad (2\cdot15)
\end{aligned}
$$

となる。

(2·15) の k'' の積分にあたって，前と同様に k-空間の分割を行うが，このばあいには k' の II と III あるいは II' に属するかによって Fig. 2 のように分割になる。更に近似 (2·12) および一様，等方性 (2·13) をもちいると (2·15) は

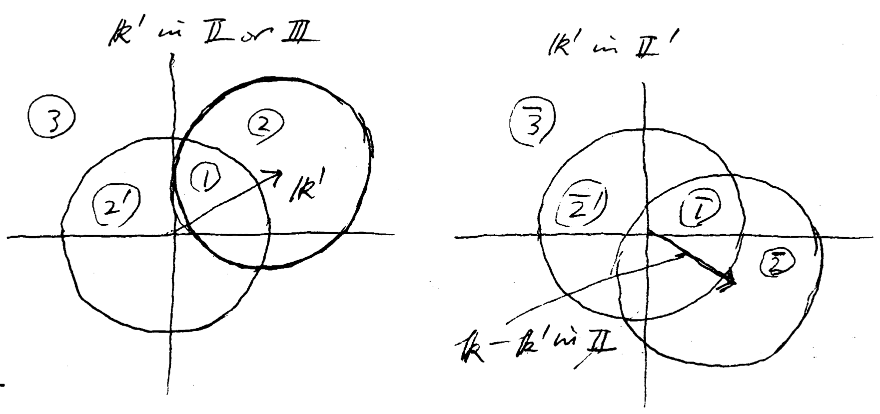


Fig. 2

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu_T k^2\right)u_\alpha(k,t) = -i\Delta_{\alpha\beta}(k)k_\gamma\int_{I} u_\beta(k',t)u_\gamma(k-k',t)d^3k' - \Delta_{\alpha\beta}(k)k_\gamma\int_{-\infty}^{t}\int_{II}\int_{1}\Delta_{\beta\lambda}(k')k'_\mu u_\lambda(k'',t') u_\mu(k'-k'',t')u_\gamma(k-k',t)e^{-\nu k'^2(t-t')}d^3k''d^3k'dt'$$
$$-\Delta_{\alpha\beta}(k)k_\gamma\int_{-\infty}^{t}\int_{II'}\int_{2}\Delta_{\gamma\lambda}(k')k''_\mu u_\beta(k',t)u_\lambda(k'',t') u_\mu(k-k'-k'',t')e^{-\nu(k-k')^2(t-t')}d^3k''d^3k'dt'$$
$$-\Delta_{\alpha\beta}(k)k_\gamma\int_{-\infty}^{t}\int_{II}\int_{3}\Delta_{\beta\lambda}(k')k'_\mu\langle u_\lambda(k'',t') u_\mu(k'-k'',t')u_\gamma(k-k',t)\rangle e^{-\nu k'^2(t-t')}d^3k''d^3k'dt' \qquad (2.16)$$

$$\nu_T = \nu\left(1+\frac{8\pi}{15}\int_{-\infty}^{t}\int_{k_1}^{\infty}k'^4\Phi(k',t,t')(t-t')e^{-\nu k'^2(t-t')} dk'dt'\right)+\frac{8\pi}{15}\int_{-\infty}^{t}\int_{k_1}^{\infty}k'^2\Phi(k',t,t')e^{-\nu k'^2(t-t')}dk'dt' - \frac{2\pi}{15}k_1^3\int_{-\infty}^{t}\Phi(k_1,t,t')e^{-\nu k_1^2(t-t')}dt' + O(k/k_1) \qquad (2.17)$$

となる。ν_T は渦動粘性率とよばれるべきもので，その主要項は第2項である。すなわち $\nu\simeq 0$ ならば $\Phi(k_1,t,t')\simeq 0$ と考えれば

$$\nu_T = \frac{8\pi}{15}\int_{-\infty}^{t}\int_{k_1}^{\infty}k'^2\Phi(k',t,t')dk'dt' \qquad (2.18)$$

となる。

§3. 外力のあるBurgers方程式の解析

§2でのべたように，core flow の乱れは境界層からの渦の放出とその渦が小形化して最終に熱運動になる散逸過程

とみなすことができる。境界層の厚さの程度の渦が放出されると考えられるから，k-空間において δ^{-1} 程度の波数領域にエネルギー・スペクトルの最大値があり，さらにエネルギーしたがって力のわき出しがあると考えることができる。偶然力のある Fourier 変換された N.-S. 方程式を数値的に解くことによって $\Phi(k,t,t')$ をもとめ ν_T を計算することが可能であろう。しかし、偶然力の性質，Reynolds数をいくらにとるかということは、境界層からの渦の放出機構，渦の放出と core flow における散逸との平衡機構等をしらなければ解決しない問題である。

そこでここでは手はじめとして，外力のある Burgers 方程式：

$$\frac{\partial}{\partial t}u(k,t) = -\frac{1}{R}k^2 u(k,t) - ik\int_{-\infty}^{\infty} u(k',t)\,u(k-k',t)\,dk' + f(k,t) \qquad (3.1)$$

の初期値問題を考える。$k=\Delta k\, l$ $(l=-L,\ldots,L)$ のメッシュに合せて

$$\frac{du_l}{dt} = -\frac{1}{R}(\Delta k)^2 l^2 u_l - i(\Delta k)^2 l \sum_{l'=l-L}^{L}{}' u_{l'} u_{l-l'} + f_l(t) \qquad (3.2)$$

を基礎方程式とする。ここでは $\Delta k=0.2$ とり，偶然力は $k=0.6$, 0.8, 1.0 $(l=3,4,5)$ でのみ与えられ（ただし $f(-k)=f(k)^*$）

$$\left.\begin{aligned}&\langle f_3^2\rangle=\langle f_4^2\rangle=\langle f_5^2\rangle=\frac{1}{3}\\&\langle f_3f_4\rangle=\langle f_4f_5\rangle=\langle f_5f_3\rangle=0\end{aligned}\right\}\qquad(3.3)$$

その確率分布は正規分布から

$$P[f_l]=\frac{3}{\pi}e^{-f_l^* f_l}\qquad l=3,4,5\qquad(3.4)$$

ととる。又偏熱力はその値を時間 0.6, 0.8, 1 だけ保持するとして、その分布は

$$P(t=0.6)=P(t=0.8)=P(t=1)=\frac{1}{3}\qquad(3.5)$$

とする。この計算でもちいた偏熱力の時間についての変化は Fig. 4 (a) に示してある。

R (Reynolds 数) = 20, $\Delta k=0.2$, Δt (時間々隔) = 0.02, L (のこした Fourier 成分の数) = 20 のばあいの Fourier 成分の消長が、実数値を横軸、虚数値を縦軸とする相図として Fig. 3 に、実数値、虚数値そのものの時間的発展を Fig 4. (b) に示した。

エネルギー分布 $DE_l(t)$, 散逸分布 $DD_l(t)$, エネルギー伝達分布 $DET_l(t)$ を次のように定義する。

$$\left.\begin{aligned}ED_l(t)&=\frac{1}{2}\left(u_l(t)\,u_l(t)^*+u_{-l}(t)\,u_{-l}(t)^*\right)\\&=u_l(t)\,u_l(t)^*\\DD_l(t)&=\frac{2}{R}(\Delta k)^2l^2\,ED_l(t)\\DET_l(t)&=2(\Delta k)^2l\sum_{l'=l-L}^{L}\{u_l^*u_{l'}u_{l-l'}-u_lu_{l'}\\&\qquad u_{l-l'}^*\}\end{aligned}\right\}\qquad(3.6)$$

また，（時間）平均エネルギー分布 $ME_\ell(t)$，平均散逸分布 $MD_\ell(t)$，平均エネルギー伝達分布 $MET_\ell(t)$ を

$$\left.\begin{aligned} ME_\ell(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t ED_\ell(t')\,dt' \\ MD_\ell(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t DD_\ell(t')\,dt' \\ MET_\ell(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t DET_\ell(t')\,dt' \end{aligned}\right\} \quad (3.7)$$

とする。 Fig. 5 に $t=10$，$t=50$，$t=100$ におけるこれらの分布が示してある。

エネルギー供給率及び平均エネルギー供給率を

$$\left.\begin{aligned} RES(t) &= f_3(t)u_3(t)^* + f_4(t)u_4(t)^* + f_5(t)u_5(t)^* \\ &\quad + c.c. \\ MRES(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t RES(t')\,dt' \end{aligned}\right\} \quad (3.8)$$

と定義する。 Fig. 4 (c) に $RES(t)$，$MRES(t)$ が示してある。これによると $MRES(t)$ は $t=2$ 位で殆ど一定値になるように思われる。

§4. むすび

§2において，乱流ずり流の core flow における渦粘性率を波数空間における速度（速度の Fourier 成分）の2点2時刻の相関によって表わすことを示した。この理論においては，大きい渦（T-macro）のふるまいに対する小さい渦（T-micro）の効果を粘性効果と同様な形でくりこむことがで

まれ。 ν_Tの主要項(2.18)は(2.15)の右辺の最後の項(積分変数$\boldsymbol{k}'$はT-microに属する)で$\boldsymbol{k}''$と$\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}''$の一方がT-micro, 一方がT-macroに属する時に生じ, そのばあい, $\boldsymbol{k}''$, $\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}''$, $\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'$の3点相関は($\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'$が必ずT-microに属するから)$\boldsymbol{k}''$と$\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'$または$\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}''$と$\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}'$の2点相関とT-macroの速度との積に移行する。2点相関は(2.13)によって選択的効果をもっており、結局いずれのばあいにも

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{k}', t\\ \boldsymbol{k}, t'\\ -\boldsymbol{k}', t'\end{array}\right\} \xrightarrow{-\infty\sim t} \boldsymbol{k}, t \qquad (4.1)$$

のような3点2時刻非線形作用の形となる。(4.1)の左辺で$\boldsymbol{k}$はT-macroに属し, (2.10)の仮定をもちいて$t'\simeq t$と考えれば時間積分の外に出て$u_\alpha(\boldsymbol{k},t)$の形を与え、結局(2.4)の形が得られる。すなわち非線形項の中から渦粘性項をくりこむことができたことになる。

この理論では, $\Psi(\boldsymbol{k},t,t')$がわかれば渦粘性が求められる。そこで, $\Psi(\boldsymbol{k},t,t')$を理論的に求める問題がのこる。そのためには、境界からの渦の放出の機構をしらべ それを波数空間における偶然力の効果として近似して, 偶然力のあるFourier変換されたN.-S.方程式の解析を必要とする。

この論文ではその手はじめとして偏想力のあるBurgers方程式の初期値問題を解析し，各Fourier成分のみならず，エネルギー分布，散逸分布，エネルギー伝達分布等を求めた。

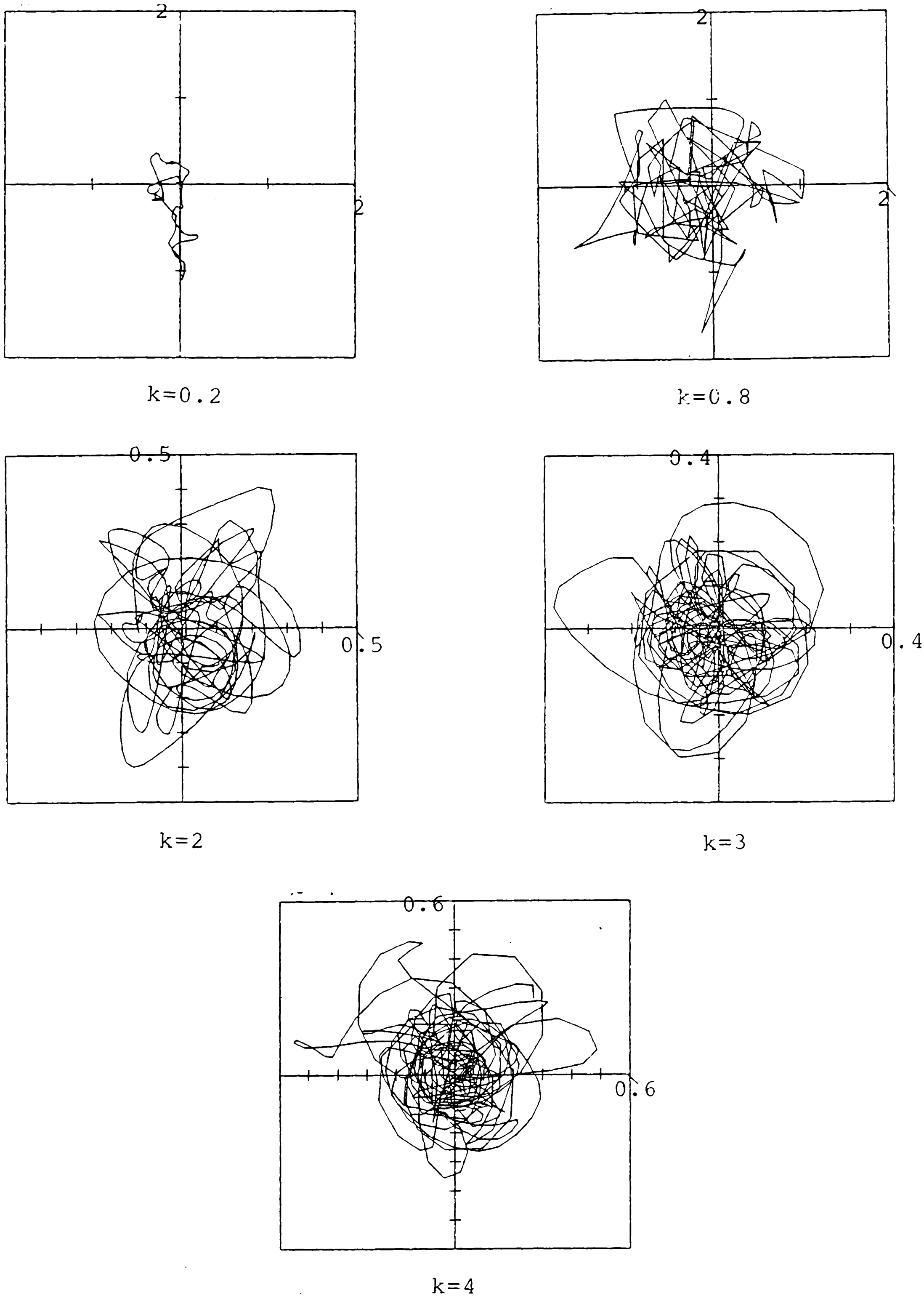
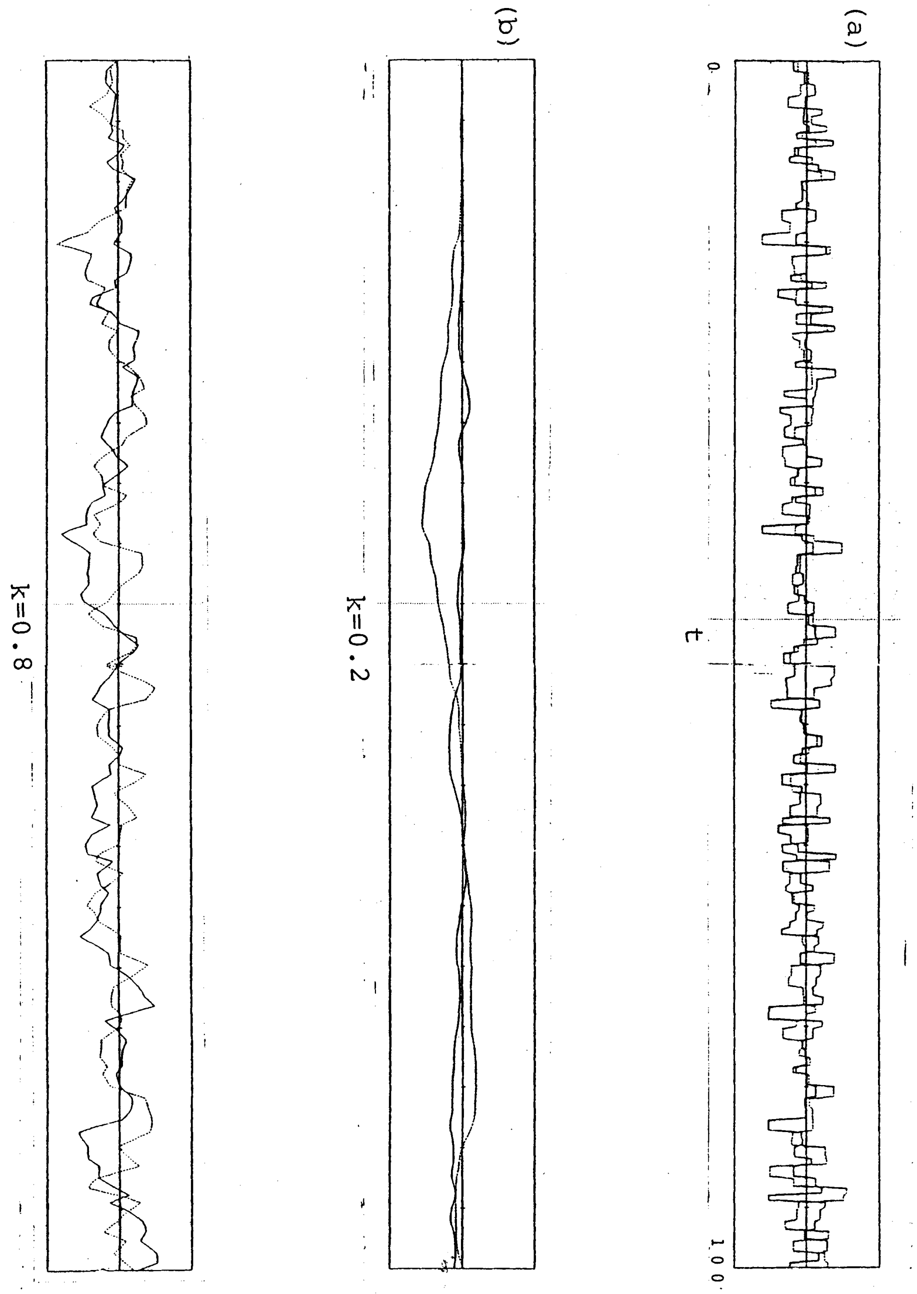


Fig.3. Time evolutions of the Fourier components of the velocity in the phase diagram (Reu(k), Imu(k)), for R(:Reynolds no.)=20, Δk(:wave no. mesh length)=0.2, Δt(:time increament)=0.02 and L(:no. of retained Fourier components)=20.


(a)
0
t
100
(b)
k=0.2
k=0.8

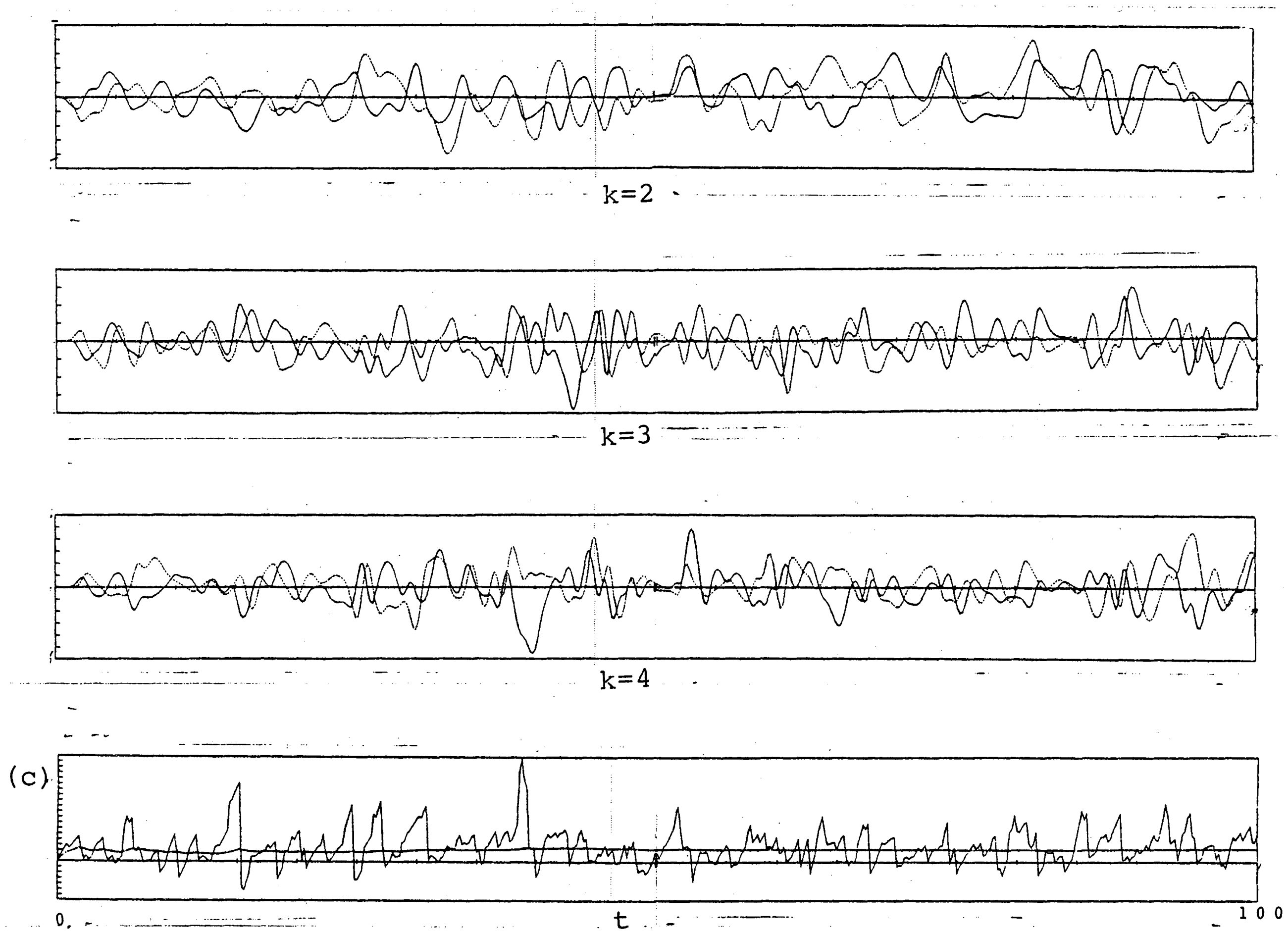


Fig. 4. Time evoutions of (a) random force f(0.8,t), (b) the Fourier components of velocities Reu(k), Imu(k), and (c) the rate of energy supply RES(t) (——) the mean rate of energy supply MRES(t) (–·——).
——— : the real part and ------: the imaginary part for (a) and (b).

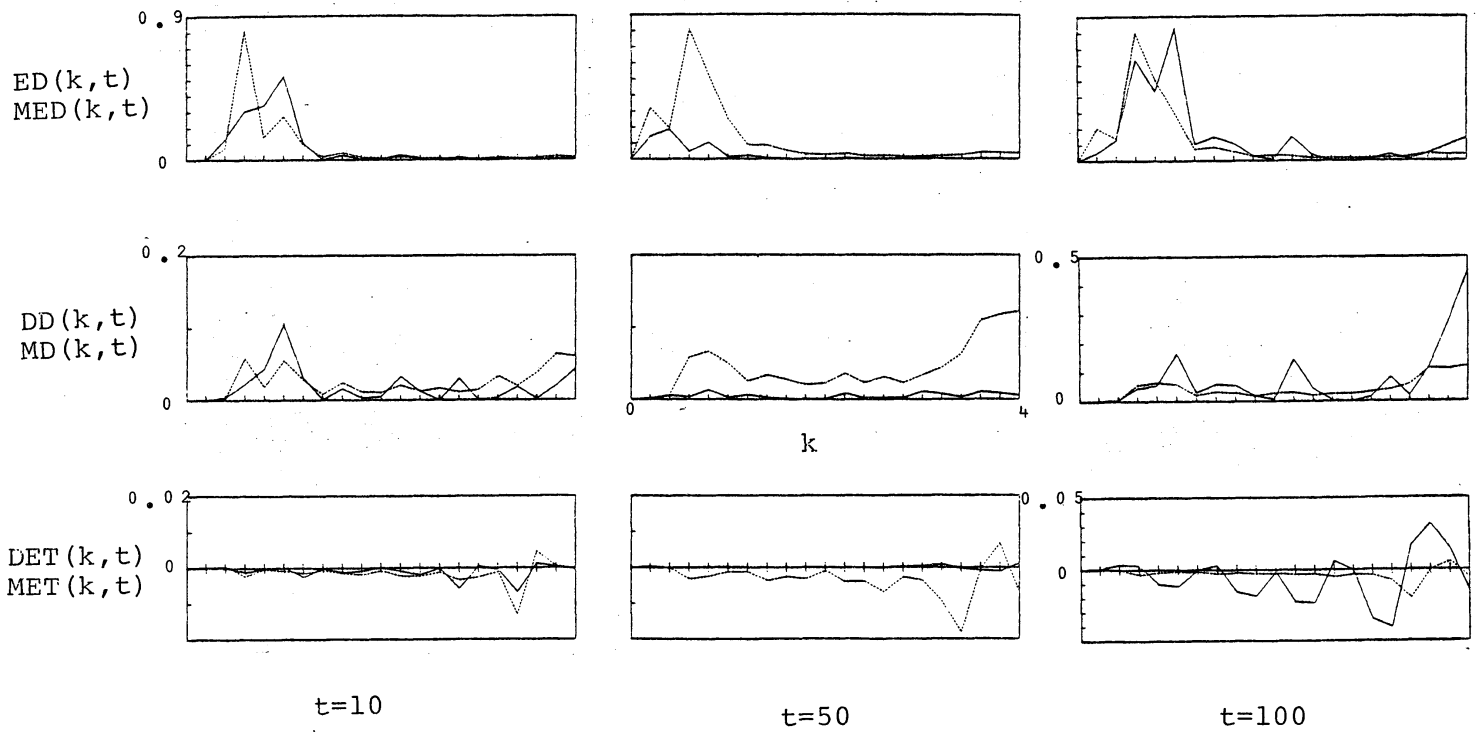


Fig. 5. Distributions of energy ED(k,t), dissipation DD(k,t), energy transfer DET(k,t) and time mean distributions of energy ME(k,t), dissipation MD(k,t), energy transfer MET(k,t). ······ : distributions and ——— : time mean distribuions.